Cvičení č. 13

Vlastní čísla a vlastní vektory. Charakteristický mnohočlen a charakteristická rovnice. Lokalizace spektra. Spektrální rozklad.

Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Definice:
Nechť je dána čtvercová komplexní matice A řádu n. Nechť pro skalár $\lambda \in C$ a nenulový vektor $v \in C$ platí

$$Av = \lambda v$$

Pak λ se nazývá vlastní číslo matice A a v vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu λ. Množina všech vlastních čísel matice A se nazývá spektrum matice A a značí se $\sigma(A)$.

Příklad:
Rozhodněte, zda-li vektory

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

jsou vlastními vektory matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Řešení:

$$Au = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda u.$$

$$Av = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \neq \lambda v.$$

Z prvního případu vyplývá, že u je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu $\lambda = 2$. Z druhého případu je zřejmé že takové číslo, které by vyhovovalo definici nelze nalézt a tudíž v není vlastním vektorem. ♦

Charakteristický mnohočlen a charakteristická rovnice.

Poznámka:
Podmínka $Av = \lambda v$ je ekvivalentní podmínce $(A - \lambda I)v = o$. Poslední podmínka představuje soustavu n lineárních rovnic s n neznámými v. Číslo λ představuje parametr této soustavy. Jelikož pravé strany jsou nulové je zřejmé, že soustava má nenulové řešení pouze tehdy, když bude mít nekonečně mnoho řešení tj. když matice soustavy bude singulární. To lze zajistit podmínkou $\det(A - \lambda I) = 0$. Z této podmínky pak můžeme vypočítat vlastní čísla a dosazením

takto získaných vlastních čísel do soustavy $(A-\lambda I)v = o$ pak získáme jim odpovídající vlastní vektory.

Definice:
Nechť A je čtvercová komplexní matice řádu n. Mnohočlen n-tého řádu $\varphi(\lambda) = \det(A-\lambda I)$ se nazývá charakteristický mnohočlen matice A a rovnice $\det(A-\lambda I) = 0$ se nazývá charakteristická rovnice.

Poznámka:
Ze základní věty algebry, která říká, že algebraická rovnice stupně n má alespoň jedno řešení vyplývá, že spektrum komplexní matice A řádu n bude neprázdné. Navíc platí, že taková matice bude mít právě n komplexních vlastních čísel, přičemž se do tohoto počtu započítává i násobnost kořenů.

Příklad:
Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

1. Sestavíme charakteristickou rovnici a vyřešíme ji.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ \updownarrow \\ r_3 \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\left(0 - 0 + (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -(1-\lambda)\left(1-(1-\lambda)^2\right) = -(1-\lambda)(1-1+2\lambda-\lambda^2) = -(1-\lambda)(2\lambda-\lambda^2) = -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) = 0.$$

Z posledního výrazu je ihned vidět, že kořeny jsou $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. Toto jsou tedy vlastní čísla matice A.

2. K jednotlivým vlastním číslům nalezneme příslušné vlastní vektory.
   a. Pro $\lambda_1 = 0$ řešíme soustavu $(A-\lambda_1 I)v^1 = o$. Sestavíme tedy matici soustavy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -r_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} v_1^1 = -t \\ v_2^1 = t \\ v_3^1 = 0 \end{matrix} \Rightarrow v^1 = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}, t \in R, t \neq 0.$$

   b. Pro $\lambda_2 = 1$ řešíme soustavu $(A-\lambda_2 I)v^2 = o$. Sestavíme tedy matici soustavy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] r_1 \leftrightarrow r_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} v_1^2 = 0 \\ v_2^2 = 0 \\ v_3^2 = t \end{matrix} \Rightarrow v^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, t \in R, t \neq 0.$$

   c. Pro $\lambda_3 = 2$ řešíme soustavu $(A-\lambda_3 I)v^3 = o$. Sestavíme tedy matici soustavy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ +r_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} v_1^3 = t \\ v_2^3 = t \\ v_3^3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow v^2 = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}, t \in R, t \neq 0.$$

Položíme-li např. $t = 1$ pak dvojice

$$\lambda_1 = 0, v^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = 1, v^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_3 = 2, v^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

jsou vlastními čísly s příslušnými vlastními vektory matice *A*. ♦

Poznámka:
Jak je předchozího příkladu patrno, tak vlastní vektory nejsou určeny jednoznačně neboť jejich libovolný nenulový násobek je taktéž vlastním vektorem. To platí zcela obecně neboť pro libovolné $t \neq 0$ platí

$$(A - \lambda I)v = o \Leftrightarrow t(A - \lambda I)v = o \Leftrightarrow (A - \lambda I)tv = o \Leftrightarrow (A - \lambda I)w = o.$$

Z poslední rovnice tedy plyne, že $w = tv$ je taktéž vlastním vektorem příslušným k λ.

