

Lineární algebra

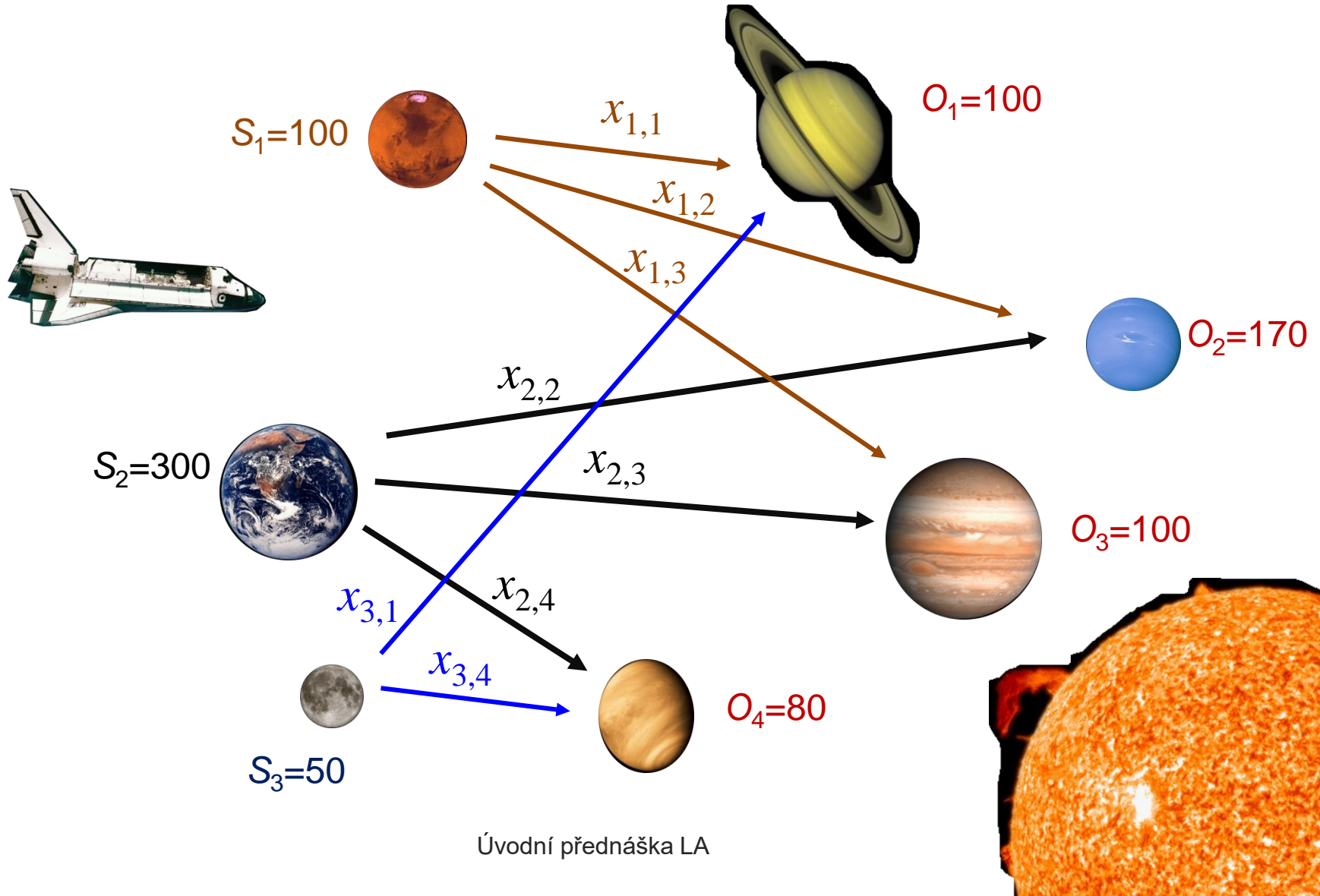
doc. Ing. Petr Beremlijski, Ph.D.

