3. Inverzní matice

Inverzní matice

1. Maticový zápis elementárních úprav
2. Inverzní matice
3. Elementární úpravy a regularita
4. Výpočet inverzní matice
5. Inverzní matice a řešení soustav
6. Vyčíslení výrazů s inverzní maticí
7. Použití inverzní matice

3.1 Maticový zápis elementárních úprav

Násobení maticí zleva lze popsat jako manipulaci s řádky násobené matice.

Pro $\mathbf{T} = [t_{ij}]$ a $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ řádu dvě platí

$$\mathbf{TA} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}\mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} & + & t_{12}\mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ t_{21}\mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} & + & t_{22}\mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \end{bmatrix}$$

Například matice $\mathbf{T}$ provede výměnu 1. a 2. řádku násobením $\mathbf{A}' = \mathbf{TA}$.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jestliže $\mathbf{A}' = \mathbf{TA}$ vznikne z $\mathbf{A}$ nějakou pevně zvolenou elementární transformací, pak také $\mathbf{I}' = \mathbf{TI} = \mathbf{T}$ vznikne z jednotkové matice $\mathbf{I}$ toutéž transformací.

3.1 Maticový zápis elementárních úprav

Výměna i-tého a j-tého řádku (*elementární permutační matice*).

$$
\mathbf{I} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \mathrm{r}_j \\ \\ \mathrm{r}_i \\ \\ \\ \end{array} \mapsto
$$

$$
\mapsto \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix} = \mathbf{P}_{ij}
$$

3.1 Maticový zápis elementárních úprav

Násobení i-tého řádku nenulovým číslem α.

$$\mathbf{I} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \cdot \alpha \end{array} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \alpha & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \mathbf{M}_i(\alpha)$$

3.1 Maticový zápis elementárních úprav

Přičtení násobku i-tého řádku k j-tému řádku.

$$
\mathbf{I} = \begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \\
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix} &
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ +\alpha\mathrm{r}_i \\ \\ \\ \end{array}
\end{array} \mapsto
$$

$$
\mapsto \begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & \alpha & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix}
\end{array} = \mathbf{G}_{ij}(\alpha)
$$

3.1 Maticový zápis elementárních úprav

PŘÍKLAD 1

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{rr} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{array}\right]\end{array}\!\!\begin{array}{l}\mathrm{r}_2\\ \mathrm{r}_1\end{array} \mapsto \left[\begin{array}{rr} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{array}\right], \quad P_{12} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rr} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{array}\right]_{\cdot\frac{1}{2}} \mapsto \left[\begin{array}{rr} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right], \quad M_2\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rr} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{array}\right]_{+\frac{1}{2}\mathrm{r}_1} \mapsto \left[\begin{array}{lr} 2 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right], \quad G_{12}\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

3.2 Inverzní matice

DEFINICE 1
Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice. Jestliže existuje matice $\mathbf{B}$ tak, že

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I},$$

pak se matice $\mathbf{B}$ nazývá *inverzní maticí* k matici $\mathbf{A}$ a značí se $\mathbf{A}^{-1}$. Čtvercová matice, ke které existuje inverzní matice, se nazývá *regulární*. V opačném případě takovou matici nazýváme *singulární*.

VĚTA 1
Ke každé regulární matici $\mathbf{A}$ existuje právě jedna inverzní matice.

3.2 Inverzní matice

DŮKAZ: Nechť $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ jsou inverzní matice k matici **A**, takže platí

$$\mathbf{A}\mathbf{B}_1 = \mathbf{I} \quad \text{a} \quad \mathbf{B}_2\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Vynásobíme-li první rovnost zleva maticí B_2 a druhou rovnici zprava B_1, dostaneme

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_2\mathbf{A}\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1.$$

LEMMA 1 Má-li matice **A** nulový řádek pak je singulární.

DŮKAZ:Je-li **B** libovolná matice, pak platí

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} . & \cdots & . \\ 0 & \cdots & 0 \\ . & \cdots & . \end{bmatrix} \neq \mathbf{I}.$$

3.3 Elementární úpravy a regularita

VĚTA 2
Jsou-li matice **A**, **B** regulární, potom je také matice **AB** regulární a platí

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

DŮKAZ: $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} =$
$= \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB})$.

Uvedený vztah lze pomocí matematické indukce zobecnit na

$$(\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_k)^{-1} = \mathbf{A}_k^{-1} \cdots \mathbf{A}_1^{-1}.$$

3.3 Elementární úpravy a regularita

LEMMA 2 Matice elementárních úprav jsou regulární a platí:

1. $\mathbf{P}_{ij}^{-1} = \mathbf{P}_{ij}$,
2. $\mathbf{M}_i^{-1}(\alpha) = \mathbf{M}_i(\alpha^{-1})$ pro $\alpha \neq 0$
3. $\mathbf{G}_{ij}^{-1}(\alpha) = \mathbf{G}_{ij}(-\alpha)$

VĚTA 3
Elementární řádkové úpravy zachovávají regularitu upravované matice.

