

Cvičení č. 11

Skalární součin. Norma vektoru. Ortogonalita. Gramův-Schmidtův ortonormalizační proces.

Skalární součin**Definice:**

Skalárním součinem na vektorovém prostoru V rozumíme každou symetrickou bilineární formu jejíž příslušná kvadratická forma je pozitivně definitní.

Příklad:

Rozhodněte, zda-li zobrazení definované předpisem

$$[u, v] = 2u_1v_1 + 4u_2v_2 + 2u_3v_3$$

tvoří skalární součin na R^3 .

Řešení:

$$\begin{aligned} 1. \forall u, v, w \in R^3 : [u + v, w] &= 2(u_1 + v_1)w_1 + 4(u_2 + v_2)w_2 + 2(u_3 + v_3)w_3 = \\ &= 2u_1w_1 + 4u_2w_2 + 2u_3w_3 + 2v_1w_1 + 4v_2w_2 + 2v_3w_3 = [u, w] + [v, w]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \forall u, v \in R^3 \forall \alpha \in R : [\alpha u, v] &= 2(\alpha u_1)v_1 + 4(\alpha u_2)v_2 + 2(\alpha u_3)v_3 = \\ &= \alpha(2u_1v_1 + 4u_2v_2 + 2u_3v_3) = \alpha[u, v]. \end{aligned}$$

$$3. \forall u, v \in R^3 : [v, u] = 2v_1u_1 + 4v_2u_2 + 2v_3u_3 = 2u_1v_1 + 4u_2v_2 + 2u_3v_3 = [u, v].$$

Body 1., 2., 3. jsme dokázali, že zadané zobrazení je symetrická bilineární forma. Nyní zbývá dokázat, že její příslušná kvadratická forma je pozitivně definitní.

$$[u, u] = 2u_1^2 + 4u_2^2 + 2u_3^2 > 0, \quad \forall u \in R^3, u \neq o.$$

Z posledního vyplývá, že $[u, u]$ je pozitivně definitní a tedy předpis $[u, v]$ je skalárním součinem na R^3 . ♦

Norma vektoru.

Norma vektoru představuje zobecnění pojmu velikosti vektoru známého z R^2 či R^3 na obecný vektorový prostor V .

Definice:

Zobrazení, které každému vektoru v z vektorového prostoru V přiřadí kladné reálné číslo $\|v\|$ se nazývá norma vektoru v jestliže $\forall u, v \in V$ a libovolný skalár α platí:

$$1. \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

$$2. \quad \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$$

$$3. \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = o$$

Příklad:

Rozhodněte, zda-li zobrazení $R^3 \ni v \rightarrow \|v\|_1 = |v_1| + |v_2| + |v_3|$ je normou na R^3 . Pokud ano, vypočtěte $\|x\|_1$, kde $x = [1, 3, -2]$.

Řešení:

Musíme ověřit všechny 3 vlastnosti normy.

- $\forall u, v \in V : \|u + v\|_1 = |u_1 + v_1| + |u_2 + v_2| + |u_3 + v_3| \leq |u_1| + |v_1| + |u_2| + |v_2| + |u_3| + |v_3| =$
 $= |u_1| + |u_2| + |u_3| + |v_1| + |v_2| + |v_3| = \|u\|_1 + \|v\|_1.$
- $\forall u \in V \forall \alpha \in R : \|\alpha u\|_1 = |\alpha u_1| + |\alpha u_2| + |\alpha u_3| = |\alpha| |u_1| + |\alpha| |u_2| + |\alpha| |u_3| =$
 $= |\alpha| (|u_1| + |u_2| + |u_3|) = |\alpha| \|u\|_1.$
- $\|u\|_1 = |u_1| + |u_2| + |u_3| = 0 \Leftrightarrow |u_1| = 0 \wedge |u_2| = 0 \wedge |u_3| = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0 \wedge u_2 = 0 \wedge u_3 = 0 \Leftrightarrow u = o.$
 $\|v\|_1$ tedy tvoří normu na R^3 .

