

Cvičení 1.

pojem matice, operace s maticemi, algebra matic.

Matice

Definice: Matice je soubor $m \times n$ reálných resp. komplexních čísel sestavených do m řádků a n sloupců. Matici zapisujeme následujícím způsobem

$$A_{m \times n} = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Poznámka: O matici A říkáme, že má rozměr $m \times n$, a prvky a_{ij} , $\forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n$.
V případě, že $m = n$, pak matici nazýváme čtvercovou řádu n .

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2.3 & \sqrt{3} \\ \frac{7}{15} & 0 & \ln(4) \end{pmatrix}$$

je matice 2×3 , s prvky $a_{11} = 1, a_{12} = -2.3, a_{13} = \sqrt{3}, a_{21} = \frac{7}{15}, a_{22} = 0, a_{23} = \ln(4)$

$$B = \begin{pmatrix} 3^2 & \frac{1}{2} \\ -1.36 & \sin(3) \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

maticí není !!!!

Příklad:

$$D = (d_{ij})_{i,j=1, \dots, n} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}, \text{ tj. } d_{ij} = 0, \text{ pro } i \neq j$$

Tuto matici nazýváme diagonální matice.

Matice

$$I = (e_{ij})_{i,j=1, \dots, n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \text{ tj. } e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pro } i = j \\ 0, & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

je speciální případ diagonální a nazýváme ji jednotková.

Matici

$$O = (o_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \text{ tj. } o_{ij} = 0, \forall i, j$$

nazýváme nulovou maticí.

Definice: Říkáme, že dvě matice jsou si rovny jestliže mají stejný počet řádků a sloupců a prvky na odpovídajících pozicích jsou si rovny.

Operace s maticemi

Definice: Necht' je dána matice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$. Pak matici $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ pro jejíž prvky platí, že $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ nazýváme maticí transponovanou k matici A a značíme ji A^T .

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2.3 & \sqrt{3} \\ \frac{7}{15} & 0 & \lg(4) \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{15} \\ -2.3 & 0 \\ \sqrt{3} & \lg(4) \end{pmatrix}, (A^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & -2.3 & \sqrt{3} \\ \frac{7}{15} & 0 & \lg(4) \end{pmatrix}$$

Věta: Pro libovolnou matici platí, že $A = (A^T)^T$

Dk: triviální ♦

Příklad:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poznámka: Matici, pro kterou platí, že $A = A^T$ nazýváme maticí symetrickou.

Příklad:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poznámka: Matici pro kterou platí, že $A = -A^T$ nazýváme maticí antisymetrickou.

Definice: Necht' je dána matice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ a číslo k reálné resp. komplexní. Pak matici

$B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ pro jejíž prvky platí, že $b_{ij} = ka_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ nazýváme součinem čísla k a matice A a značíme ji kA .

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2.3 & \sqrt{3} \\ \frac{7}{15} & 0 & \lg(4) \end{pmatrix}, -3A = \begin{pmatrix} -3 & 6.9 & -3\sqrt{3} \\ -\frac{7}{5} & 0 & -\lg(64) \end{pmatrix}$$

Poznámka: $-A = (-1)A$

Definice: Necht' jsou dány matice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ a $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$. Pak matici $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ pro jejíž prvky platí, že $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ nazýváme součet matice A a matice B a značíme ji $A + B$.

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -8 & 1 & -2 \end{pmatrix}, A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Definice: Necht' jsou dány matice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}}$ a necht' $n = p$. Pak matici $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,q}}$ pro jejíž prvky platí, že

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, q$$

nazýváme součin matice A a matice B a značíme ji AB .

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

Pozor!!! BA nelze násobit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-3) & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-3) & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + 5 \cdot (-3) & 2 \cdot 0 + 5 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 6 & -9 & 6 \\ 12 & -17 & 10 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-2) + (-3) \cdot 3 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, CD = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}, DC = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Poznámka: Z předchozího příkladu je vidět, že obecně neplatí vztah $AB=BA$. Matice, pro které toto platí nazýváme záměnné.

Vlastnosti maticových operací

Věta: Necht' jsou dány libovolné matice A, B, C a libovolná reálná resp. komplexní čísla k, h . Pokud níže uvedené maticové operace mají smysl pak platí

1. $0A = O$
2. $1A = A$
3. $(k+h)A = kA + hA$

4. $k(A+B) = kA+kB$
5. $(kh)A = k(hA)$
6. $(kA)^T = kA^T$
7. $A+B = B+A$
8. $A+(B+C) = (A+B)+C$
9. $A+O = O+A = A$
10. $A+(-A) = (-A)+A = O$
11. $(A+B)^T = A^T + B^T$
12. $AI = A, IB = B$
13. $AO = O, OB = O$
14. $A(BC) = (AB)C$
15. $A(B+C) = AB+AC$
16. $(A+B)C = AC+BC$
17. $(AB)^T = B^T A^T$

Dk:

$$14. \quad A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), C=(c_{ij})$$

$$G=BC=(g_{ij}), g_{ij} = \sum_k b_{ik} c_{kj}, H=AB=(h_{ij}), h_{ij} = \sum_l a_{il} b_{lj}$$

$$P=AG=A(BC)=(p_{ij}), p_{ij} = \sum_l a_{il} g_{lj} = \sum_l a_{il} \sum_k b_{lk} c_{kj} = \sum_l \sum_k a_{il} b_{lk} c_{kj}$$

$$Q=HC=(AB)C=(q_{ij}), q_{ij} = \sum_k h_{ik} c_{kj} = \sum_k \left(\sum_l a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_k \sum_l a_{il} b_{lk} c_{kj}$$

tedy $P=Q$.

$$17. \quad A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), C=A^T, c_{ij} = a_{ji}, D=B^T, d_{ij} = b_{ji}$$

$$G=AB=(g_{ij}), g_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}, H=G^T=(AB)^T=(h_{ij}), h_{ij} = g_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki}$$

$$P=DC=B^T A^T=(p_{ij}), p_{ij} = \sum_k d_{ik} c_{kj} = \sum_k b_{ki} a_{jk}$$

tedy $H=P$. ♦