

---

# 1. Matice a maticové operace

# Matice a maticové operace

---

1. Aritmetické vektory
2. Operace s aritmetickými vektory
3. Nulový a opačný vektor
4. Matice
5. Násobení matice skalárem a sčítání matic
6. Nulová matice a odečítání matic
7. Transponované matice
8. Násobení matice a vektoru
9. Násobení matic

# 1.1 Aritmetické vektory

## DEFINICE 1

$n$ -rozměrný *aritmetický vektor* je uspořádaná  $n$ -tice čísel, jejíž prvky se nazývají *složky*. Tyto uspořádané  $n$ -tice budeme zapisovat do hranatých závorek do řádků nebo sloupců.

**PŘÍKLAD 1** Vektor průhybů vodiče z příkladu III z úvodní přednášky můžeme definovat předpisem

$\mathbf{u} = [u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6]$ . Řešením úlohy je pak vektor  $\mathbf{u} = [0, 0.2780, 0.4448, 0.5004, 0.4448, 0.2780, 0]$

# 1.1 Aritmetické vektory

Jestliže  $\mathbf{v}$  je aritmetický vektor, pak  $i$ -tou složku vektoru  $\mathbf{v}$  budeme značit  $[\mathbf{v}]_i$ . Např.  $[\mathbf{u}]_1 = u_0 = 0$ .

Počet složek aritmetického vektoru nazýváme jeho *rozměrem* nebo též *dimenzí*. Například vektor  $\mathbf{x} = [1, 2]$  je dvourozměrný, vektor  $\mathbf{u}$  je sedmírozměrný.

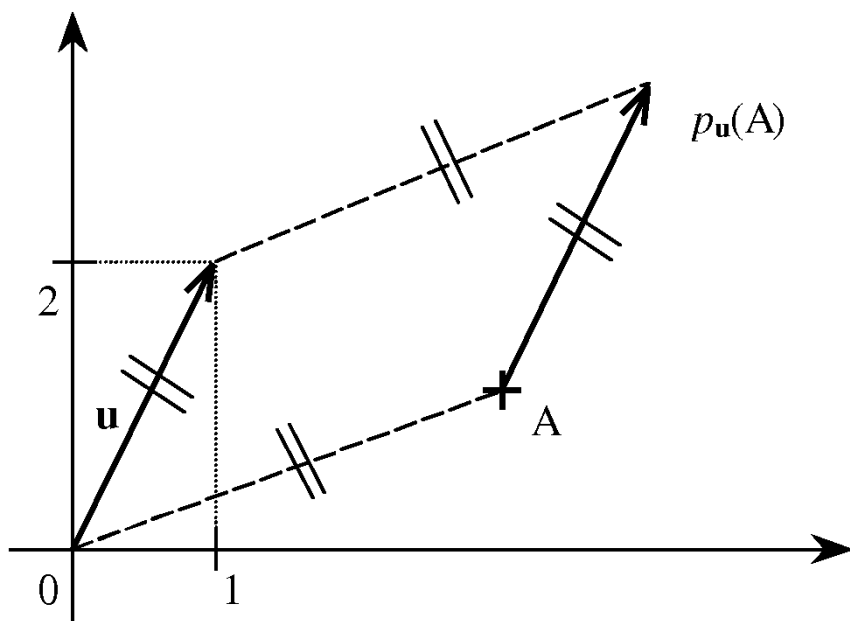
## DEFINICE 2

Dva aritmetické vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  považujeme za *stejné* (píšeme  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ ), jestliže mají stejnou dimenzi  $n$  a stejné odpovídající složky, tj.  $[\mathbf{u}]_1 = [\mathbf{v}]_1, \dots, [\mathbf{u}]_n = [\mathbf{v}]_n$ . Vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ , které nejsou stejné, jsou *různé* (píšeme  $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ ).