Katedra aplikované matematiky, FEI

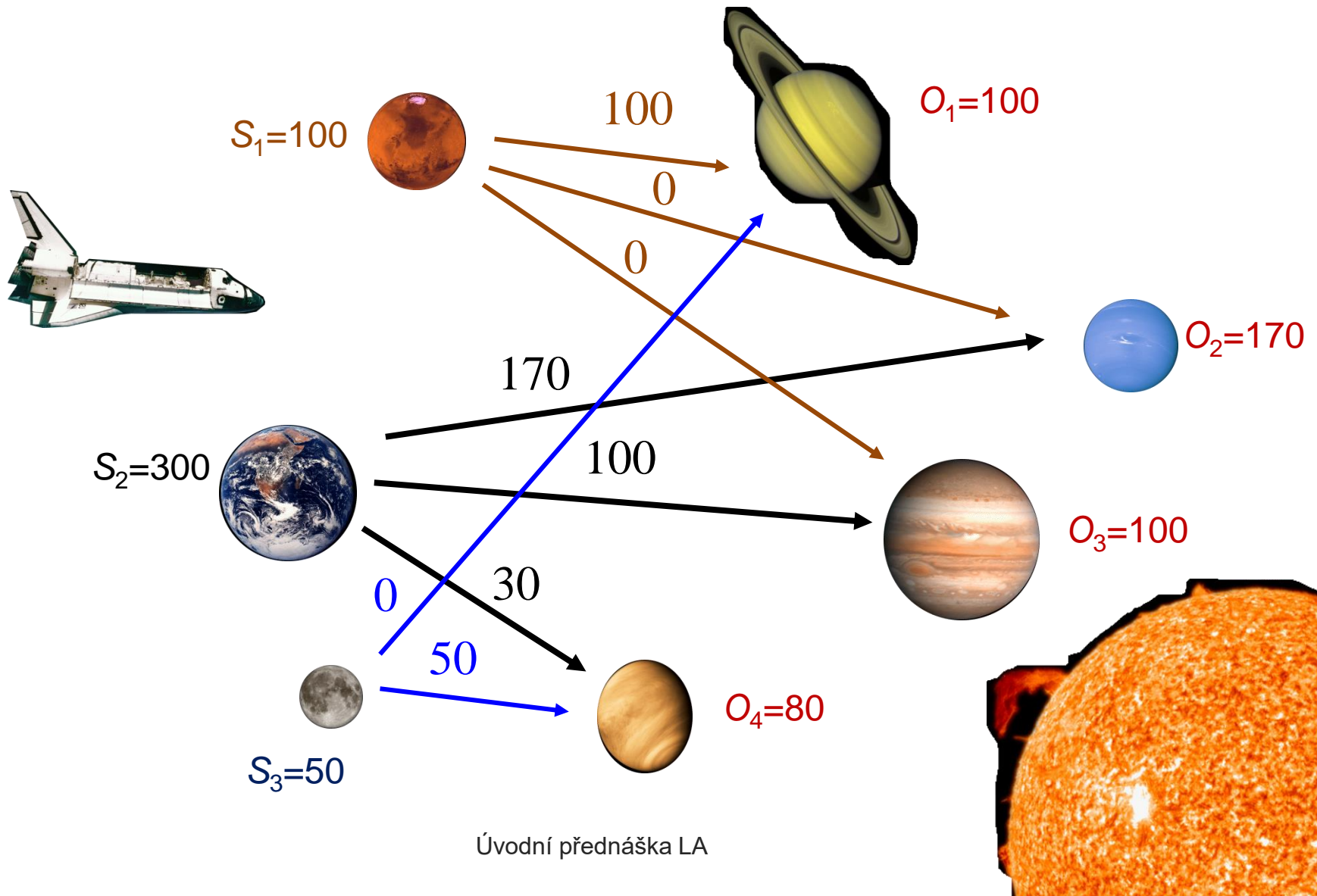
petr.beremlijski@vsb.cz, místnost EA 534

<http://homel.vsb.cz/~ber95/LA/la.htm>

Aplikace I: dopravní problém



Aplikace I: dopravní problém



Aplikace I: dopravní problém

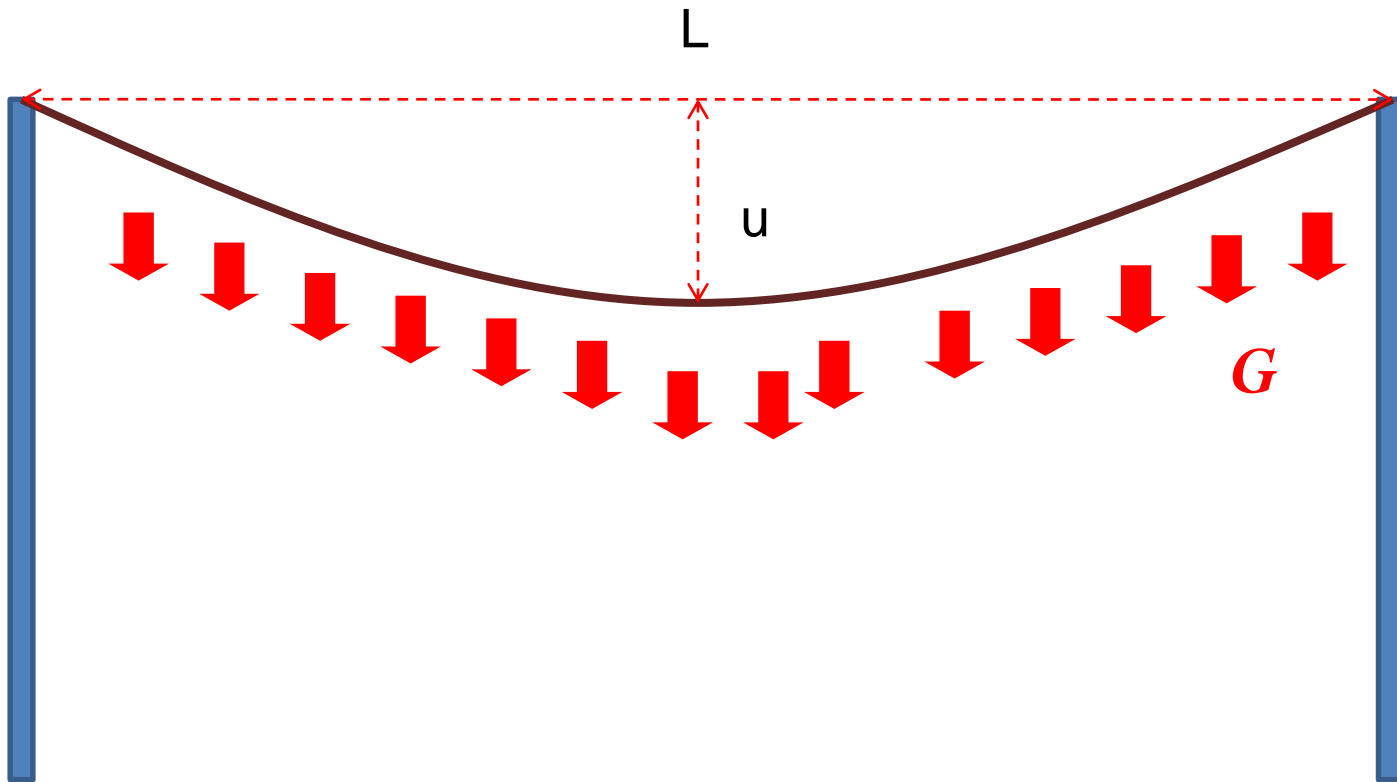
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{2,4} \\ x_{3,1} \\ x_{3,4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 50 \\ 100 \\ 170 \\ 100 \\ 80 \end{bmatrix}$$

