Cvičení č. 10

Klasifikace kvadratických forem. Diagonální tvar matice kvadratické formy. Kongruence a Choleského rozklad.

Klasifikace kvadratických forem

Definice:
Kvadratická forma Q na vektorovém prostoru V se nazývá *pozitivně definitní* jestliže $\forall x \in V, x \neq o$ platí $Q(x) > 0$. Je-li $\forall x \in V\ Q(x) \geq 0$ pak se forma Q nazývá *pozitivně semidefinitní*. Je-li $-Q$ pozitivně definitní resp. semidefinitní pak se Q nazývá *negativně definitní* resp. *semidefinitní*. Pokud nesplňuje ani jedno z výše uvedených kritérií nazývá se *indefinitní*.

Příklad:
Klasifikujte kvadratickou formu Q na R^3 definovanou předpisem

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2.$$

Řešení:
Předpis kvadratické formy upravíme doplňováním na kvadráty součtů:

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2 = \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) + x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2 =$$

$$= (x_1 + x_2)^2 + \left(x_2^2 + 2x_2(-2x_3) + 4x_3^2\right) + x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2.$$

Z posledního tvaru je zřejmé, že $Q(x) > 0, \forall x \in R^3, x \neq o$ neboť součet nenulových druhých mocnin je vždy kladný. Q je tedy pozitivně definitní. ♦

Diagonální tvar matice kvadratické formy.

Diagonálním tvarem matice kvadratické formy rozumíme nalezení takové báze, vzhledem k níž je matice kvadratické formy diagonální.

Věta:

Nechť Q je kvadratická forma na V a nechť E je báze pro níž $[Q]_E$ je diagonální matice. Jsou-li všechny její diagonální prvky kladné resp. nezáporné pak je Q pozitivně definitní resp. semidefinitní. Jsou-li záporné resp. nekladné pak je Q negativně definitní resp. semidefinitní.

Příklad:
Určete bázi v níž má kvadratická forma z předchozího příkladu diagonální matici.

Řešení:

V předchozím příkladu jsme dospěli ke tvaru $Q(x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$.

Pokud si uvědomíme, že $x = [x]_S = [x_1, x_2, x_3]^T$, kde S je standardní báze R^3 a označíme-li

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = \quad x_2 - 2x_3 \\ y_3 = \quad\quad x_3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [x]_E = T[x]_S$$

kde $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ a $[x]_E = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ jsou souřadnice vektoru x vzhledem k nějaké bázi $E = (e_1, e_2, e_3)$. Matice T se obvykle nazývá matice přechodu od standardní báze S k nové bázi E. Výše uvedenou substitucí dostáváme kvadratickou formu ve tvaru $Q(x) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. Tento tvar můžeme dále upravit

$$Q(x) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = [y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = [x]_E^T [Q]_E [x]_E .$$

Odtud je patrné, že v bázi E má matice kvadratické formy

$$[Q]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonální tvar a jelikož všechny její diagonální prvky jsou kladné je kvadratická forma Q pozitivně definitní.

Zbývá tedy určit tuto bázi. Jelikož $[x]_E = T[x]_S$ a T je regulární můžeme taktéž psát $[x]_S = T^{-1}[x]_E$. Dosadíme-li za x postupně všechny vektory báze $E = (e_1, e_2, e_3)$ dostaneme $e_i = [e_i]_S = T^{-1}[e_i]_E = T^{-1}s_i^I = s_i^{T^{-1}}, \quad i = 1,2,3.$

Vypočteme tedy nejdříve matici T^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +2r_3 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -r_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Odtud $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ a $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$

$E = (e_1, e_2, e_3)$ je tedy hledaná báze v níž má kvadratická forma Q diagonální matici.

Snadno to můžeme ověřit sestavením matice Q pro bázi E. Budeme tedy dosazovat do symetrické bilineární formy $B_S(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5x_3y_3$, která přísluší kvadratické formě Q jak bylo ukázáno ve cvičení č. 10.

$B_S(e_1,e_1) = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 0 + 5\cdot 0\cdot 0 = 1$
$B_S(e_1,e_2) = 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 2\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 1 + 5\cdot 0\cdot 0 = 0 = B_S(e_2,e_1)$
$B_S(e_1,e_3) = 1\cdot(-2) + 1\cdot 2 + 0\cdot(-2) + 2\cdot 0\cdot 2 - 2\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 2 + 5\cdot 0\cdot 1 = 0 = B_S(e_3,e_1)$
$B_S(e_2,e_2) = (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 1 + 5\cdot 0\cdot 0 = 1$
$B_S(e_2,e_3) = (-1)\cdot(-2) + (-1)\cdot 2 + 1\cdot(-2) + 2\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 2 + 5\cdot 0\cdot 1 = 0 = B_S(e_3,e_2)$
$B_S(e_3,e_3) = (-2)\cdot(-2) + (-2)\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 2\cdot 2\cdot 2 - 2\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 2 + 5\cdot 1\cdot 1 = 1$

Odtud sestavíme matici kvadratické formy vzhledem k bázi E ve tvaru

$$[B_S]_E = [Q]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Báze E je tedy opravdu bází ve které má matice kvadratické formy diagonální tvar.