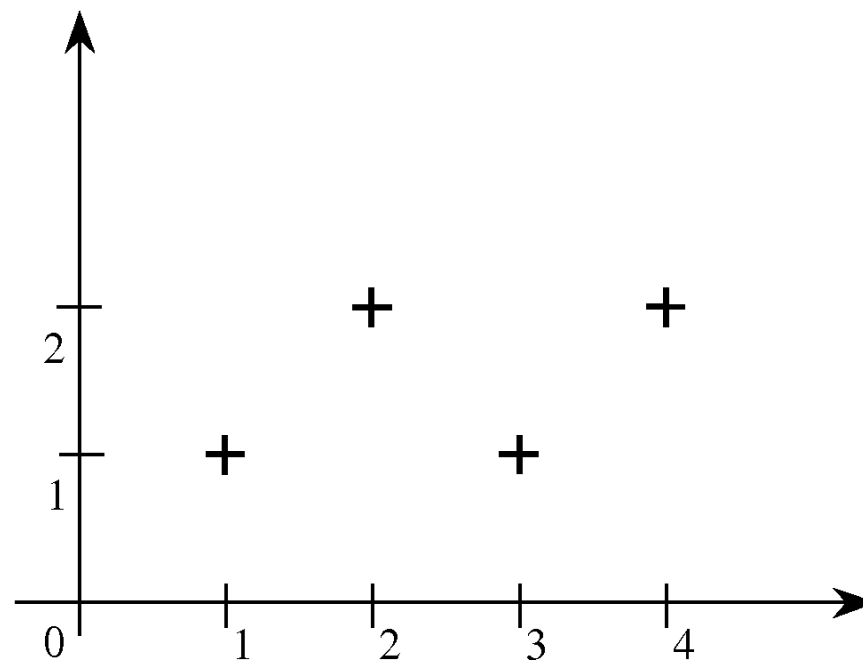
Jestliže  $\mathbf{u} = [1, 2]$  a  $\mathbf{v} = [2, 1]$ , pak  $[\mathbf{u}]_1 = 1$ ,  $[\mathbf{v}]_1 = 2$ , takže  $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ .

# 1.1 Aritmetické vektory

Dvou a třírozměrné vektory Vícerozměrné vektory:  
- *polohové vektory*



Volné a vázané vektory



Znázornění vektoru  $[1, 2, 1, 2]$

# 1.2 Operace s aritmetickými vektory

## DEFINICE 3

*Součin skaláru (čísla)  $\alpha$  a aritmetického vektoru  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_n]$  je vektor  $\alpha\mathbf{u}$  definovaný předpisem*

$$\alpha\mathbf{u} = [\alpha u_1, \dots, \alpha u_n].$$

Pro složky  $\alpha\mathbf{u}$  tedy platí

$$[\alpha\mathbf{u}]_i = \alpha[\mathbf{u}]_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

například

$$3[1, 2] = [3 \cdot 1, 3 \cdot 2] = [3, 6],$$

$$[3[1, 2]]_1 = 3 \cdot 1 = 3, \quad [3[1, 2]]_2 = 3 \cdot 2 = 6.$$

# 1.2 Operace s aritmetickými vektory

## DEFINICE 4

*Součet aritmetických vektorů*  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_n]$  a  $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_n]$  stejné dimenze je vektor  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  definovaný předpisem

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n].$$

Pro složky  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  tedy platí

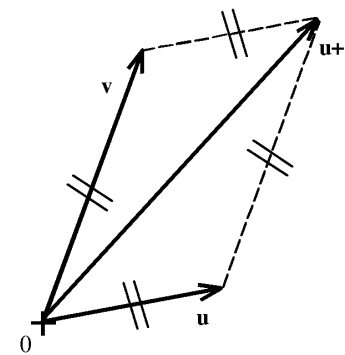
$$[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_i = [\mathbf{u}]_i + [\mathbf{v}]_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Například