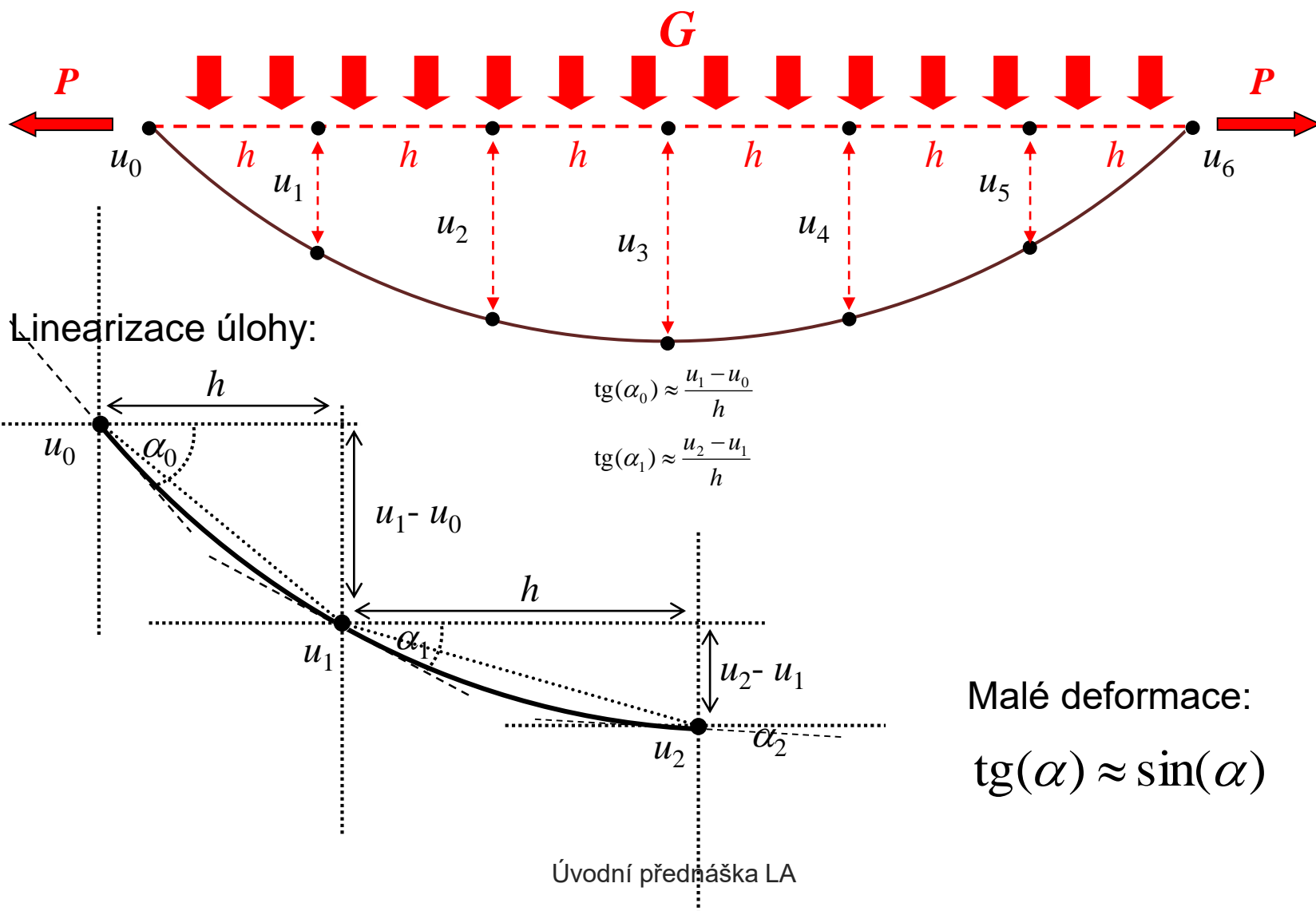
- Řešitelnost soustavy
 - soustava nemá řešení (zboží nelze rozvést)
 - soustava má jediné řešení (zboží lze rozvést jediným způsobem)
 - soustava má nekonečně mnoho řešení (zboží lze rozvést různým způsobem – možno dále specifikovat jakým)

