2. Úpravy a řešení soustav lineárních rovnic

Úpravy a řešení soustav lineárních rovnic

1. Soustava lineárních rovnic
2. Ekvivalentní úpravy
3. Maticový zápis
4. Úprava na schodový tvar
5. Zpětná substituce
6. Gaussova eliminace
7. Gaussova-Jordanova metoda
8. Pracnost řešení

2.1 Soustava lineárních rovnic

DEFINICE 1

Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, \ldots, x_n$ nazýváme množinu rovnic ve tvaru:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ldots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad (S)$$

Čísla $a_{ij},\ i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ nazýváme koeficienty soustavy a $b_i,\ i = 1, \ldots, m$ nazýváme pravé strany.

2.1 Soustava lineárních rovnic

PŘÍKLAD 1 Soustava z příkladu III z úvodní přednášky:

$$\begin{array}{rrrrrcl} 2u_1 & -u_2 & & & & = & 0.1112 \\ -u_1 & +2u_2 & -u_3 & & & = & 0.1112 \\ & -u_2 & +2u_3 & -u_4 & & = & 0.1112 \\ & & -u_3 & +2u_4 & -u_5 & = & 0.1112 \\ & & & -u_4 & +2u_5 & = & 0.1112 \end{array}$$

Jedná se o soustavu 5 rovnic o 5 neznámých $u_1, \ldots, u_5$, kde

$$\begin{array}{llllll} a_{11} = 2, & a_{12} = -1, & a_{13} = 0, & a_{14} = 0, & a_{15} = 0, & b_1 = 0.1112 \\ a_{21} = -1, & a_{22} = 2, & a_{23} = -1, & a_{24} = 0, & a_{25} = 0, & b_2 = 0.1112 \\ a_{31} = 0, & a_{32} = -1, & a_{33} = 2, & a_{34} = -1, & a_{35} = 0, & b_3 = 0.1112 \\ a_{41} = 0, & a_{42} = 0, & a_{43} = -1, & a_{44} = 2, & a_{45} = -1, & b_4 = 0.1112 \\ a_{51} = 0, & a_{52} = 0, & a_{53} = 0, & a_{54} = -1, & a_{55} = 2, & b_5 = 0.1112 \end{array}$$

2.2 Ekvivalentní úpravy

Základní myšlenka řešení soustavy lineárních rovnic spočívá v nahrazení dané soustavy jinou soustavou, která má stejné řešení a je jednodušší.

DEFINICE 2

Ekvivalentními úpravami soustavy lineárních rovnic nazýváme následující úpravy:

E1 Vzájemná výměna libovolných dvou rovnic soustavy,

E2 Násobení obou stran některé rovnice soustavy nenulovým číslem,

E3 Přičtení násobku některé rovnice soustavy k jiné rovnici.

2.2 Ekvivalentní úpravy

Ekvivalentní úpravy mají tu vlastnost, že jejich pomocí můžeme z upravené soustavy získat zpět původní soustavu.

- Jestliže soustava S' vznikla ze soustavy S vzájemnou výměnou i-té a j-té rovnice podle pravidla E1, pak tatáž úprava použitá na S' nás přivede zpět k S.
- Jestliže soustava S' vznikla ze soustavy S násobením i-tého řádku nenulovým číslem α podle pravidla E2, pak násobením téhož řádku soustavy S' číslem $\frac{1}{\alpha}$ obdržíme zpátky soustavu S.
- Jestliže soustava S' vznikla ze soustavy S přičtením α-násobku i-té rovnice k j-té rovnici $(i \neq j)$, pak přičtení $(-\alpha)$-násobku i-té rovnice soustavy S' k j-té rovnici soustavy S' vede opět k S.

2.2 Ekvivalentní úpravy

Dvě soustavy lineárních rovnic nazýváme *ekvivalentní soustavy*, jestliže jednu z nich lze získat z druhé ekvivalentními úpravami.

VĚTA 1
Jsou-li dvě soustavy lineárních rovnic ekvivalentní, potom mají stejné řešení.