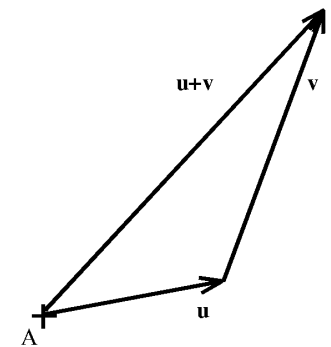
$$[1, 2] + [2, 3] = [1 + 2, 2 + 3] = [3, 5],$$

$$[[1, 2] + [2, 3]]_1 = 1 + 2 = 3,$$

$$[[1, 2] + [2, 3]]_2 = 2 + 3 = 5.$$



a) Vázané vektory



b) Volné vektory

# 1.2 Operace s aritmetickými vektory

## VĚTA 1

Pro libovolná čísla  $\alpha, \beta$  a vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  stejné dimenze platí:

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \quad (1)$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} \quad (3)$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u} \quad (4)$$

$$\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u} \quad (5)$$

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (6)$$

DŮKAZ: (6)  $[1u]_i = 1[u]_i = [u]_i$



# 1.2 Operace s aritmetickými vektory

---

Vlastnosti (3),(4),(5) jsou velmi důležité při výpočtech s velmi velkými vektory.

Např. stokrát výpočet  $2.0\mathbf{u} + 2.0\mathbf{v}$  s vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  dimenze 10000000 zabírá 45.158897 sekund, zatímco výpočet  $2.0(\mathbf{u} + \mathbf{v})$  pouze 26.779861 sekund.

Operace  $\alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$  totiž potřebuje  $2n$  operací násobení skaláru se složkami obou vektorů a  $n$  operací součtů složek vektorů, tj. celkem  $3n$  operací, výraz  $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v})$  potřebuje  $n$  při součtu obou vektorů a  $n$  operací násobení složek vektorů skalárem, tj. celkem  $2n$  operací, tedy pouze  $\frac{2}{3}$  původního počtu operací.

# 1.3 Nulový a opačný vektor

## DEFINICE 5

Vektor  $\mathbf{o} = [0, \dots, 0]$  se nazývá *nulový vektor*. Nulový vektor dimenze  $n$  budeme značit  $\mathbf{o}_n$ .

Je-li vektor  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_n]$  libovolný aritmetický vektor, pak se vektor  $-\mathbf{u} = [-u_1, \dots, -u_n] = (-1)\mathbf{u}$  nazývá *opačný vektor* k vektoru  $\mathbf{u}$ .

Je-li  $\mathbf{u}$  libovolný  $n$ -rozměrný vektor, pak  $\mathbf{u} + \mathbf{o}_n = \mathbf{u}$ .

Opačný vektor splňuje  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$ .

Jestliže  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  jsou libovolné aritmetické vektory stejné dimenze, pak jediný vektor  $\mathbf{x}$ , který splňuje  $\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$  lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{v}.$$

Rozdíl aritmetických vektorů:  $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u})$

# 1.4 Matice

## DEFINICE 6

Nechť jsou dány prvky  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$  z dané množiny  $\mathcal{F}$ . *Matice* typu  $(m, n)$  (stručně  $m \times n$  matice) je obdélníková tabulka

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

která má  $mn$  prvků  $a_{ij}$  uspořádaných do  $m$  řádků  $\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}$  a  $n$  sloupců  $\mathbf{s}_j^{\mathbf{A}}$ , takže

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}} \end{bmatrix} = [\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \dots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}}],$$
$$\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} = [a_{i1}, \dots, a_{in}], \quad \mathbf{s}_j^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Stručně píšeme též  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ .

