

---

# 5. Lineární nezávislost a báze

# Lineární nezávislost a báze

---

1. Závislé a nezávislé vektory
2. Lineární kombinace a závislost
3. Postačující podmínky pro nezávislost funkcí
4. Báze vektorového prostoru
5. Souřadnice vektoru
6. Použití souřadnic

# 5.1 Závislé a nezávislé vektory

## DEFINICE 1

Neprázdňá konečňá množina vektorů  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  vektorového prostoru  $\mathcal{V}$  je (*lineárně*) *nezávislá*, jestliže rovnice

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \quad (*)$$

má jediné řešení

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Jestliže  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  je (*lineárně*) *nezávislá*, říkáme také, že vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  jsou (*lineárně*) *nezávislé*. Má-li rovnice (\*) i jiné řešení, pak říkáme, že  $\mathcal{S}$  je (*lineárně*) *závislá* a vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  jsou (*lineárně*) *závislé*.

# 5.1 Závislé a nezávislé vektory

---

**PŘÍKLAD 1** Jestliže  $\mathbf{v}_1 = [2, -1, 0]$ ,  $\mathbf{v}_2 = [1, 2, 5]$  a  $\mathbf{v}_3 = [7, -1, 5]$ , pak množina vektorů  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  je lineárně závislá, neboť  $3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ .

**PŘÍKLAD 2** Mnohočleny  $p_1(x) = 1 - x$ ,  $p_2(x) = 5 + 3x - 2x^2$  a  $p_3(x) = 1 + 3x - x^2$  tvoří lineárně závislou množinu v  $\mathcal{P}_3$ , neboť pro každé  $x \in \mathbb{R}$  platí  $3p_1(x) - p_2(x) + 2p_3(x) = 0$ , tj.  $3p_1 - p_2 + 2p_3 = 0$ .

**PŘÍKLAD 3** Vektory  $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]$ ,  $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]$  a  $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]$  tvoří lineárně nezávislou množinu reálných třírozměrných aritmetických vektorů, neboť  $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$  pouze pro  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ .

## 5.2 Lineární kombinace a závislost

### DEFINICE 2

Vektor  $\mathbf{v}$  z vektorového prostoru  $\mathcal{V}$  budeme nazývat *lineární kombinací* vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathcal{V}$ , jestliže existují skaláry  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tak, že

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k.$$

**PŘÍKLAD 4** Mnohočlen  $p_1(x) = x$  z vektorového prostoru  $\mathcal{P}_2$  všech lineárních reálných mnohočlenů je lineární kombinací mnohočlenů  $p_2(x) = x + 1$  a  $p_3(x) = x + 2$ , neboť pro libovolné reálné  $x$  platí

$$p_1(x) = x = 2(x + 1) - (x + 2) = 2p_2(x) - p_3(x),$$

takže  $p_1 = 2p_2 - p_3$ .

## 5.2 Lineární kombinace a závislost

### VĚTA 1

Konečná množina nenulových vektorů  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  je lineárně závislá, právě když existuje  $k \geq 2$  tak, že vektor  $\mathbf{v}_k$  je lineární kombinací vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$ .

DŮKAZ: Necht'  $\mathcal{S}$  je množina nenulových lineárně závislých vektorů. Uvažujme množiny

$\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{v}_1\}$ ,  $\mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ,  $\dots$ ,  $\mathcal{S}_m = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  a necht'  $\mathcal{S}_k$  je nejmenší množina vektorů, které jsou lineárně závislé, takže platí

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \quad (**)$$

a některý z koeficientů  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  je nenulový. Pak  $k \geq 2$ , neboť  $\mathcal{S}_1$  je zřejmě nezávislá množina vektorů, a  $\alpha_k \neq 0$ , neboť jinak by  $\mathcal{S}_{k-1}$  byla lineárně závislá.

## 5.2 Lineární kombinace a závislost

---

DŮKAZ: *Pokračování*

Rovnici (\*\*) můžeme tedy upravit pomocí axiomů vektorového prostoru na tvar

$$\mathbf{v}_k = \left( \frac{-\alpha_1}{\alpha_k} \right) \mathbf{v}_1 + \cdots + \left( \frac{-\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \right) \mathbf{v}_{k-1}.$$

Obráceně, jestliže pro  $2 \leq k \leq m$  platí

$$\mathbf{v}_k = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \mathbf{v}_{k-1},$$

pak

$$-(\alpha_1 \mathbf{v}_1) - \cdots - (\alpha_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}) + 1\mathbf{v}_k + 0\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + 0\mathbf{v}_m = \mathbf{o},$$

takže  $\mathcal{S}_m$  je lineárně závislá, neboť koeficient 1 u  $\mathbf{v}_k$  je nenulový.

## 5.3 Postačující podmínky pro nezávislost funkcí

---

Necht'  $\mathcal{S} = \{f_1, \dots, f_k\}$  je konečná množina reálných funkcí vektorového prostoru  $\mathcal{F}$ .  $\mathcal{S}$  je nezávislá právě tehdy, když z

$$\alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_k f_k(x) = 0$$

pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  plyne, že  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ .

Dosadíme-li za  $x$  postupně různá čísla  $x_1, \dots, x_k$ , dostaneme soustavu  $k$  lineárních rovnic o  $k$  neznámých  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  ve tvaru:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 f_1(x_1) & + & \dots & + & \alpha_k f_k(x_1) & = & 0 \\ \vdots & & \dots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 f_1(x_k) & + & \dots & + & \alpha_k f_k(x_k) & = & 0 \end{array}$$

Pokud má tato soustava regulární matici, plyne odsud, že  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$  a  $\mathcal{S}$  je nezávislá množina.



## 5.3 Postačující podmínky pro nezávislost funkcí

**PŘÍKLAD 5** Rozhodněte, zda jsou mocniny  $x$ ,  $x^2$  a  $x^3$  lineárně nezávislé.

**ŘEŠENÍ:** Zvolíme si body  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  a  $x_3 = 3$ , které postupně dosadíme do funkcí  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = x^2$ ,  $f_3(x) = x^3$ , a vytvoříme

soustavu:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 + 9\alpha_2 + 27\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Matici této soustavy převedeme na schodový tvar. Dostaneme

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -2r_1 \\ -3r_1 \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 24 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ -3r_2 \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Matice soustavy je regulární, takže soustava má jen nulové řešení  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Funkce  $x$ ,  $x^2$  a  $x^3$  jsou tedy lineárně nezávislé.

# 5.4 Báze vektorového prostoru

## DEFINICE 3

Konečná množina  $\mathcal{E}$  vektorů vektorového prostoru  $\mathcal{V}$  je *báze vektorového prostoru  $\mathcal{V}$* , jestliže

- $\mathcal{E}$  je nezávislá.
- Každý vektor  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů  $\mathcal{E}$ .

Ne každý vektorový prostor má bázi ve smyslu naší definice. Například neexistuje žádná konečná množina reálných funkcí, jejichž lineární kombinací by bylo možno vyjádřit libovolnou reálnou funkci.

## 5.4 Báze vektorového prostoru

---

**PŘÍKLAD 6** Vektory  $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]$ ,  $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]$ ,  $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]$  tvoří bázi  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ . Jakýkoli vektor  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$  tohoto prostoru lze vyjádřit ve tvaru  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ . Báze  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  je zvláštním případem *standardní báze*  $\mathbb{R}^n$ , která je tvořena řádky či sloupci jednotkové matice  $\mathbf{I}_n$ .

**PŘÍKLAD 7** Mnohočleny  $p_1(x) = 1$  a  $p_2(x) = x$  tvoří bázi vektorového prostoru  $\mathcal{P}_2$ . Každý mnohočlen  $p(x) = a_0 + a_1x$  lze zapsat ve tvaru  $p = a_0p_1 + a_1p_2$ . Mnohočleny zde považujeme za reálné funkce definované na celé reálné ose. Nechť  $a_0p_1 + a_1p_2 = 0$ , tj.  $a_0 + a_1x = 0$  pro všechna  $x$ . Pro  $x = 0$  dostáváme  $a_0 + a_1 \cdot 0 = 0$ , odkud  $a_0 = 0$ , a pro  $x = 1$  pak z  $a_1 \cdot 1 = 0$  dostaneme  $a_1 = 0$ , takže  $p_1$  a  $p_2$  jsou nezávislé.

# 5.5 Souřadnice vektoru

## DEFINICE 4

Nechť  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  je uspořádaná báze vektorů vektorového prostoru  $\mathcal{V}$ . Nechť  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ . Potom čísla  $v_1, \dots, v_n$ , pro která platí

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + \dots + v_n \mathbf{e}_n,$$

nazýváme *souřadnice vektoru  $\mathbf{v}$  v bázi  $\mathcal{E}$* .

## VĚTA 2

Nechť  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  je uspořádaná báze vektorového prostoru  $\mathcal{V}$  a nechť  $x_1, \dots, x_n$  a  $y_1, \dots, y_n$  jsou souřadnice vektoru  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  v bázi  $\mathcal{E}$ . Pak  $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$ .

## 5.5 Souřadnice vektoru

---

Souřadnice každého vektoru  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  jsou v dané bázi  $\mathcal{E}$  určeny jednoznačně. Budeme je zapisovat také do aritmetického vektoru, který se nazývá *souřadnicový vektor* a značí se  $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$ .

**PŘÍKLAD 8** Libovolný aritmetický vektor  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$  má ve standardní bázi  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  z příkladu 6 souřadnice  $v_1, v_2, v_3$ , neboť

$$[v_1, v_2, v_3] = v_1[1, 0, 0] + v_2[0, 1, 0] + v_3[0, 0, 1].$$

Jeho souřadnicový vektor je  $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = [v_1, v_2, v_3]$ .