Aplikace II: délka vodiče

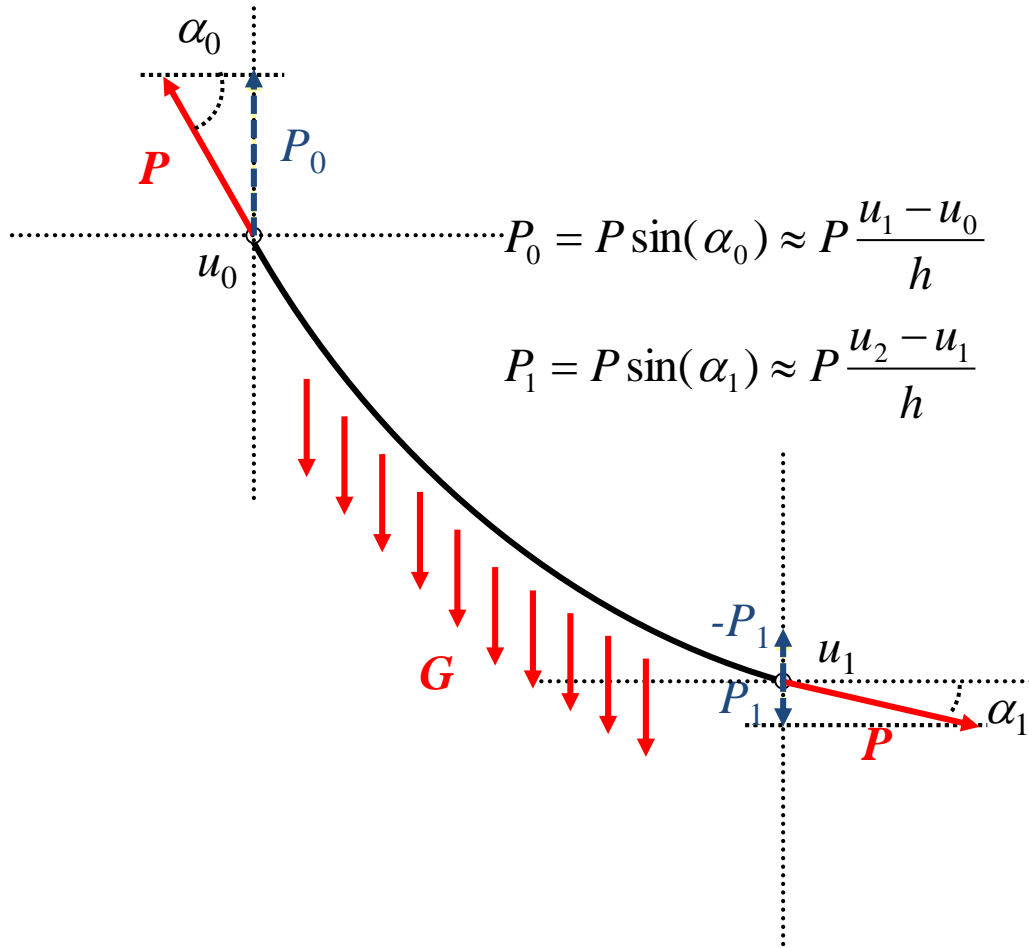
Určete potřebnou délku vodiče zavěšeného na sloupech vysokého napětí, pokud jsou sloupy od sebe vzdáleny 12 metrů.



Aplikace II: délka vodiče



Aplikace II: délka vodiče



$$P_0 = P \sin(\alpha_0) \approx P \frac{u_1 - u_0}{h}$$

$$P_1 = P \sin(\alpha_1) \approx P \frac{u_2 - u_1}{h}$$

$$P_0 + (-P_1) = hG$$

$$P \frac{u_1 - u_0}{h} - P \frac{u_2 - u_1}{h} = hG$$

$$-u_0 + 2u_1 - u_2 = \frac{h^2 G}{P}$$

Aplikace II: délka vodiče

Soustava lineárních rovnic:

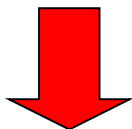
$$\begin{array}{rcccccc}
 -u_0 & +2u_1 & -u_2 & & & & = h^2 F \\
 & -u_1 & +2u_2 & -u_3 & & & = h^2 F \\
 & & -u_2 & +2u_3 & -u_4 & & = h^2 F \\
 & & & -u_3 & +2u_4 & -u_5 & = h^2 F \\
 & & & & -u_4 & +2u_5 & -u_6 = h^2 F
 \end{array}$$

$$F = \frac{G}{P} = \frac{\rho_l g}{\text{"tuhost"}}$$

$$F = \frac{0.85 \cdot 9.81}{300} = 0.0278$$

$$L = 12m \Rightarrow h = \frac{L}{6} = 2m$$

$$u_0 = u_6 = 0$$



$$\begin{array}{rcccccc}
 2u_1 & -u_2 & & & & & = 0.1112 \\
 -u_1 & +2u_2 & -u_3 & & & & = 0.1112 \\
 & -u_2 & +2u_3 & -u_4 & & & = 0.1112 \\
 & & -u_3 & +2u_4 & -u_5 & & = 0.1112 \\
 & & & -u_4 & +2u_5 & & = 0.1112
 \end{array}$$

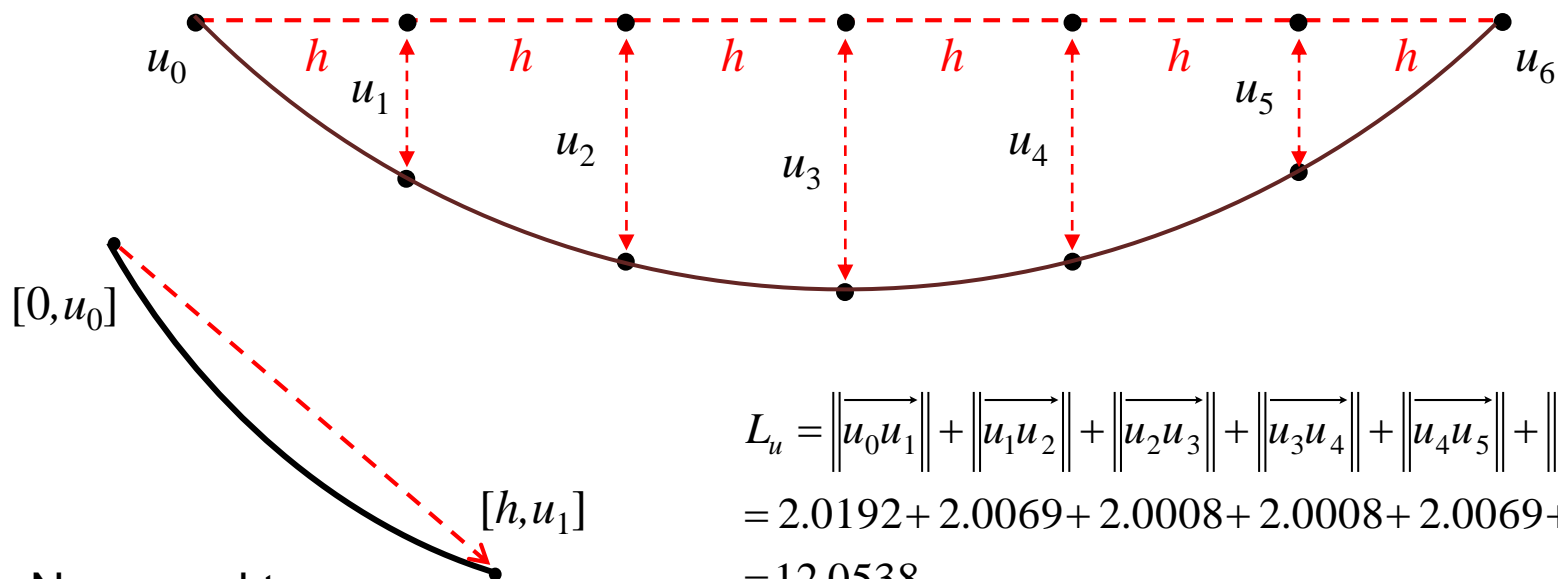
Au=b



$$\begin{array}{l}
 u_1 = 0.2780 \\
 u_2 = 0.4448 \\
 u_3 = 0.5004 \\
 u_4 = 0.4448 \\
 u_5 = 0.2780
 \end{array}$$

Aplikace II: délka vodiče

Výpočet délky:



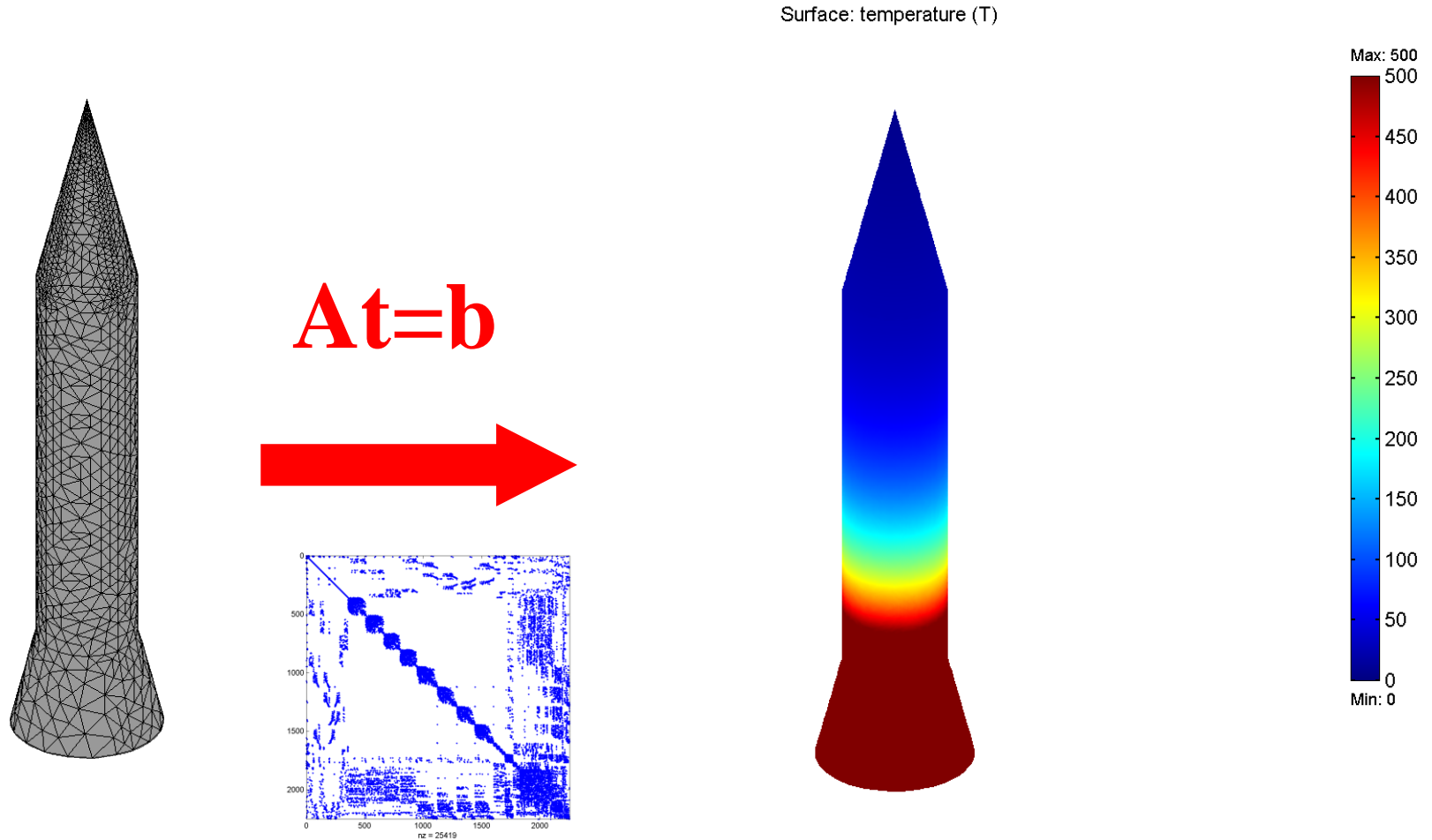
$$\begin{aligned}L_u &= \|\overrightarrow{u_0u_1}\| + \|\overrightarrow{u_1u_2}\| + \|\overrightarrow{u_2u_3}\| + \|\overrightarrow{u_3u_4}\| + \|\overrightarrow{u_4u_5}\| + \|\overrightarrow{u_5u_6}\| \\ &= 2.0192 + 2.0069 + 2.0008 + 2.0008 + 2.0069 + 2.0192 \\ &= 12.0538\end{aligned}$$

Norma vektoru:

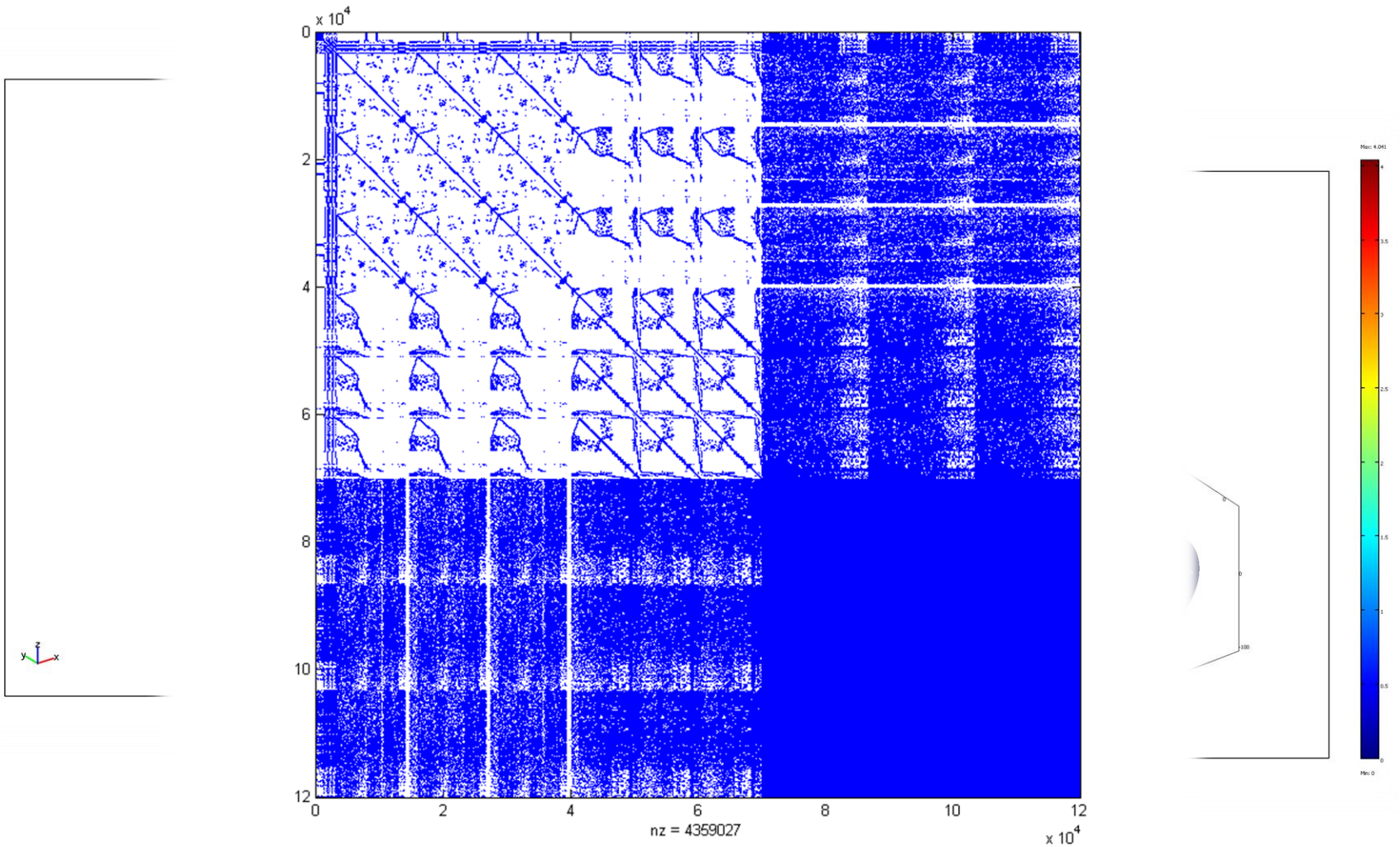
$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u_0u_1}\| &= \sqrt{(h-0)^2 + (u_1-u_0)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 0.278^2} = 2.0192\end{aligned}$$

Pokud jsou sloupy od sebe vzdáleny 12 metrů, potřebujeme 12.0538 metrů vodiče.