# 1.4 Matice

---

- Prvky množiny  $\mathcal{F}$  nazýváme také *skaláry* (lze je sčítat a násobit obdobně jako čísla).
- Množinu všech matic typu  $(m, n)$  s prvky z množiny  $\mathcal{F}$  budeme značit  $\mathcal{F}^{m,n}$ . (Matice reálné, komplexní, polynomiální).
- Jestliže  $m = n$ , pak se  $\mathbf{A}$  nazývá *čtvercová matice řádu  $n$* .
- Matici typu  $(1, n)$  nazýváme *řádkovým vektorem řádu  $n$* .
- Matici typu  $(m, 1)$  nazýváme *sloupcovým vektorem řádu  $m$* .
- Prvky  $a_{11}, \dots, a_{ss}$ ,  $s = \min\{m, n\}$  tvoří *diagonálu* matice  $\mathbf{A}$ .
- Prvek v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci matice  $\mathbf{A}$  značíme  $[\mathbf{A}]_{ij}$ .

# 1.4 Matice

Matice z příkladu I z úvodní přednášky:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Reálná matice typu (7,8), tj.  $A \in \mathbb{R}^{7,8}$ .
- Diagonála: 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0.
- $[A]_{63} = 1$ .

Matice z příkladu III z úvodní přednášky:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Reálná čtvercová matice řádu 5, tj.  $A \in \mathbb{R}^{5,5}$ .
- Diagonála: 2, 2, 2, 2, 2.
- $[A]_{43} = -1$ .

# 1.4 Matice

---

## DEFINICE 7

Matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  považujeme za *stejné* (píšeme  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ), jestliže jsou stejného typu a mají stejné odpovídající prvky, tj.  $[\mathbf{A}]_{ij} = [\mathbf{B}]_{ij}$ . Matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ , které nejsou stejné, jsou *různé* (píšeme  $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ ).

## PŘÍKLAD 2

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq [1, 2], \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

# 1.5 Násobení matice skalárem a sčítání matic

## DEFINICE 8

*Součin skaláru  $\alpha$  a matice  $\mathbf{A}$  je matice  $\alpha\mathbf{A}$  stejného typu jako  $\mathbf{A}$  definovaná předpisem*

$$[\alpha\mathbf{A}]_{ij} = \alpha[\mathbf{A}]_{ij}.$$

## PŘÍKLAD 3

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

# 1.5 Násobení matice skalárem a sčítání matic

## DEFINICE 9

*Součet matic*  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  stejného typu je matice  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  stejného typu jako  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  definovaná předpisem

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [\mathbf{B}]_{ij}.$$

## PŘÍKLAD 4

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$



# 1.5 Násobení matice skalárem a sčítání matic

## VĚTA 2

Pro libovolné číselné matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  stejného typu a pro libovolné skaláry  $\alpha, \beta$  platí vztahy:

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad (1)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (2)$$

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B} \quad (3)$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A} \quad (4)$$

$$\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A} \quad (5)$$

$$1\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (6)$$

DŮKAZ: (6)  $[1A]_{ij} = 1[A]_{ij} = [A]_{ij}$

# 1.5 Násobení matice skalárem a sčítání matic

---

Obdobně jako v případě vektorů, vlastnosti (3),(4),(5) jsou velmi důležité při výpočtech s velmi velkými maticemi.

Např. stokrát výpočet  $2.0\mathbf{A} + 3.0\mathbf{A}$  s čtvercovou maticí řádu 1000 potřebuje 4.562711 sekund, zatímco výpočet  $(2.0 + 3.0)\mathbf{A}$  pouze 1.895391 sekund.

Operace  $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$  se čtvercovou maticí řádu  $n$  totiž potřebuje  $2n^2$  operací násobení skalárů se složkami matice a  $n^2$  operací součtů složek matic, tj. celkem  $3n^2$  operací, výraz  $(\alpha + \beta)\mathbf{A}$  potřebuje 1 při součtu obou skalárů a  $n^2$  operací násobení složek matice skalárem, tj. celkem  $n^2 + 1$  operací, tedy pouze  $\frac{1}{3}$  původního počtu operací.

# 1.6 Nulová matice a odečítání matic

## DEFINICE 10

Matice

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

se nazývá *nulová matice*. Nulová matice typu  $(m, n)$  se značí  $\mathbf{O}_{mn}$ .