♦

Poznámka:

Vzhledem k tomu, že $[x]_E = T[x]_S$ jak jsme ukázali v předchozím příkladě, můžeme dosazením upravit

$$Q(x) = [x]_E^T [Q]_E [x]_E = [x]_S^T T^T [Q]_E T[x]_S = [x]_S^T [Q]_S [x]_S .$$

Odtud dostáváme $[Q]_S = T^T [Q]_E T$ nebo $[Q]_E = \left(T^T\right)^{-1} [Q]_S T^{-1}$.

Kongruentní matice a elementární kongruence

Definice:

Matice A a B se nazývají kongruentní jestliže existuje regulární matice R tak, že $A = RBR^T$.

Věta:

Je-li A reálná symetrická matice pak existuje regulární matice R tak, že $D = RAR^T$, kde D je diagonální matice.

Poznámka:

Matici R z předchozí věty můžeme nalézt pomocí tzv. *elementárních kongruencí*. Elementární kongruencí rozumíme elementární řádkovou operaci, která je bezprostředně následována stejnou sloupcovou úpravou. Elementární kongruenci můžeme zapsat v maticovém tvaru $B = TAT^T$, kde B je matice obdržená z matice A elementární kongruencí a T je matice elementární řádkové úpravy. Postupným upravováním matice elementárními kongruencemi podobně jako v případě dopředné redukce u Gaussovy eliminace můžeme převést libovolnou matici na diagonální matici. Pak $D = T_k \ldots T_1 A T_1^T \ldots T_k^T = RAR^T$, kde $T_1,\ldots,T_k$ jsou matice jednotlivých elementárních řádkových úprav a $R = T_k \ldots T_1$.

Příklad:

Pomocí elementárních kongruencí převeďte matici

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

na diagonální tvar.

Řešení:

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}+r_1\sim\underset{+s_1}{\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}+r_2\sim\underset{+s_2}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Pokud bychom chtěli určit i matici R pak bychom všechny elementární řádkové úpravy zapisovali do jednotkové matice, kterou bychom přidali za matici A podobně jako v případě LU rozkladu.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\-1&2&-1&0&1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right)+r_1\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&-1&1&1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right)+r_2\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&-1&1&1&0\\0&0&0&1&1&1\end{array}\right)$$

Pak hledanou maticí je matice

$$R=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

a diagonální matici získáme aplikací sloupcových úprav

$$D=(RA)R^T=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$ ♦

Poznámka:
Pomocí kongruencí můžeme taktéž určit diagonální tvar matice kvadratické formy a klasifikovat je. Jelikož $[Q]_E=(T^T)^{-1}[Q]_S T^{-1}$ a jelikož můžeme nalézt matici R tak, že $R[Q]_S R^T=D=[Q]_E$ získáme matici kvadratické formy v diagonálním tvaru a můžeme identifikovat matici $T^{-1}=R^T$ jejíž sloupce tvoří vektory bázi E jak již bylo popsáno na počátku.

Příklad:
Určete bázi, ve které má kvadratická forma Q na R^3 definovaná předpisem

$$Q(x)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-4x_2x_3+5x_3^2$$

diagonální tvar a formu klasifikujte.

Řešení:
Nejprve nalezneme matici kvadratické formy vzhledem ke standardní bázi. Tedy budeme dosazovat postupně vektory standardní báze do symetrické části příslušné bilineární formy

$$B_S(x,y)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2-2x_2y_3-2x_3y_2+5x_3y_3$$

$B_S(s_1^I, s_1^I) = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 0 + 5\cdot 0\cdot 0 = 1$

$B_S(s_1^I, s_2^I) = 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 1 + 5\cdot 0\cdot 0 = 1 = B_S(s_2^I, s_1^I)$

$B_S(s_1^I, s_3^I) = 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 0 + 5\cdot 0\cdot 1 = 0 = B_S(s_3^I, s_1^I)$

$B_S(s_2^I, s_2^I) = 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 1 + 5\cdot 0\cdot 0 = 2$

$B_S(s_2^I, s_3^I) = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 0 - 2\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 0 + 5\cdot 0\cdot 1 = -2 = B_S(s_3^I, s_2^I)$

$B_S(s_3^I, s_3^I) = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 0 + 5\cdot 1\cdot 1 = 5$