DŮKAZ: Jestliže matice $\mathbf{A}'$ vznikne z regulární matice $\mathbf{A}$ elementárními řádkovými úpravami, pak

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{A}, \\ \text{a} \quad \left(\mathbf{A}'\right)^{-1} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{T}_1^{-1} \cdots \mathbf{T}_k^{-1}, \end{aligned}$$

tedy $\mathbf{A}'$ je regulární.

3.4 Výpočet inverzní matice

VĚTA 4
Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Pak rovnice

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I} \qquad (*)$$

má jediné řešení $\mathbf{X}$ právě tehdy, když $\mathbf{A}$ je regulární. V tom případě platí $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$.

DŮKAZ: Jestliže $\mathbf{A}$ je regulární, pak přenásobením obou stran (*) zleva maticí $\mathbf{A}^{-1}$ dostaneme $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$.
Obráceně, jestliže rovnice $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}$ má jediné řešení, pak rozšířenou matici $\left[\mathbf{A}|\mathbf{I}\right]$ je možno pomocí ekvivalentních řádkových úprav převést na tvar $\left[\mathbf{I}|\mathbf{B}\right]$.

3.4 Výpočet inverzní matice

Potom existují elementární matice transformací $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_k$ tak, že pro matici $\mathbf{T} = \mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1$ platí

$$\mathbf{T}\big[\mathbf{A}|\mathbf{I}\big] = \big[\mathbf{I}|\mathbf{B}\big].$$

Roznásobíme-li matice vlevo, dostaneme porovnáním obou částí rozšířené matice

$$\mathbf{TA} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{B},$$

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

Jelikož matice $\big[\mathbf{I}|\mathbf{B}\big]$ vznikla z $\big[\mathbf{A}|\mathbf{I}\big]$ ekvivalentními řádkovými úpravami, má (*) jediné řešení $\mathbf{X}$, které je řešením soustavy

$$\mathbf{IX} = \mathbf{B},$$

tedy $\mathbf{X} = \mathbf{B}$ a $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.

3.4 Výpočet inverzní matice

PŘÍKLAD 2 Vypočtěte $\mathbf{A}^{-1}$ pokud existuje.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ŘEŠENÍ: Postupnou úpravou rozšířené matice pro soustavu $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ dostaneme

$$\left[\mathbf{A}|\mathbf{I}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]_{+\frac{1}{2}\mathrm{r}_1} \mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]^{+\frac{2}{3}\mathrm{r}_2} \mapsto$$

$$\mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l}\cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{2}{3}\end{array} \mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] = \left[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}\right].$$

Matice $\mathbf{A}$ je tedy regulární a platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.5 Řešení soustav a inverzní matice

VĚTA 5
Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice a nechť $\mathbf{b}$ je sloupcový vektor stejného řádu. Pak má soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

DŮKAZ: Nechť $\mathbf{A}$ je daná regulární matice.
Vynásobíme-li soustavu

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

maticí $\mathbf{A}^{-1}$ zleva, dostaneme

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

3.5 Řešení soustav a inverzní matice

PŘÍKLAD 3 Pomocí inverzní matice najděte řešení soustavy

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

ŘEŠENÍ: Soustavu lze zapsat maticově ve tvaru

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

S využitím výsledku předchozího příkladu dostaneme

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

3.6 Vyčíslení výrazů s inverzní maticí

PŘÍKLAD 4 Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vyčíslete $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{b}$

ŘEŠENÍ: Nejprve vypočteme vektor

$$\mathbf{c} = \mathbf{B}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Vektor $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$ je jediným řešením rovnice $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}$, kterou vyřešíme Gaussovou eliminací

$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 7 \end{array}\right]_{+\mathrm{r}_1} \mapsto \left[\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 10 \end{array}\right],$$

odkud $x_1 = \frac{13}{2}, x_2 = 10$. Tedy

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{13}{2} \\ 10 \end{bmatrix}.$$

3.7 Použití inverzní matice

- K nalezení inverzní matice je zapotřebí asi n^3 operací násobení.
  - Nevyplatí se řešit jednu soustavu pomocí inverzní matice.
  - Může být výhodné řešit soustavy s více pravými stranami pomocí inverzní matice (řešení pro každou pravou stranou pak vyžaduje asi n^2 násobení.
- Inverzní matice je spíše teoretický prostředek.