Je-li  $\mathbf{A}$  libovolná matice, pak matice  $-\mathbf{A}$  se nazývá *opačná matice* k matici  $\mathbf{A}$  a platí

$$[-\mathbf{A}]_{ij} = -[\mathbf{A}]_{ij}$$

# 1.6 Nulová matice a odečítání matic

## VĚTA 3

Pro libovolnou matici  $\mathbf{A}$  a nulovou matici stejného typu platí

$$\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A} \quad (1)$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O} \quad (2)$$

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A} \quad (3)$$

DŮKAZ:

$$(1): [\mathbf{A} + \mathbf{O}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [\mathbf{O}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + 0 = [\mathbf{A}]_{ij},$$

(2):

$$[\mathbf{A} + (-\mathbf{A})]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [-\mathbf{A}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + (-[\mathbf{A}]_{ij}) = 0 = [\mathbf{O}]_{ij},$$

$$(3): [-\mathbf{A}]_{ij} = -[\mathbf{A}]_{ij} = (-1)[\mathbf{A}]_{ij} = [(-1)\mathbf{A}]_{ij}.$$

# 1.6 Nulová matice a odečítání matic

---

Jestliže matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  jsou libovolné matice stejného typu, pak jedinou matici  $\mathbf{X}$ , která splňuje  $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$ , lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{B}.$$

Definujeme *odečítání matic* nebo též *rozdíl matic* předpisem

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{B} + (-\mathbf{A}).$$

## PŘÍKLAD 5

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{B} + (-\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

# 1.7 Transponované matice

## DEFINICE 11

K dané matici  $\mathbf{A}$  typu  $(m, n)$  definujeme matici transponovanou  $\mathbf{A}^\top$  typu  $(n, m)$  předpisem

$$[\mathbf{A}^\top]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ji}.$$

## PŘÍKLAD 6

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

## VĚTA 4

Pro matice stejného typu a libovolný skalár platí:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top, \quad (1)$$

$$(\alpha\mathbf{A})^\top = \alpha\mathbf{A}^\top. \quad (2)$$

# 1.8 Násobení matice a vektoru

Soustava z příkladu III z úvodní přednášky:

$$\begin{array}{rcccccc} 2u_1 & -u_2 & & & & = & 0.1112 \\ -u_1 & +2u_2 & -u_3 & & & = & 0.1112 \\ & -u_2 & +2u_3 & -u_4 & & = & 0.1112 \\ & & -u_3 & +2u_4 & -u_5 & = & 0.1112 \\ & & & -u_4 & +2u_5 & = & 0.1112 \end{array}$$

S využitím definice násobení vektoru skalárem a součtu vektorů:

$$u_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + u_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1112 \\ 0.1112 \\ 0.1112 \\ 0.1112 \\ 0.1112 \end{bmatrix}$$

# 1.8 Násobení matice a vektoru

Předchozí rovnici lze přepsat:

$$u_1 \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} + u_2 \mathbf{s}_2^{\mathbf{A}} + u_3 \mathbf{s}_3^{\mathbf{A}} + u_4 \mathbf{s}_4^{\mathbf{A}} + u_5 \mathbf{s}_5^{\mathbf{A}} = \mathbf{b} \quad (*)$$

Ze sloupcových vektorů  $\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \dots, \mathbf{s}_5^{\mathbf{A}}$  sestavíme matici

$$\mathbf{A} = [\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \mathbf{s}_2^{\mathbf{A}}, \mathbf{s}_3^{\mathbf{A}}, \mathbf{s}_4^{\mathbf{A}}, \mathbf{s}_5^{\mathbf{A}}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Levá strana rovnice (\*) definuje součin matice  $\mathbf{A}$  a vektoru  $\mathbf{u}$ , takže

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad \text{kde } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.1112 \\ 0.1112 \\ 0.1112 \\ 0.1112 \\ 0.1112 \end{bmatrix}$$



