Lineární závislost, lineární kombinace, báze

1. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}^4$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně závislé nebo nezávislé:

   (a) $u = (2, -1, 0, 3)$, $v = (1, 2, 5, -4)$, $w = (7, -1, 5, 8)$,

   (b) $u = (1, 2, -2, 0)$, $v = (3, 4, -1, 1)$, $w = (1, 5, 7, 0)$, $x = (-2, 3, 3, -2)$

2. Uvažujme vektorový prostor $P_2 = \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0\colon\ a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující polynomy lineárně závislé nebo nezávislé:

   (a) $p(x) = 3x + 2,\ q(x) = x^2 - 3x - 1,\ r(x) = -x^2 + 3x + 3,$

   (b) $p(x) = 2x^2 - 2x + 2,\ q(x) = -x^2 - 2x + 1,\ r(x) = -6x + 4,$

   (c) $p(x) = x^2 + x + 1,\ q(x) = 2x^2 - x - 1,\ r(x) = -6x - 10.$

3. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{C}^3$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně závislé nebo nezávislé:

   $$u = (2, 2 + 2i, 2i),\ v = (1 - i, 1 + 3i, -1 + i),\ w = (1 + i, 1 - i, 1 + i).$$

4. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}^4$. V závislosti na parametrech a, b, rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti zadaných vektorů:

   $u_1 = (1, 2 + a, 4, 6)$, $u_2 = (1, 2, 3 - b, 3)$, $u_3 = (2, 4, b - 6, 7)$, $u_4 = (1, 2 - a, 2 - b, 1)$.

5. Uvažujme vektorový prostor $P_2 = \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0\colon\ a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$. Rozhodněte, zda je polynom $p(x) = x^2 + 2$ lineární kombinací polynomů $q(x) = x^2 - x$, $r(x) = x + 1$.

6. Uvažujme vektorový prostor P_3 polynomů stupně maximálně 3. Polynom $p(x) = 7x^3 - 7x^2 + 4x - 1$ vyjádřete jako lineární kombinaci polynomů $q(x) = x^3 + 3x^2 - x + 2$, $r(x) = 2x^2 - x + 3$, $s(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 1$.

7. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^6$ jsou dány podprostory $W_1 = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ a $W_2 = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$. Určete bázi a dimenzi podprostorů W_1, W_2. Přitom
   $u_1 = (0, 1, 0, 1, 0, -1)$, $u_2 = (-2, -1, -1, 0, 0, -1)$, $u_3 = (1, 1, 0, 2, 1, 0)$,
   $v_1 = (2, 1, 1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (2, 2, 1, 1, 0, 0)$, $v_3 = (2, -1, 1, -2, 0, 3)$.

8. Nechť $\mathrm{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathrm{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathrm{e}_3 = (0, 0, 1)$, $x = (1, 1, 1)$, $y = (0, 1, 1)$, $z = (1, -1, 0)$, $u = (1, 1, 0)$ jsou vektory z $\mathbb{R}^3$.
   a) Který z vektorů e_1, e_2, e_3 lze nahradit vektorem x abychom dostali bázi $\mathbb{R}^3$?
   b) Který z vektorů e_1, e_2, e_3 lze nahradit vektorem y abychom dostali bázi $\mathbb{R}^3$?
   c) Který z vektorů e_1, e_2, e_3 lze nahradit vektorem z abychom dostali bázi $\mathbb{R}^3$?
   d) Který z vektorů e_1, z, u lze nahradit vektorem e_2 abychom dostali bázi $\mathbb{R}^3$?

9. Jakým podmínkám musí vyhovovat číslo a, aby následující vektory tvořily bázi prostoru $\mathbb{R}^3$:

   (a) $(1, 1, 1)$, $(1, a, a^2)$,

(b) $(0, a, a)$, $(a, a, 1)$, $(0, 1, a)$.

10. Množina všech matic typu (2,2) je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ (vzhledem k operacím sčítání matic a součinu čísla s maticí).

    (a) Určete libovolnou bázi tohoto vektorového prostoru.

    (b) Určete dimenzi tohoto vektorového prostoru.

    (c) Vyjádřete matici D jako lineární kombinaci matic A, B, C, je-li
    $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad D = \begin{bmatrix} 9 & -16 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$

11. Udejte příklad vektorů u, v, $w \in \mathbb{R}^2$, které jsou lineárně závislé a přitom vektor u nelze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů v, w.

12. Nalezněte v $\mathbb{R}^3$ tři báze, které mají společný vektor $(1, 1, 1)$, ale už žádný jiný.

Výsledky

1. (a) lineárně nezávislé,

   (b) lineárně závislé,

2. (a) lineárně nezávislé,

   (b) lineárně závislé,

   (c) lineárně nezávislé,

3. lineárně závislé,

4. pro $a \neq 0$ a $b \neq 6$ jsou vektory lineárně nezávislé, jinak jsou lineárně závislé,

5. není,

6. $p(x) = q(x) - 2r(x) + 3s(x)$,

7. $dim(W_1) = 3$, bázi tvoří vektory u_1, u_2, u_3,
   $dim(W_2) = 2$, bázi tvoří vektory v_1, v_2,

8. (a) libovolný,

   (b) e_2 nebo e_3,

   (c) e_1 nebo e_2.

   (d) Vektory e_1, z, u netvoří bázi $\mathbb{R}^3$. Pokud libovolný z těchto vektorů nahradíme vektorem e_2 také nedostaneme bázi $\mathbb{R}^3$.

9. (a) Vektory nemohou nikdy tvořit bázi $\mathbb{R}^3$.

   (b) Vektory tvoří bázi pro každé $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

10. (a) Například $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

    (b) dimenze je 4

    (c) $D = 2A + 5B - C$