PŘÍKLAD 2

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= 0 && (1) \\ x_1 - 3x_2 &= -10 && (2) \end{aligned}$$

Vhodná úprava soustavy je například vynásobení (2) dvěma, podle pravidla **E2**, a přičtení (1) k upravené (2), v souladu s pravidlem **E3**. Upravená soustava bude mít tvar

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= 0 && (3) \\ -5x_2 &= -20 && (4) \end{aligned}$$

Z rovnice (4) vypočteme $x_2 = 4$ a po dosazení do rovnice (3) dostaneme $-2x_1 + 4 = 0$ odkud $x_1 = 2$.

2.3 Maticový zápis

Soustavu (S) budeme úsporně zapisovat do tabulky

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

kterou nazýváme *rozšířená matice soustavy* (S). Matici $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

nazýváme *maticí soustavy* (S) a *pravou stranou soustavy* (S) .

Pokud vektor $\mathbf{x}$ má za složky neznámé $x_1, \dots, x_n$ můžeme soustavu zapsat v maticové podobě $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

2.3 Maticový zápis

Ekvivalentním úpravám soustavy rovnic odpovídají operace s řádky rozšířené matice soustavy, které nazýváme *elementární (řádkové) operace*:

(e1) Vzájemná výměna libovolných dvou řádků.

(e2) Násobení některého řádku nenulovým číslem.

(e3) Přičtení násobku některého řádku k jinému řádku.

Máme-li dvě matice, z nichž jedna vznikla z druhé pomocí elementárních řádkových operací, říkáme, že matice jsou *řádkově ekvivalentní*.

2.3 Maticový zápis

VĚTA 2
Mají-li dvě soustavy lineárních rovnic řádkově ekvivalentní rozšířené matice, potom mají stejné řešení.

PŘÍKLAD 3 Úpravu soustavy (1),(2) na (3),(4) můžeme zapsat pomocí elementárních operací ve tvaru

$$\left[\begin{array}{rr|r} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -10 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \cdot 2 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{rr|r} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -20 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ +\mathrm{r}_1 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{rr|r} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -20 \end{array}\right]$$

2.4 Úprava na schodový tvar

DEFINICE 3

Budeme říkat, že matice je ve *schodovém tvaru*, jestliže má první nenulové prvky řádků zvané *vedoucí prvky* uspořádány jako schody klesající zleva doprava. Požaduje se přitom, aby vedoucí prvky nebyly nad sebou a aby všechny případné nulové řádky byly dole.

PŘÍKLAD 3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.4 Úprava na schodový tvar

Pomocí elementárních řádkových operací můžeme převést lib. matici na schodový tvar.

Je-li v matici soustavy $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ prvek a_{ij} nenulový, pak vynásobíme-li i-tý řádek této matice číslem $-a_{kj}/a_{ij}$ a přičteme-li ho ke k-tému řádku, bude mít upravená matice v k-tém řádku a j-tém sloupci prvek

$$a_{kj} + (-a_{kj}/a_{ij})\, a_{ij} = 0.$$

Pokud je prvek a_{11} nenulový, lze takto transformovat matici $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ na tvar

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^1 & \dots & a_{mn}^1 & b_m^1 \end{array}\right]$$

2.4 Úprava na schodový tvar

Pokud bude také prvek a_{22}^1 nenulový, můžeme obdobně dosáhnout pomocí elementárních řádkových operací, aby i pod ním byly v upravené matici nuly. Bude-li pokaždé $a_{ii}^{i-1} \neq 0$, dostaneme nakonec matici ve schodovém tvaru (nebo též v tzv. *trojúhelníkovém tvaru*) s nenulovými prvky $a_{11}, a_{22}^1, \ldots, a_{kk}^{k-1}$.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & \ldots & a_{2k}^1 & \ldots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{kk}^{k-1} & \ldots & a_{kn}^{k-1} & b_k^{k-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & b_{k+1}^k \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Pokud $a_{ii}^{i-1} = 0$ a je možno nalézt prvek $a_{ji}^{i-1} \neq 0, j > i$, stačí vzájemně vyměnit před úpravou i-tý a j-tý řádek. V opačném případě dostaneme obecnější schodový tvar.