# 1.8 Násobení matice a vektoru

## DEFINICE 12

Součinem matice  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  typu  $(m, n)$  a sloupcového vektoru  $\mathbf{x} = [x_i]$  dimenze  $n$  nazýváme vektor dimenze  $m$  definovaný předpisem

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} = x_1 \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} + \cdots + x_n \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}}.$$

Rozepsáním definice po složkách dostaneme

$$[\mathbf{y}]_i = [\mathbf{Ax}]_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \mathbf{x}.$$

Toto pravidlo si můžeme znázornit pomocí:

$$\begin{array}{c} \mathbf{y} \\ \left[ \begin{array}{c} y_i \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \left[ \begin{array}{ccc} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \left[ \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right] \end{array} \downarrow$$

# 1.8 Násobení matice a vektoru

Jako příklady násobení matice a vektoru si uveďme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

## VĚTA 5

Pro libovolné matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  typu  $(m, n)$ ,  $n$ -rozměrné vektory  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  a skalár  $\alpha$  platí:

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{u}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{u} \quad (1)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v} \quad (2)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3)$$

DŮKAZ: (2)  $[\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v})]_i = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a_{i1}(u_1 + v_1) + \cdots + a_{in}(u_n + v_n) =$   
 $= (a_{i1}u_1 + \cdots + a_{in}u_n) + (a_{i1}v_1 + \cdots + a_{in}v_n) =$   
 $= \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{u} + \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{v} = [\mathbf{A}\mathbf{u}]_i + [\mathbf{A}\mathbf{v}]_i,$

# 1.9 Násobení matic

$\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  libovolné čtvercové matice řádu 3,  $\mathbf{x}$  vektor dimenze 3.

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) = \mathbf{A} [x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} + x_2\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} + x_3\mathbf{s}_3^{\mathbf{B}}] = x_1\mathbf{A}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} + x_2\mathbf{A}\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} + x_3\mathbf{A}\mathbf{s}_3^{\mathbf{B}}$$

Odtud můžeme definovat matici  $\mathbf{AB} = [\mathbf{A}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}}, \mathbf{A}\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}}, \mathbf{A}\mathbf{s}_3^{\mathbf{B}}]$ .

## DEFINICE 13

Jestliže  $\mathbf{A}$  je matice typu  $(m, p)$  a  $\mathbf{B}$  je matice typu  $(p, n)$ , pak *součin matic*  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  je matice  $\mathbf{AB}$  typu  $(m, n)$  definovaná předpisem

$$\mathbf{AB} = [\mathbf{A}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}}, \dots, \mathbf{A}\mathbf{s}_n^{\mathbf{B}}] .$$

# 1.9 Násobení matic

Rozepíšeme-li si definici násobení matic po složkách, dostaneme

$$[\mathbf{AB}]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_j^{\mathbf{B}}$$

a

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} & \cdots & \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_n^{\mathbf{B}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} & \cdots & \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_n^{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}} \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Toto pravidlo si můžeme znázornit pomocí:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{AB} & & \mathbf{A} & & \mathbf{B} \\ \left[ \begin{array}{c} [AB]_{ij} \end{array} \right] & = & \left[ \begin{array}{ccc} a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ & \longrightarrow & \end{array} \right] & & \left[ \begin{array}{c} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{array} \right] \downarrow \end{array}$$

# 1.9 Násobení matic

**PŘÍKLAD 7** Příklady násobení matic:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & -2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{nelze násobit!!!}$$

# 1.9 Násobení matic

Z definice lze ihned vidět, že pro libovolné matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  a vektor  $\mathbf{x}$  je  $\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{x}$  pokud jsou tyto výrazy definovány. Obecněji platí následující vztahy.

## VĚTA 6

Pro libovolný skalár  $\alpha$  a matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  platí:

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} \quad (1)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C} \quad (2)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C} \quad (3)$$

kdykoliv jsou uvedené výrazy definovány.