Pro $x = [1, 3, -2]$ je $\|x\|_1 = |1| + |3| + |-2| = 6.$ ♦

Věta:

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem (u, v) . Pak $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$, $\forall u \in V$ je norma na V . Tuto normu nazýváme Eukleidovskou normou.

Příklad:

Je dán skalární součin $[u, v] = 2u_1v_1 + 4u_2v_2 + 2u_3v_3$ na vektorovém prostoru R^3 . Určete Eukleidovskou normu vektoru $x = [1, 3, -2]$ vzhledem k tomuto skalárnímu součinu.

Řešení:

$$\|x\| = \sqrt{[x, x]} = \sqrt{2x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2} = \sqrt{2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 3^2 + 2 \cdot (-2)^2} = \sqrt{2 + 36 + 8} = \sqrt{46}.$$
 ♦

Ortogonalita

Definice:

Je dán vektorový prostor V se skalárním součinem (u, v) . Množina vektorů $\{e_1, \dots, e_n\}$ se nazývá ortogonální jestliže $(e_i, e_j) = 0, \forall i, j = 1, \dots, n, i \neq j$. Je-li navíc $(e_i, e_i) = 1, \forall i = 1, \dots, n$, pak se tato množina nazývá ortonormální.

Příklad:

Rozhodněte zda-li jsou vektory $f_1 = [1, 1, 0], f_2 = [0, 1, 1], f_3 = [1, 0, 1]$ ortogonální vzhledem ke skalárnímu součinu $[u, v] = 2u_1v_1 + 4u_2v_2 + 2u_3v_3$.

Řešení:

$$\left. \begin{aligned} [f_1, f_2] &= 2 \cdot 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = 4 \\ [f_1, f_3] &= 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = 2 \\ [f_2, f_3] &= 2 \cdot 0 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{vektory nejsou ortogonální.} \quad \blacklozen$$

Gramův-Schmidtův ortonormalizační proces

Gramův-Schmidtův ortonormalizační proces vytvoří z množiny lineárně nezávislých vektorů systém ortonormální. Celý proces si ozřejmíme na příkladě.

Příklad:

Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu vytvořte z vektorů

$f_1 = [1,1,0]$, $f_2 = [0,1,1]$, $f_3 = [1,0,1]$ ortonormální množinu vzhledem ke skalárnímu součinu

$$[u, v] = 2u_1v_1 + 4u_2v_2 + 2u_3v_3.$$

Řešení:

1. Určení prvního vektoru e_1 je snadné neboť se přímo určí z vektoru $f_1 = [1,1,0]$:

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{f_1}{\sqrt{[f_1, f_1]}} = \frac{[1,1,0]}{\sqrt{2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0^2}} = \frac{[1,1,0]}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}[1,1,0].$$

Lze snadno ověřit, že pro vektor e_1 platí $[e_1, e_1] = 1$.

2. Druhý vektor e_2 určíme z vektoru $f_2 = [0,1,1]$ tak aby byl ortogonální na vektor e_1 .

Nejdříve tedy nalezneme vektor $g = f_2 - \alpha_1 e_1$ tak aby bylo splněno $[g, e_1] = 0$. Dostáváme tedy rovnici

$$0 = [g, e_1] = [f_2 - \alpha_1 e_1, e_1] = [f_2, e_1] - \alpha_1 [e_1, e_1] = [f_2, e_1] - \alpha_1.$$

Odtud dostáváme, že

$$\alpha_1 = [f_2, e_1] = 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 2 \cdot 1 \cdot 0 = \frac{4}{\sqrt{6}}.$$

Nový ortogonální vektor k vektoru e_1 tedy dostáváme ze vztahu

$$g = f_2 - \alpha_1 e_1 = [0,1,1] - \frac{4}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}[1,1,0] = [0,1,1] - \frac{2}{3}[1,1,0] = \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right] = \frac{1}{3}[-2,1,3].$$

Nyní zbývá vytvořit z vektoru g vektor e_2 tak aby $[e_2, e_2] = 1$. To lze provést stejným způsobem jako v kroku 1. Tzn.

