Cvičení č. 8

Lineární zobrazení. Jádro a obor hodnot. Matice lineárního zobrazení.

Lineární zobrazení

Definice:

Zobrazení $A:U\to V$, kde U a V jsou vektorové prostory se nazývá lineární, jestliže

1. $\forall u,v\in U : A(u+v)=A(u)+A(v)$
2. $\forall \alpha\in R\ \forall u\in U : A(\alpha u)=\alpha A(u)$

Množinu všech lineárních zobrazení U do V značíme $A\in L(U,V)$.

Příklad:

Rozhodněte, zda-li zobrazení $A:R^3\to R^2$ definované předpisem

$$A([x_1,x_2,x_3])=[x_1-x_2,x_2+x_3]$$

je lineární.

Řešení:

1. $\forall u,v\in R^3 : A(u+v)=A(u)+A(v)$

Zvolme $u=[u_1,u_2,u_3], v=[v_1,v_2,v_3]$. Pak

$$A(u+v)=A([u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3])=[(u_1+v_1)-(u_2+v_2),(u_2+v_2)+(u_3+v_3)]=$$
$$=[u_1-u_2+v_1-v_2,u_2+u_3+v_2+v_3]=[u_1-u_2,u_2+u_3]+[v_1-v_2,v_2+v_3]=A(u)+A(v)$$

2. $\forall \alpha\in R\ \forall u\in R^3 : A(\alpha u)=\alpha A(u)$.

$$A(\alpha u)=A([\alpha u_1,\alpha u_2,\alpha u_3])=[(\alpha u_1)-(\alpha u_2),(\alpha u_2)+(\alpha u_3)]=[\alpha(u_1-u_2),\alpha(u_2+u_3)]=$$
$$\alpha[u_1-u_2,u_2+u_3]=\alpha A(u)$$

Z 1. a 2. tedy vyplývá, že zobrazení A je lineární. ♦

Příklad:

Rozhodněte, zda-li zobrazení $D:P_3\to P_2$ definované předpisem

$$D(p)=2ax+b,\ \forall p\in P_3 : p(x)=ax^2+bx+c$$

je lineární.

Řešení:

1. $\forall p,q\in P_3 : D(p+q)=D(p)+D(q)$.

Zvolme $p(x)=ax^2+bx+c, q=dx^2+ex+f$. Pak

$$D(p+q)=D\big((a+d)x^2+(b+e)x+(c+f)\big)=2(a+d)x+(b+e)=2ax+b+2dx+e=$$
$$=D(p)+D(q)$$

2. $\forall \alpha\in R\ \forall p\in P_3 : D(\alpha p)=\alpha D(p)$.

$$D(\alpha p)=D\big((\alpha a)x^2+(\alpha b)x+(\alpha c)\big)=2(\alpha a)x+(\alpha b)=\alpha(2ax+b)=\alpha D(p)$$

Z 1. a 2. tedy vyplývá, že zobrazení D je lineární. ♦

Příklad:

Rozhodněte, zda-li zobrazení $B:P_3\to R^2$ definované předpisem

$$B(p) = [a^2, b+c+1],\ \forall p \in P_3 : p(x) = ax^2 + bx + c$$

je lineární.

Řešení:

1. $\forall p, q \in P_3 : B(p+q) = B(p) + B(q)$.

Zvolme $p(x) = ax^2 + bx + c, q = dx^2 + ex + f$. Pak

$$D(p+q) = D\big((a+d)x^2 + (b+e)x + (c+f)\big) = [(a+d)^2, (b+e)+(c+f)+1] =$$
$$= [a^2 + 2ad + d^2, b+c+1+e+f+1-1] = [a^2, b+c+1] + [d^2, e+f+1] + [2ad, -1] =$$
$$D(p) + D(q) + [2ad, -1] \neq D(p) + D(q)$$

Zobrazení B tedy není lineární. ♦

Věta:

Je-li $A \in L(U,V)$ pak pro libovolné skaláry $\alpha_1, ..., \alpha_n$ a vektory $v_1, ..., v_n \in U$ platí

$$A(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 A(v_1) + ... + \alpha_n A(v_n).$$

Důsledek:

Lineární zobrazení je jednoznačně definováno obrazy vektorů báze.