DŮKAZ (2): 
$$\begin{aligned} [A(B + C)]_{ij} &= \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_j^{\mathbf{B}+\mathbf{C}} = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} (\mathbf{s}_j^{\mathbf{B}} + \mathbf{s}_j^{\mathbf{C}}) = \\ &= \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_j^{\mathbf{B}} + \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_j^{\mathbf{C}} = [AB]_{ij} + [AC]_{ij} \end{aligned}$$

# 1.9 Násobení matic

---

Násobení matic je velmi výpočetně nákladné. Je proto velmi důležité operace dělat co nejefektivněji.

Např. stokrát výpočet  $\mathbf{AC} + \mathbf{BC}$  s čtvercovými maticemi řádu 1000 potřebuje 87.314541 sekund, zatímco výpočet  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C}$  pouze 45.531831 sekund.

Operace násobení matic se čtvercovými maticemi řádu  $n$  totiž potřebuje  $n^2(2n - 1) = 2n^3 - n^2$  operací, tj. výraz  $\mathbf{AC} + \mathbf{BC}$  potřebuje  $4n^3 - 2n^2$  při součinech matic a  $n^2$  operací pro součet matic, tj. celkem  $4n^3 - n^2$  operací, zatímco výraz  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C}$  potřebuje  $2n^3$  tedy přibližně  $\frac{1}{2}$  původního počtu operací.

# 1.9 Násobení matic

## VĚTA 7

Pro násobení matice  $\mathbf{A}$  typu  $(m, p)$ , matice  $\mathbf{B}$  typu  $(p, q)$  a matice  $\mathbf{C}$  typu  $(q, n)$  platí také tzv. *asociativní zákon*, tj.

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

DŮKAZ: 
$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{BC}) &= \mathbf{A} [\mathbf{B}\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}}, \dots, \mathbf{B}\mathbf{s}_n^{\mathbf{C}}] = [\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}}), \dots, \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{s}_n^{\mathbf{C}})] = \\ &= [(\mathbf{AB})\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}}, \dots, (\mathbf{AB})\mathbf{s}_n^{\mathbf{C}}] = (\mathbf{AB})\mathbf{C}. \end{aligned}$$

Indukcí lze dokázat obdobné tvrzení i pro součin více než tří matic.

Odtud speciálně vyplývá, že *mocnina čtvercové matice*

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_k$$

je definována jednoznačně neboť nezáleží na uzávorkování.



# 1.9 Násobení matic

## DEFINICE 14

Čtvercová matice

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

se nazývá *jednotková matice*. Jednotková matice řádu  $n$  se značí  $\mathbf{I}_n$ .

## VĚTA 8

Jestliže  $\mathbf{A}$  je libovolná matice, pak pro jednotkové matice příslušné dimenze platí

$$\mathbf{AI} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{IA} = \mathbf{A}.$$

DŮKAZ:

$$\text{Např. } [AI]_{ij} = a_{i1} \cdot 0 + \dots + a_{ij} \cdot 1 + \dots + a_{in} \cdot 0 = a_{ij} = [A]_{ij}$$

# 1.9 Násobení matic

---

Pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

platí

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

takže  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ .

Navíc platí

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}.$$

Pro násobení matic tedy *neplatí komutativní zákon* a *mocnina nenulové matice může být nulová matice!*

# 1.9 Násobení matic

## VĚTA 9

Jestliže je  $\mathbf{A}$  matice typu  $(m, p)$  a  $\mathbf{B}$  je matice typu  $(p, n)$ , pak platí:

$$(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$$

DŮKAZ:

$$\begin{aligned} [(\mathbf{AB})^\top]_{ij} &= [\mathbf{AB}]_{ji} = \mathbf{r}_j^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_i^{\mathbf{B}} = \\ &= a_{j1} b_{1i} + \cdots + a_{jp} b_{pi} = \\ &= b_{1i} a_{j1} + \cdots + b_{pi} a_{jp} = \\ &= (\mathbf{s}_i^{\mathbf{B}})^\top (\mathbf{r}_j^{\mathbf{A}})^\top = [\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top]_{ij}. \end{aligned}$$