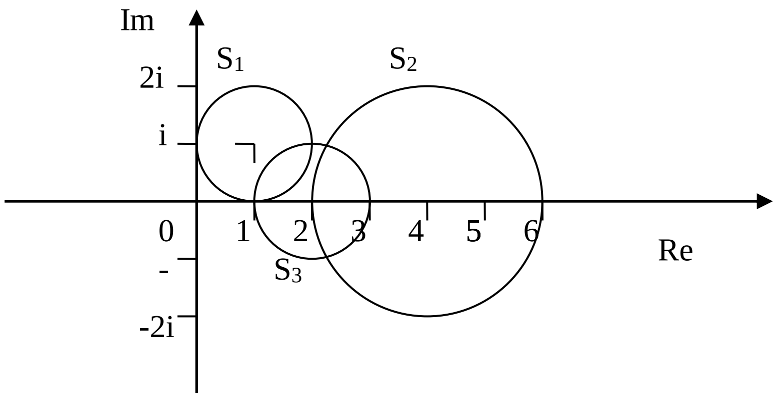
<u>Lokalizace spektra</u>

Věta: (Geršgorinova)
Nechť $A = [a_{ij}]$ je komplexní čtvercová matice řádu *n*. Nechť
$r_i = |a_{i1}| + \ldots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \ldots + |a_{in}|, S_i = \{z \in C : |z - a_{ii}| \leq r_i\}, i = 1, \ldots, n.$
Pak $\sigma(A) \subset S_1 \cup \ldots \cup S_n$.

Příklad:
Pomocí Geršgorinovy věty lokalizujte spektrum matice

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -1 & 0 \\ -1 & 4 & i \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Řešení:
$r_1 = |-1| + |0| = 1, \qquad S_1 = \{z \in C : |z - (1+i)| \leq 1\},$
$r_2 = |-1| + |i| = 2, \qquad S_2 = \{z \in C : |z - 4| \leq 2\},$
$r_3 = |0| + |-1| = 1, \qquad S_3 = \{z \in C : |z - 2| \leq 1\}.$
Nalezené množiny vykreslíme do komplexní roviny:



Spektrum se pak nachází ve sjednocení všech tří kruhů $\sigma(A) \subset S_1 \cup S_2 \cup S_3$. ♦

Věta:
Nechť A je reálná symetrická matice. Pak $\sigma(A) \subset R$.

Příklad:
Lokalizujte spektrum matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Řešení:
Jelikož matice je reálná a symetrická, kruhy S z Geršgorinovy věty se redukují na intervaly na reálné ose neboť matice má reálné spektrum. Můžeme tedy psát

$$r_1 = |1| + |0| = 1, \qquad S_1 = \{x \in R : |x-1| \le 1\} = \langle 0,2 \rangle,$$
$$r_2 = |1| + |0| = 1, \qquad S_2 = \{x \in R : |x-1| \le 1\} = \langle 0,2 \rangle,$$
$$r_3 = |0| + |0| = 0, \qquad S_3 = \{x \in R : |x-1| \le 0\} = \{1\}.$$

Odtud dostáváme, že $\sigma(A) \subset S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \langle 0,2 \rangle$. ♦

<u>Spektrální rozklad</u>

Definice:
Matice Q se nazývá ortogonální jestliže $Q^T Q = I$.

Věta:
Nechť A je reálná symetrická matice. Pak vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou ortogonální.

Věta: (O spektrálním rozkladu)
Nechť A je reálná symetrická matice. Pak existuje ortogonální matice Q a diagonální matice D tak, že

$$A = QDQ^T.$$

Navíc sloupce matice Q tvoří ortonormální vlastní vektory matice A a diagonální prvky D jsou jim odpovídající vlastní čísla.

Příklad:
Nalezněte spektrální rozklad matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Řešení:
Druhá část věty o spektrálním rozkladu nám dává návod jak nalézt matici Q a D.
Nejdříve musíme tedy nalézt vlastní čísla a vlastní vektory matice A. Tuto úlohu jsme však již řešili v druhém příkladě tohoto cvičení a výsledné vlastní čísla a vektory byly následující

$$\lambda_1 = 0, v^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = 1, v^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_3 = 2, v^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Z věty předcházející větu o spektrálním rozkladu vyplývá, že vlastní vektory jsou ortogonální. Skutečně

$$(v^1, v^2) = (-1)\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0,$$

$$(v^1, v^3) = (-1)\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 = 0,$$

$$(v^2, v^3) = 0\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0.$$

Avšak nejsou ortonormální neboť např. $(v^1, v^1) = (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 = 2$.

Proto musíme vektory normalizovat:

$$q^1 = \frac{v^1}{\|v^1\|} = \frac{v^1}{\sqrt{(v^1, v^1)}} = \frac{[-1,1,0]}{\sqrt{(-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 0\cdot 0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}[-1,1,0],$$

$$q^2 = \frac{v^2}{\|v^2\|} = \frac{v^2}{\sqrt{(v^2, v^2)}} = \frac{[0,0,1]}{\sqrt{0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{1}}[0,0,1] = [0,0,1],$$

$$q^3 = \frac{v^3}{\|v^3\|} = \frac{v^3}{\sqrt{(v^3, v^3)}} = \frac{[1,1,0]}{\sqrt{1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,1,0].$$

Nyní můžeme sestavit obě hledané matice spektrálního rozkladu $A = QDQ^T$:

$$D = diag\{0,1,2\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; Q = [q^1, q^2, q^3] = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Na závěr můžeme ještě provést zkoušku, zda-li nalezené matice opravdu splňují podmínku $A = QDQ^T$.

$$QDQ^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

Nalezené matice Q a D jsou tedy opravdu spektrálním rozkladem matice A. ♦