Cvičení č. 2
Řešení soustav lineárních rovnic, Gaussova eliminační metoda

Soustava lineárních rovnic:

Definice: Soustavou *m* lineárních rovnic o *n* neznámých nazýváme systém rovnic

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

$x_1,\ldots,x_n$ nazýváme neznámé, $a_{11},\ldots,a_{mn}$ koeficienty soustavy a čísla $b_1,\ldots,b_m$ nazýváme pravými stranami.

Matici koeficientů soustavy

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

nazýváme maticí soustavy a vektory

$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ nazýváme vektorem neznámých a vektorem pravých stran.

Soustavu můžeme zapisovat v tzv. maticovém tvaru *Ax=b.*

Matici [*A*,*b*], která vznikla tak, že jsme matici soustavy rozšířili vektorem pravých stran nazýváme rozšířenou maticí soustavy.

Gaussova eliminační metoda:

Definice: Elementárními řádkovými úpravami matice rozumíme nasledující operace:

1. Záměna dvou řádků
2. Vynásobení řádku libovolným nenulovým číslem
3. Přičtení nenulového číselného násobku jednoho řádku k druhému

Cílem Gaussovy eleminační metody je pomocí elementárních řádkových operací převést rozšířenou matici soustavy na matici, která má pod diagonálou nuly.

$$(A,b) \xrightarrow{E.\check{R}.\acute{U}.} (U,b'), U=(u_{ij}), u_{ij}=0, \forall i > j$$

Poté je možné vypočítat řešení soustavy přímo dosazováním. Více vysvětlí následující příklad.

Příklad:

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 10 \\
x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\
2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15
\end{aligned}
$$

Soustavu přepíšeme do maticového tvaru:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}10\\ 2\\ 15\end{pmatrix}$$

Gaussovou eliminací nyní upravíme rozšířenou matici soustavy:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & 2 & 10\\ 1 & 3 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3 & 15\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot 3\\ \cdot 3\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & 2 & 10\\ 3 & 9 & -3 & 6\\ 6 & 6 & 9 & 45\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ -r_1\\ -2r_1\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & 2 & 10\\ 0 & 11 & -5 & -4\\ 0 & 10 & 5 & 25\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \cdot\frac{1}{5}\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & 2 & 10\\ 0 & 11 & -5 & -4\\ 0 & 2 & 1 & 5\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \cdot 11\end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & 2 & 10\\ 0 & 11 & -5 & -4\\ 0 & 22 & 11 & 55\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ -2r_2\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & 2 & 10\\ 0 & 11 & -5 & -4\\ 0 & 0 & 21 & 63\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \cdot\frac{1}{21}\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & 2 & 10\\ 0 & 11 & -5 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}3x_1-2x_2+2x_3 &= 10\\ 11x_2-5x_3 &= -4\\ x_3 &= 3\end{aligned}$$

Dosazením poslední rovnice do druhé dostaneme

$$11x_2 - 5\cdot 3 = -4 \Leftrightarrow x_2 = 1$$

a nyní dosazením do první rovnice

$$3x_1 - 2\cdot 1 + 2\cdot 3 = 10 \Leftrightarrow x_1 = 2$$

Řešením tedy je vektor

$$x=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$$

Provedem ještě zkoušku:

$$Ax=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 2\\ 15\end{pmatrix}=b$$

Vektor x je tedy opravdu řešením naší soustavy.

Příklad:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5\\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -5\\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 5\\ 2 & -1 & 3 & -5\\ 4 & 3 & 1 & 5\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ -2r_1\\ -4r_1\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 5\\ 0 & -5 & 5 & -15\\ 0 & -5 & 5 & -15\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ -r_2\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 5\\ 0 & -5 & 5 & -15\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot\frac{1}{5}\\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 5\\ 0 & -1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Jelikož se vynuloval jeden celý řádek, dostáváme nyní pouze 2 rovnice o 3 neznámých. Budeme tedy volit jednu neznámou jako parametr.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & -3 \\ \hline \end{array}$$

$$x_3 = t, \quad t \in R$$

$$-x_2 + t = -3 \Leftrightarrow x_2 = t+3$$

$$x_1 + 2(t+3) - t = 5 \Leftrightarrow x_1 = -t-1$$

Řešení je tedy nekonečně mnoho s jedním parametrem a můžeme je zapsat ve tvaru

$$x = \begin{pmatrix} -t-1 \\ t+3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \in R$$

Příklad:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Z tohoto je vidět, že soustava nemá řešení neboť v poslední rovnici dostáváme, že 0=2 což nelze nikdy splnit.