2.4 Úprava na schodový tvar

POZOR! Neprovádíme-li postupné úpravy na upravené matici, můžeme se dopustit chyby. Například úpravami

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ -\mathrm{r}_3 \\ -\mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ +\mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

nedostaneme rozšířenou matici soustavy ekvivalentní s původní matici soustavy. Této chybě se můžeme vyhnout tak, že zvolíme jeden řádek, který neupravujeme, ale použijeme ho k úpravě ostatních. Například úpravy následující úpravy jsou již ekvivalentní.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ -2\mathrm{r}_1 \\ -2\mathrm{r}_1 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ -2\mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

2.5 Zpětná substituce

Uvažujme, že rozšířená matice soustavy je ve schodovém tvaru

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2k}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{kk}^{k-1} & \dots & a_{kn}^{k-1} & b_k^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{k+1}^k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

1. Jestliže poslední nenulový řádek rozšířené matice soustavy má nenulový pouze poslední prvek b_{k+1}^k, pak tomuto řádku odpovídá rovnice

$$0 = b_{k+1}^k,$$

která nemá pro $b_{k+1}^k \neq 0$ řešení. V tomto případě tedy daná *soustava nemá řešení*.

2.5 Zpětná substituce

PŘÍKLAD 4 *Soustava nemá řešení*

Rozšířená matice soustavy byla elementárními řádkovými operacemi převedena na schodový tvar:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Tato rozšířená matice soustavy odpovídá soustavě:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ 0 &= -3 \end{aligned}$$

Poslední rovnici $0 = -3$ nelze splnit pro žádnou volbu x_1, x_2, x_3 a soustava tudíž nemá řešení.

2.5 Zpětná substituce

Uvažujme, že rozšířená matice soustavy je ve schodovém tvaru

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2k}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & & a_{kk}^{k-1} & \dots & a_{kn}^{k-1} & b_k^{k-1} \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{k+1}^k \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0
\end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & a_{nn}^{n-1} & b_n^{n-1}
\end{array}\right]$$

2. Jestliže $k = n, b_{n+1}^n = 0$ a $a_{ii}^{i-1} \neq 0, i = 1, \dots, n$, pak n-tá rovnice má tvar

$$a_{nn}^{n-1} x_n = b_n^{n-1},$$

ze které snadno vypočteme x_n. Po dosazení do předchozích rovnic zbude v $(n-1)$-ní rovnici opět jediná neznámá. Budeme-li takto postupovat dále, určíme *jediné řešení soustavy*.

2.5 Zpětná substituce

PŘÍKLAD 5 *Soustava má jediné řešení*

Rozšířená matice soustavy byla elementárními řádkovými operacemi převedena na schodový tvar:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Tato rozšířená matice soustavy odpovídá soustavě:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 1 \\ & x_2 & -x_3 & = & 2 \\ & & x_3 & = & -3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & -(-3) & = & 1 \\ & x_2 & -(-3) & = & 2 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rrcr} x_1 & +2x_2 & = & -2 \\ & x_2 & = & -1 \end{array} \Rightarrow x_1 + 2(-1) = -2 \Rightarrow x_1 = 0$$

Soustava má jediné řešení $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = -3.$

2.5 Zpětná substituce

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2k}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & & a_{kk}^{k-1} & \dots & a_{kn}^{k-1} & b_k^{k-1} \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

3. Jestliže rozšířená matice má obecný schodový tvar, pak z každé rovnice soustavy vyjádříme neznámou, která odpovídá vedoucímu prvku. Postupným dosazováním od posledního řádku dostaneme vzorce pro neznámé odpovídající vedoucím prvkům vyjádřené pomocí neznámých na pravé straně. V tomto případě má soustava *nekonečně mnoho řešení*.

2.5 Zpětná substituce

PŘÍKLAD 6 *Soustava má nekonečně mnoho řešení*

Rozšířená matice soustavy byla elementárními řádkovými operacemi převedena na schodový tvar:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tato rozšířená matice soustavy odpovídá soustavě:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 1 \\ & & x_3 & -x_4 & = & 2 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcr} x_1 & = & 1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ x_3 & = & 2 + x_4 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 - x_2 + (2 + x_4) - x_4 = 3 - x_2$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení $x_1 = 3 - x_2, x_3 = 2 + x_4$ přižemž x_2, x_4 volíme libovolně.

