6. Dimenze a řešení soustav

Dimenze a řešení soustav

1. Dimenze vektorového prostoru
2. Dimenze a vyjádření vektoru jako lineární kombinace
3. Řádkový prostor a řádková hodnost
4. Sloupcová hodnost matice
5. Hodnost a řešitelnost soustav
6. Hodnost a regularita
7. Hodnost matice a počítačová aritmetika

6.1 Dimenze vektorového prostoru

VĚTA 1
Nechť $\mathcal{V} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$, vektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ tvoří bázi prostoru $\mathcal{V}$ a nechť $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$ jsou nezávislé vektory prostoru $\mathcal{V}$. Pak $m \leq n$.

Z věty ihned plyne, že má-li nějaký vektorový prostor $\mathcal{V}$ bázi, pak počet vektorů této báze je maximálním počtem nezávislých vektorů prostoru $\mathcal{V}$ a *počet vektorů v různých bázích téhož vektorového prostoru je stejný*.

6.1 Dimenze vektorového prostoru

DEFINICE 1

Maximální počet nezávislých vektorů vektorového prostoru $\mathcal{V}$ nazýváme *dimenzí* prostoru $\mathcal{V}$ a značíme ji $\dim \mathcal{V}$. Má-li vektorový prostor bázi, je jeho dimenze rovna počtu vektorů báze a mluvíme o *konečněrozměrném prostoru*. Podle naší definice platí $\dim\{\mathbf{o}\} = 0$. Nemá-li nenulový vektorový prostor bázi, mluvíme o *nekonečněrozměrném prostoru*.

6.2 Dimenze a vyjádření vektoru jako lineární kombinace

VĚTA 2

Nechť $\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ jsou vektory vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Označme $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$. Pak platí následující tvrzení:

1. Vektor $\mathbf{b}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, právě když
$$\dim \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle = \dim \langle \mathcal{A} \rangle \qquad (*)$$
2. Jestliže platí (*) a $\mathcal{A}$ je nezávislá množina vektorů, pak lze vektor $\mathbf{b}$ vyjádřit jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$.
3. Jestliže platí (*) a $\mathcal{A}$ je závislá množina vektorů, pak lze vektor $\mathbf{b}$ vyjádřit nekonečně mnoha způsoby jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$. V této kombinaci lze zvolit některých $d = k - \dim \langle \mathcal{A} \rangle$ koeficientů libovolně.

6.2 Dimenze a vyjádření vektoru jako lineární kombinace

Věta obsahuje odpověď na otázku, kdy má soustava lineárních rovnic řešení, kdy má jediné řešení a kdy má nekonečně mnoho řešení, a to v termínech dimenze lineárních obalů sloupců matice soustavy a pravé strany. Stačí si za vektory $\mathbf{a}_i$ dosadit sloupce $\mathbf{s}_i^{\mathbf{A}}$ matice soustavy $\mathbf{A}$ a za $\mathbf{b}$ dosadit vektor pravé strany.

6.3 Řádkový prostor a řádková hodnost

DEFINICE 2
Lineární obal $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \left\langle \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}, \dots, \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}} \right\rangle$ řádků $\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}$ dané matice **A** typu (m, n) nazýváme *řádkovým prostorem matice* **A**. Dimenze $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ se nazývá *řádková hodnost* matice **A**

VĚTA 3
Nechť matice **A** a **B** jsou řádkově ekvivalentní. Pak $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$

Řádková hodnost matice **A** se elementárními řádkovými operacemi nemění a snadno ji určíme ze schodového tvaru matice **A**, neboť počet nenulových řádků matice ve schodovém či normovaném schodovém tvaru je zřejmě roven její řádkové hodnosti.

6.3 Řádkový prostor a řádková hodnost

Příklad 1 Určete řádkovou hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Řešení: Elementárními řádkovými úpravami dostaneme postupně

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{r}_1 \\ \\ \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\mathrm{r}_2 \end{matrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} +\mathrm{r}_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Řádková hodnost matice **A** je tedy rovna dvěma.

6.4 Sloupcová hodnost matice

DEFINICE 3
Lineární obal $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \left\langle \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \ldots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}} \right\rangle$ sloupců dané matice $\mathbf{A}$ typu (m, n) se nazývá *sloupcový prostor* matice $\mathbf{A}$. Dimenze $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ se nazývá *sloupcová hodnost* matice $\mathbf{A}$.

PŘÍKLAD 2 Srovnejme sloupcové prostory matice $\mathbf{A}$ a matice $\mathbf{B}$ z příkladu 1, které jsou řádkově ekvivalentní:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sloupcové prostory obou matic jsou různé, neboť například $\mathbf{s}_2^{\mathbf{A}} \notin \mathcal{S}(\mathbf{B})$.

6.4 Sloupcová hodnost matice

VĚTA 4

Nechť matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou řádkově ekvivalentní. Pak

$$\dim \mathcal{S}(\mathbf{A}) = \dim \mathcal{S}(\mathbf{B}).$$

6.4 Sloupcová hodnost matice

U matice ve schodovém tvaru je báze tvořena sloupci obsahujícími vedoucí prvky řádků a sloupce matice **A** s týmiž indexy tvoří pak bázi $\mathcal{S}(\mathbf{A})$.

PŘÍKLAD 3 Báze sloupcového prostoru matice **B** z příkladu 1 je tvořena sloupci

$$\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

První dva sloupce

$$\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

matice **A** proto tvoří bázi $\mathcal{S}(\mathbf{A})$, neboť **A** a **B** jsou řádkově ekvivalentní.

6.5 Hodnost a řešitelnost soustav

Z vět 3 a 4 je zřejmá rovnost řádkové a sloupcové hodnosti. Budeme proto mluvit stručně o *hodnosti matice* a budeme ji značit $h(\mathbf{A})$.

VĚTA 5 (FROBENIOVA)

Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu (m, n) a nechť $\mathbf{b}$ je m-rozměrný sloupcový vektor. Potom platí následující tvrzení:

1. Soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení, právě když
$$h(\mathbf{A}) = h\big([\mathbf{A}|\mathbf{b}]\big) \qquad (**)$$
2. Jestliže platí $(**)$ a $h(\mathbf{A}) = n$, potom má soustava jediné řešení.
3. Jestliže platí $(**)$ a $h(\mathbf{A}) < n$, potom má soustava nekonečně mnoho řešení. V řešení lze zvolit některých $d = n - h(\mathbf{A})$ složek libovolně.

6.6 Hodnost a regularita

VĚTA 6

Čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n je regulární, právě když

$$h(\mathbf{A}) = n.$$

6.7 Hodnost matice a počítačová aritmetika

Pojem hodnosti předpokládá přesnou aritmetiku, neboť nepatrná změna matice může způsobit změnu její hodnosti.

PŘÍKLAD 4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-99} & 10^{-99} \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-98} & 10^{-99} \end{bmatrix}$$

Matice se liší jen velmi málo, avšak $h(\mathbf{A}) = 1$ a $h(\mathbf{B}) = 2$

Pokud jsou koeficienty matice výsledkem měření, nemá proto často vůbec smysl hovořit o hodnosti matice. Pro takové aplikace, stejně jako pro počítačové řešení soustav, byla proto vypracována teorie založená na jiných pojmech, se kterou se seznámíme později.