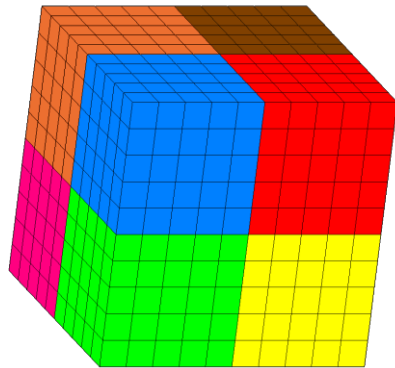
Aplikace III: složitější úloha



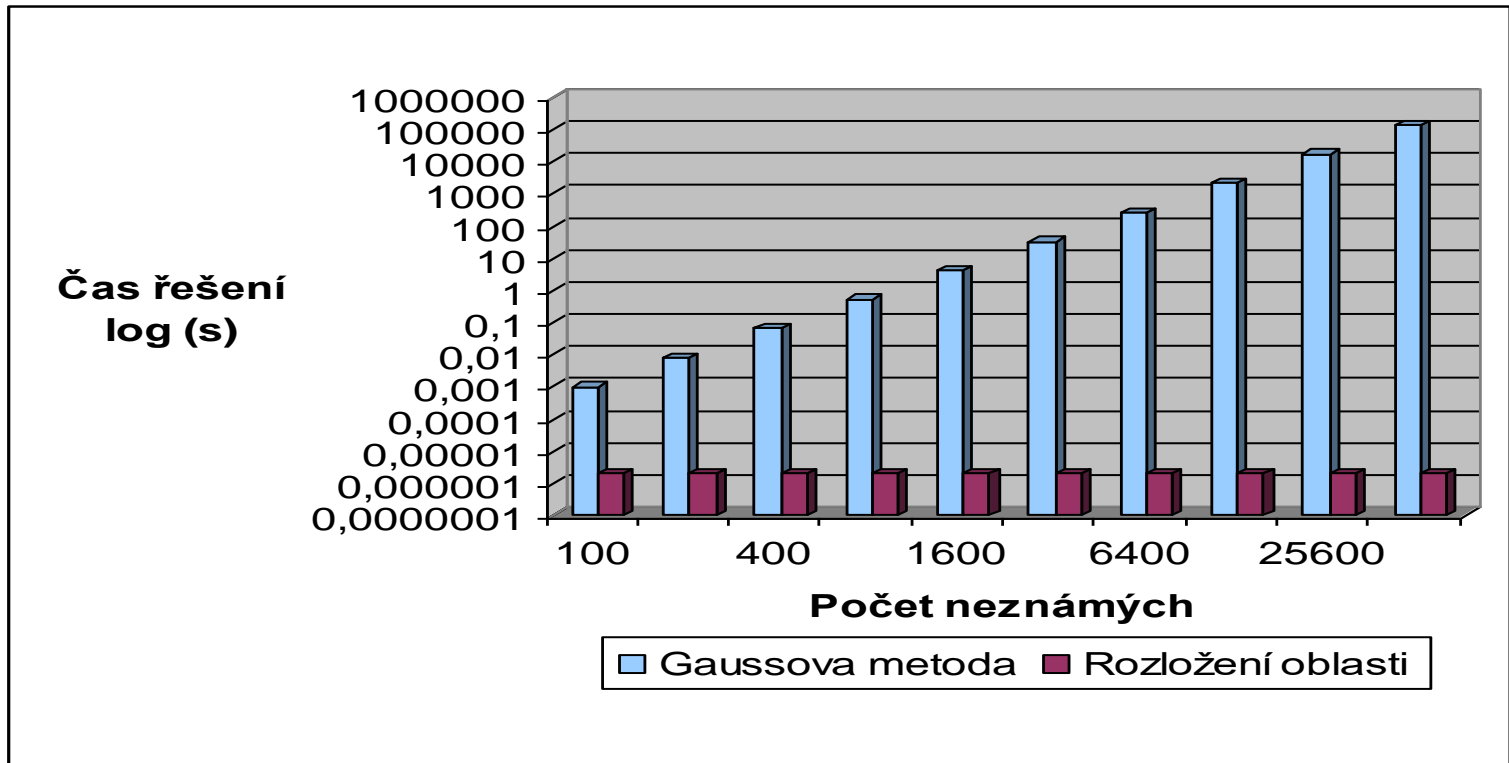
Aplikace IV: ještě složitější úloha



Paralelní řešení



Škálovatelné algoritmy



Současné superpočítače

- **Frontier**
- AMD (proc.)
- HPE Cray OS (OS)
- 8 799 904 jader
- 1 194 PetaFlops
- <http://www.top500.org> (06/2023)



Oak Ridge National Laboratory

IT4Innovations – superpočítače v Ostravě



<http://www.it4i.cz>

IT4Innovations – superpočítače v Ostravě

•Anselm

- zprovozněn v květnu 2013, v provozu do roku 2021

<https://www.it4i.cz/infrastruktura/anselm>

•Salomon

- zprovozněn v září 2015 (tehdy byl 40. nejvýkonnější superpočítač světa), v provozu do roku 2021

<https://www.it4i.cz/infrastruktura/salomon>

•Barbora

- zprovozněn v říjnu 2019

<https://www.it4i.cz/infrastruktura/barbora>

IT4Innovations – superpočítače v Ostravě

•Karolina

- uveden do provozu v roce 2021
 - 95. nejvýkonnější superpočítač světa
(dle <http://www.top500.org> - 06/2023)
- <https://www.it4i.cz/infrastruktura/karolina>

Obsah předmětu

- Matice a maticové operace
- Úpravy a řešení soustav lineárních rovnic
- Inverzní matice
- Vektorové prostory a podprostory
- Lineární nezávislost a báze vektorových prostorů
- Dimenze vektorových prostorů, hodnost matic a řešení soustav
- Lineární zobrazení
- Determinanty
- Spektrální teorie
- Skalární součin a ortogonalita
- Aplikace lineární algebry

Organizace výuky

- Přednáška
- Cvičení

Hodnocení

- Cvičení (max. 30 bodů)
 - 2 písemné testy (každý za 15 bodů)
 - Pro udělení zápočtu je nutno získat minimálně 10 bodů.

Hodnocení

- Písemná zkouška (max. 70 bodů)
 - 50 bodů za příklady
 - 20 bodů za teorii

- Celkem (max. 100 bodů)
 - nevyhověl (0-50 bodů)
 - dobře (51-65 bodů)
 - velmi dobře (66-85 bodů)
 - výborně (86-100 bodů)

Literatura

- Přednášky
 - Z. Dostál, V. Vondrák, D. Lukáš, Lineární algebra, VŠB-TU Ostrava 2012
<http://mi21.vsb.cz/modul/linearni-algebra>
 - Sylaby přednášek na <http://homel.vsb.cz/~ber95/LA/la.htm>
- Cvičení
 - L. Šindel, Sbíрка úloh z algebry, VŠB-TU Ostrava 2006
<https://homel.vsb.cz/~ber95/LA/sbirkauloh.pdf>
 - Sylaby cvičení na <http://homel.vsb.cz/~ber95/LA/la.htm>