$$e_2 = \frac{g}{\|g\|} = \frac{g}{\sqrt{[g, g]}} = \frac{\frac{1}{3}[-2,1,3]}{\sqrt{2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot 1^2}} = \frac{1}{3} \frac{[-2,1,3]}{\sqrt{\frac{30}{9}}} = \frac{1}{3} \frac{3}{\sqrt{30}}[-2,1,3] = \frac{1}{\sqrt{30}}[-2,1,3].$$

Vektor e_2 tedy splňuje podmínku $[e_1, e_2] = 0$ i podmínku $[e_2, e_2] = 1$.

3. Třetí vektor e_3 musí splňovat podmínku ortogonality vzhledem k oběma předchozím vektorům e_1, e_2 . Vytvoříme jej tedy z vektoru $f_3 = [1,0,1]$ následujícím způsobem

$$g = f_3 - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2.$$

Přitom musí být splněny podmínky ortogonality $[g, e_1] = 0$ a $[g, e_2] = 0$. Dosazením dostáváme rovnice

$$0 = [g, e_1] = [f_3 - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2, e_1] = [f_3, e_1] - \alpha_1 [e_1, e_1] - \alpha_2 [e_2, e_1] = [f_3, e_1] - \alpha_1,$$

$$0 = [g, e_2] = [f_3 - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2, e_2] = [f_3, e_2] - \alpha_1 [e_1, e_2] - \alpha_2 [e_2, e_2] = [f_3, e_2] - \alpha_2.$$

Jejich řešením je

$$\alpha_1 = [f_3, e_1] = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 4 \cdot 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 2 \cdot 1 \cdot 0 = \frac{2}{\sqrt{6}},$$

$$\alpha_2 = [f_3, e_2] = 2 \cdot 1 \cdot \frac{-2}{30} + 4 \cdot 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{2}{\sqrt{30}}.$$

Nyní můžeme sestavit vektor g , který je ortogonální k e_1, e_2 .

$$g = [1,0,1] - \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}[1,1,0] - \frac{2}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}}[-2,1,3] = [1,0,1] - \frac{1}{3}[1,1,0] - \frac{1}{15}[-2,1,3] = \frac{1}{5}[4,-2,4].$$

Zbývá tedy určit e_3 tak, aby $[e_3, e_3] = 1$.

$$e_3 = \frac{g}{\|g\|} = \frac{g}{\sqrt{[g, g]}} = \frac{\frac{1}{5}[4, -2, 4]}{\sqrt{2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{1}{5} \frac{[4, -2, 4]}{\sqrt{\frac{80}{25}}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2\sqrt{20}} [4, -2, 4] = \frac{1}{\sqrt{20}} [2, -1, 2].$$

Zkouška:

$$[e_1, e_2] = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{30}} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} + 2 \cdot 0 \cdot \frac{3}{\sqrt{30}} = -\frac{4}{\sqrt{180}} + \frac{4}{\sqrt{180}} = 0$$

$$[e_1, e_3] = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{20}} + 2 \cdot 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{4}{\sqrt{120}} - \frac{4}{\sqrt{120}} = 0$$

$$[e_2, e_3] = 2 \cdot \frac{-2}{\sqrt{30}} \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{20}} + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{30}} \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{-8 - 4 + 12}{\sqrt{600}} = 0$$

$$[e_1, e_1] = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 2 \cdot 0 \cdot 0 = \frac{2+4}{6} = 1$$

$$[e_2, e_2] = 2 \cdot \frac{-2}{\sqrt{30}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{30}} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{30}} \cdot \frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{8+4+18}{30} = 1$$

$$[e_3, e_3] = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} + 4 \cdot \frac{-1}{\sqrt{20}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{20}} + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{8+4+8}{20} = 1$$

Vektory $e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} [1, 1, 0]$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} [-2, 1, 3]$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{20}} [2, -1, 2]$ jsou hledané ortonormální vektory. ♦