Matice kvadratické formy vzhledem ke standardní bázi má tedy tvar:

$$[Q]_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pomocí elementárních kongruencí nalezneme matic R a diagonální tvar kvadratické formy.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ -r_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ +2r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = (RA)R^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [Q]_E$$

Bázi E určíme ze sloupců matice $T^{-1} = R^T$, t.j.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vzhledem k bázi $E = (e_1, e_2, e_3)$ má kvadratická forma Q diagonální matici

$$[Q]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a jelikož jsou všechny diagonální prvky kladné, je forma pozitivně definitní. ♦

Poznámka:
Každou kvadratickou formu můžeme jednoznačně ztotožnit s její maticí a obdobně každá symetrická matice bude jednoznačně určovat nějakou kvadratickou formu. Z tohoto důvodu mluvíme o pozitivně resp. negativně definitní či semidefinitních maticích přičemž máme na mysli definitnosti či semidefinitnosti jejich kvadratických forem.

Choleského rozklad a řešení soustav s pozitivně definitní maticí

Věta:
Je-li A reálná pozitivně definitní matice pak existuje dolní trojúhelníková matice L a diagonální matice D tak, že $A = LDL^T$.

Poznámka:
Postup jak určit matici *L* je analogický postupu jak určit matici *R* pro kongruentní matice. Existuje totiž matice *R* tak, že $RAR^T = D$ a jelikož *A* je pozitivně definitní není potřeba zaměňovat řádky matice *A* ani přičítat násobky řádku s vyšším indexem k řádkům s indexem vyšším. Tím obdobně jako u LU rozkladu bude matice R dolní trojúhelníková. Označíme-li navíc $L = R^{-1}$ dostáváme $A = LDL^T$. Tento rozklad se taktéž nazývá *Choleského rozklad* matice A.

Příklad:
Nalezněte Choleského rozklad matice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Řešení:

Pomocí elementárních řádkových úprav nalezneme matici $(L^{-1}A)$ a L^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 4 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 16 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -r_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot 15 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -15 & 30 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right)$$

Odtud dostáváme

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 15 \end{pmatrix}, \quad D = (L^{-1}A)L^{-T} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -4 \\ 0 & 0 & 26 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 390 \end{pmatrix}.$$

Určíme ještě *L*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 15 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot \frac{1}{4} \\ \cdot \frac{1}{15} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} \end{array}\right)$$

Řešením je tedy, že $A = LDL^T$, kde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 390 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

Poznámka:
Choleského rozkladu se využívá k efektnímu řešení soustav lineárních rovnic s pozitivně definitní maticí. Soustava $Ax = b$ se pak dá přepsat do tvaru $(LDL^T)x = b$ a obdobně jako

v případě LU rozkladu přezávorkovat $L\left(D\left(L^T x\right)\right) = b$. Pak se původní soustava dá řešit ve třech krocích:

1. $Lz = b$ tzv. dopředná substituce
2. $Dy = z$
3. $L^T x = y$ tzv. zpětná substituce

Příklad:
Choleského rozkladem řešte soustavu

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 \quad &= \quad 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \quad &= \quad 0 \\ -x_2 + 2x_3 \quad &= \quad 0 \end{aligned}$$

Řešení:
Matice soustavy a vektor pravých stran má tvar:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ihned jde vidět, že matice A je totožná s maticí v zadání předchozího příkladu a proto využijeme řešení předchozího příkladu kde jsme určili Choleského rozklad.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/15 & 1/15 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 390 \end{pmatrix}.$$

Hledání Choleského rozkladu bychom však mohli zkrátit o výpočet matice L neboť k řešení soustavy nám plně postačí i její inverze tedy

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

Nyní vlastní řešení:

1. Dopředná substituce $Lz = b$. Jelikož máme k dispozici L^{-1} můžeme ji vyřešit

$$z = L^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   součinem
2. $Dy = z$. Jelikož D je diagonální matice můžeme řešení určit triviálně:

$$\begin{aligned} 4y_1 \quad &= \quad 1 \\ 60y_2 \quad &= \quad -1 \\ 390y_3 \quad &= \quad -1 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} y_1 &= 1/4 \\ y_2 &= -1/60 \\ y_3 &= -1/390 \end{aligned} \quad \text{odtud } y = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/60 \\ -1/390 \end{pmatrix}.$$

3. Zpětná substituce $L^T x = y$. Se znalostí L^{-1} řešíme opět jako součin

$$x = L^{-T} y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/60 \\ -1/390 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/26 \\ -1/13 \\ -1/26 \end{pmatrix}.$$

Řešením soustavu tedy je $x_1 = 7/26, x_2 = -1/13, x_3 = -1/26$. ♦