**PŘÍKLAD 9** Mnohočlen  $p(x) = x + 2$  má v bázi  $\mathcal{P} = (p_1, p_2)$  z příkladu 7, kde  $p_1(x) = 1$  a  $p_2(x) = x$ , souřadnice 2, 1, neboť

$$p(x) = x + 2 = 2p_1(x) + 1p_2(x).$$

Jeho souřadnicový vektor je  $[\mathbf{p}]_{\mathcal{P}} = [2, 1]$ .

## 5.6 Použití souřadnic

---

Pomocí souřadnic můžeme převést úlohy s vektory, které lze popsat pomocí lineárních kombinací bázových vektorů daného vektorového prostoru, na úlohy s aritmetickými vektory. K tomu použijeme zobrazení

$$\mathcal{V} \ni \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^n$$

**LEMMA 1** Pro libovolné vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$  a skalár  $\alpha$  platí

1.  $[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}} + [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$
2.  $[\alpha\mathbf{u}]_{\mathcal{E}} = \alpha[\mathbf{u}]_{\mathcal{E}}$

## 5.6 Použití souřadnic

---

Při řešení úloh s lineárními kombinacemi vektorů, například máme-li vyjádřit nějaký vektor jako lineární kombinaci jiných vektorů nebo máme-li rozhodnout, zda je nějaká množina vektorů nezávislá, postupujeme následovně:

- Zvolíme si takovou bázi  $\mathcal{E}$  daného vektorového prostoru, ve které lze všechny vektory snadno vyjádřit.
- Najdeme souřadnicové vektory všech vektorů, které se vyskytují v popisu problému.
- Řešíme úlohu, kterou dostaneme z původní úlohy záměnou všech vektorů za souřadnicové vektory.

Postup ovšem předpokládá, že máme k dispozici vhodnou bázi, což nemusí být vždycky splněno.

# 5.6 Použití souřadnic

**PŘÍKLAD 10** Najděte souřadnice mnohočlenu  $p(x) = x^2 - 1$  v bázi  $\mathcal{P} = (p_1, p_2, p_3)$ , kde  $p_1(x) = 1$ ,  $p_2(x) = x + 1$ ,  $p_3(x) = x^2 + x + 1$ .

ŘEŠENÍ:

■ Zvolíme si bázi  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , kde  $e_1(x) = 1$ ,  $e_2(x) = x$ ,  $e_3(x) = x^2$ .

■ Najdeme souřadnice vektorů  $p, p_1, p_2, p_3$  v bázi  $\mathcal{E}$ . Dostaneme

$$[p]_{\mathcal{E}} = [-1, 0, 1], [p_1]_{\mathcal{E}} = [1, 0, 0], [p_2]_{\mathcal{E}} = [1, 1, 0], [p_3]_{\mathcal{E}} = [1, 1, 1].$$

■ Řešíme soustavu  $[p]_{\mathcal{E}} = \alpha_1 [p_1]_{\mathcal{E}} + \alpha_2 [p_2]_{\mathcal{E}} + \alpha_3 [p_3]_{\mathcal{E}}$ .

Rozepsáním této rovnice po složkách dostaneme soustavu

$$\begin{array}{rcccc} -1 & = & \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 \\ 0 & = & & & \alpha_2 & + & \alpha_3 \\ 1 & = & & & & & \alpha_3 \end{array}$$

která má řešení  $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 1$ .

Snadno ověříme, že opravdu platí  $p = -p_1 - p_2 + p_3$ .



# 5.6 Použití souřadnic

**PŘÍKLAD 11** Rozhodněte, zda jsou mnohočleny  $p_1(x) = x^2 + x + 1$ ,  $p_2(x) = x^2 + 2x + 1$ ,  $p_3(x) = x^2 + x + 2$  závislé nebo nezávislé.

ŘEŠENÍ:

■ Zvolíme si bázi  $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , kde  $e_1(x) = 1$ ,  $e_2(x) = x$ ,  $e_3(x) = x^2$ .

■ Najdeme souřadnice vektorů  $p, p_1, p_2, p_3$  v bázi  $\mathcal{E}$ . Dostaneme

$$[p_1]_{\mathcal{E}} = [1, 1, 1], [p_2]_{\mathcal{E}} = [1, 2, 1], [p_3]_{\mathcal{E}} = [2, 1, 1].$$

■ Řešíme soustavu  $\alpha_1 [p_1]_{\mathcal{E}} + \alpha_2 [p_2]_{\mathcal{E}} + \alpha_3 [p_3]_{\mathcal{E}} = \mathbf{0}$ .

Rozepsáním po složkách dostaneme soustavu:

$$\begin{array}{rccccrcr} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\text{Řešíme: } \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} -r_1 \\ -r_1 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right].$$

Odtud vidíme, že soustava má jediné řešení  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = 0$ .

Mnohočleny  $p_1, p_2, p_3$  jsou tedy lineárně nezávislé.