2.6 Gaussova eliminace

Gaussova eliminační metoda:

1. *dopředná redukce*, tj. redukce na schodový tvar
2. *zpětná substituce*, tj. řešení soustavy se schodovou maticí

PŘÍKLAD 7 *Soustava, která nemá řešení.*

Řešme soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \quad\quad &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Ekvivalentními řádkovými úpravami dostaneme postupně

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot 2 - \mathrm{r}_1 \\ -2\mathrm{r}_1 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -\mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

Poslední rovnici $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -5$ nelze splnit žádnou volbou x_1, x_2, x_3. Soustava proto nemá řešení.

2.6 Gaussova eliminace

PŘÍKLAD 8 *Soustava s jediným řešením.*

Řešme soustavu

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Ekvivalentními řádkovými úpravami dostaneme postupně

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \mathrm{r}_3 \\ \updownarrow \\ \mathrm{r}_1 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -2\mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Řešením rovnic dostaneme postupně

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 \\ x_2 &= -x_3 = -2 \\ x_1 &= 4 - x_3 = 2 \end{aligned}$$

což je jediné řešení naší soustavy.

2.6 Gaussova eliminace

PŘÍKLAD 9 *Soustava, která má nekonečně mnoho řešení.*

Řešme soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 \qquad - x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ekvivalentními řádkovými úpravami dostaneme postupně

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\mathrm{r}_1 \\ \\ \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ +\mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Poslední matice je rozšířenou maticí soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

2.6 Gaussova eliminace

PŘÍKLAD 9 *Pokračování*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 && (1) \\ -x_2 - 2x_3 &= 0 && (2) \\ 0 &= 0 && (3) \end{aligned}$$

Z rovnice (2) vypočteme x_2 pomocí x_3, tj. $x_2 = -2x_3$. Po dosazení za x_2 do rovnice (1) dostaneme $x_1 = 1 + x_3$.

Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení ve tvaru x_3 *libovolné*, $x_2 = -2x_3, x_1 = 1 + x_3$. Můžeme je zapsat také pomocí libovolného parametru p ve tvaru $x_3 = p, x_2 = -2p, x_1 = 1 + p$.

Poznámka: Má-li soustava nekonečně mnoho řešení, je *množina* řešení určena jednoznačně, nikoliv však její *parametrizace*. Například $x_2 = p, x_3 = -\frac{1}{2}p$ a $x_1 = -\frac{1}{2}p + 1$ je *jiný* tvar *téhož* řešení.

2.7 Gaussova-Jordanova metoda

DEFINICE 4
Budeme říkat, že matice je v *normovaném schodovém tvaru*, jestliže je v takovém schodovém tvaru, že všechny prvky nad vedoucími prvky jsou nulové a navíc vedoucí prvky jsou rovny jedné.

Gaussova–Jordanova metoda:

1. *dopředná redukce*, tj. redukce na schodový tvar
2. úprava na normovaný schodový tvar
   (a) dělení řádků matice vedoucími prvky
   (b) nulování prvků nad vedoucími prvky pomocí elementárních řádkových operací (e1),(e2) a (e3)

2.7 Gaussova-Jordanova metoda

PŘÍKLAD 10 Například dodatečnou úpravou rozšířené matice soustavy z příkladu 8 dostaneme

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]\begin{array}{l} -\mathrm{r}_3 \\ -\mathrm{r}_3 \\ \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Řešení soustavy se nachází v posledním sloupci matice vpravo, neboť rovnice, které odpovídají rozšířené matici soustavy napravo, jsou $x_1 = 2, x_2 = -2$ a $x_3 = 2$

2.8 Pracnost řešení

- Gaussova eliminace je velmi efektivní pro ruční řešení malých soustav a pro počítačové řešení soustav stovek až tisíců rovnic.
- Metoda je velmi efektivní i pro počítačové řešení větších soustav se speciální strukturou rozložení nenulových prvků.
- Pro rozsáhlejší soustavy existují efektivnější metody, které se rozvíjejí i v současné době.
- Gaussova eliminace není vhodná pro paralelní počítačovou implementaci.

Pracnost řešení soustavy metodou Gaussovy eliminace ($m = n$):

1. Dopředná redukce: $\frac{1}{6}(2n+1)(n+1)n$ násobení, tj. cca $\frac{1}{3}n^3$ pro velká n
2. Zpětná substituce: $\frac{1}{2}n(n-1)$ násobení, tj. cca $\frac{1}{2}n^2$ pro velká n.