Poznámka: Soustava lineárních rovnic může mít následující počet řešení:

1. žádné
2. právě jedno
3. nekonečně mnoho s jedním či více parametry

Příklad:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Při zápisu rozšířené matice soustavy, můžeme vynechat sloupec pravých stran, neboť všechny pravé strany jsou nulové a tedy elementárními řádkovými úpravami se nemění.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot \frac{1}{7} \\ \cdot \frac{1}{4} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = p; p \in R$$

$$x_3 = q; q \in R$$

$$x_2 + q - p = 0 \Leftrightarrow x_2 = p - q$$

$$x_1 - 3(p-q) - q + 5p = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2(p+q)$$

$$x=\begin{pmatrix}-2(p+q)\\ p-q\\ q\\ p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}p+\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}q,\ p,q\in R$$

Poznámka: Soustavy lineárních rovnic, které mají všechny pravé strany rovny nule nazýváme homogenní. V opačném případě nehomogenní.

Příklad:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0\\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0\\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 3\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ -2r_1\\ +r_1\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -5 & -5\\ 0 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ +r_2\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -5 & -5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$x_3=0$

$-5x_2-5\cdot 0=0\Leftrightarrow x_2=0$

$x_1+2\cdot 0+4\cdot 0=0\Leftrightarrow x_1=0$

$$x=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Poznámka: Homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení a tím je řešení nulové. Toto řešení nazýváme řešením triviálním. Netriviální řešení má pouze má-li řešení nekonečně mnoho.

Příklad:

$$\begin{array}{rcrcrcl} px_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & p\\ x_1 & + & px_2 & + & x_3 & = & 0\\ x_1 & + & x_2 & + & px_3 & = & 1\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}p & 1 & 1 & p\\ 1 & p & 1 & 0\\ 1 & 1 & p & 1\end{array}\right)\begin{matrix}p\neq 0\\ \cdot p\\ \cdot p\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}p & 1 & 1 & p\\ p & p^2 & p & 0\\ p & p & p^2 & p\end{array}\right)\begin{matrix}\\ -r_1\\ -r_1\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}p & 1 & 1 & p\\ 0 & p^2-1 & p-1 & -p\\ 0 & p-1 & p^2-1 & 0\end{array}\right)\begin{matrix}p\neq -1\\ \\ \cdot(p+1)\end{matrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}p & 1 & 1 & p\\ 0 & p^2-1 & p-1 & -p\\ 0 & p^2-1 & (p-1)(p+1)^2 & 0\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ -r_2\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}p & 1 & 1 & p\\ 0 & p^2-1 & p-1 & -p\\ 0 & 0 & (p-1)(p+1)^2-(p-1) & p\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}p & 1 & 1 & p\\ 0 & p^2-1 & p-1 & -p\\ 0 & 0 & p(p-1)(p+2) & p\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ \cdot\frac{1}{p}\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}p & 1 & 1 & p\\ 0 & p^2-1 & p-1 & -p\\ 0 & 0 & (p-1)(p+2) & 1\end{array}\right)$$

A. $p\neq 0\wedge p\neq -1$

1. Nemá řešení

$[(p-1)(p+2)=0 \vee (p^2-1=0 \wedge p-1=0 \wedge -p \neq 0)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(p=1 \vee p=-2) \vee ((p=1 \vee p=-1) \wedge p=1 \wedge p \neq 0)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p=1 \vee p=-2$

2. Právě jedno řešení

$[(p-1)(p+2) \neq 0 \wedge (p^2-1 \neq 0)] \Leftrightarrow [(p \neq 1 \wedge p \neq -2) \wedge (p \neq 1 \wedge p \neq -1)] \Leftrightarrow p \neq 1 \wedge p \neq -2$

$$\begin{array}{lllllll} px_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & p \\ & & (p^2-1)x_2 & + & (p-1)x_3 & = & -p \\ & & & & (p-1)(p+2)x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$x_3 = \frac{1}{(p-1)(p+2)}, x_2 = -\frac{p+1}{(p-1)(p+2)}, x_1 = \frac{p^2+p-1}{(p-1)(p+2)}$$

B. $p=0 \wedge p \neq -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ r_1 \leftrightarrow r_2 \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right), \; x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

C. $p \neq 0 \wedge p=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right), \; x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$