Příklad:

Je dáno lineární zobrazení $A: R^3 \to R^2$ definované předpisy

$$A([1,1,0]) = [1,2],$$
$$A([0,1,1]) = [1,1],$$
$$A([1,0,1]) = [-1,0].$$

Určete obraz $A([2,1,-1])$ a takové $x \in R^3$ aby $A(x) = [3,-1]$.

Řešení:

A. $A([2,1,-1]) = ?$

Jelikož, jsou dány obrazy báze R^3, můžeme nalézt takové $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, že

$$[2,1,-1] = \alpha_1[1,1,0] + \alpha_2[0,1,1] + \alpha_3[1,0,1]$$
$$[2,1,-1] = [\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3]$$

Odtud dostáváme soustavu 3 rovnic o 3 neznámých:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \quad\quad\ + \alpha_3 &= 2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \quad\quad\ &= 1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= -1 \end{aligned}$$

kterou řešíme Gaussovou eliminační metodou

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -r_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 0 \end{array}$$

Podle předchozí věty pak můžeme psát

$$A([2,1,-1]) = A(\alpha_1[1,1,0] + \alpha_2[0,1,1] + \alpha_3[1,0,1]) = \alpha_1 A([1,1,0]) + \alpha_2 A([0,1,1]) + \alpha_3 A([1,0,1]) =$$
$$= \alpha_1[1,2] + \alpha_2[1,1] + \alpha_3[-1,0] = 2[1,2] + (-1)[1,1] + 0[-1,0] = [1,3].$$

Vektor [2,1,-1] se tedy zobrazí na vektor [1,3], tj. $A([2,1,-1])=[1,3]$.

B. $x\in R^3, x=?,\ A(x)=[3,-1]$

Zkusíme tedy zjistit, zda-li se dá vektor [3,-1] vyjádřit jako kombinace obrazů, pro které máme předepsáno zobrazení.

Dostáváme tedy soustavu 2 rovnic o 3 neznámých

$$\begin{array}{rrrcr} \alpha_1 & +\alpha_2 & -\alpha_3 & = & 3 \\ 2\alpha_1 & +\alpha_2 & & = & -1 \end{array}$$

Soustavu řešíme Gaussovou eleminační metodou:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ -2r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

Volíme $\alpha_3=t, t\in R$ a dostáváme $\alpha_2=7+2t, \alpha_1=-4-t$.

Vektor [3,-1] lze tedy vyjádřit jako lineární kombinaci obrazů. Kdyby tomu tak nebylo, pak by vektor [3,-1] nepatřil do oboru hodnot a pak by neexistoval žádný vektor $x\in R^3$, takový, že $A(x)=[3,-1]$.

Každopádně můžeme psát

$[3,-1]=(-4-t)[1,2]+(7+2t)[1,1]+t[-1,0], \forall t\in R$

a tedy

$$A(x)=(-4-t)A([1,1,0])+(7+2t)A([0,1,1])+tA([1,0,1])=$$
$$=A\big((-4-t)[1,1,0]+(7+2t)[0,1,1]+t[1,0,1]\big)=A\big([-4,3+t,7+3t]\big), \forall t\in R.$$

Odtud tedy dostáváme, že $A(x)=[3,-1]$ pro $x=[-4,3+t,7+3t], \forall t\in R$.

Na vektor [3,-1] se tedy zobrazí celá množina vektorů

$\{x\in R^3 : x=[-4,3+t,7+3t], \forall t\in R\}=\{x\in R^3 : x=[-4,3,7]+[0,1,3]t, \forall t\in R\}$. ♦

<u>Jádro a obor hodnot lineárního zobrazení</u>

Definice:

Jádrem lineárního zobrazení je množina $N(A)=\{u\in U : A(u)=o\}$.

Oborem hodnot lineárního zobrazení $A\in L(U,V)$ je množina

$H(A)=\{v\in V : \exists u\in U, A(u)=v\}$.

Věta:

Nechť $A\in L(U,V)$. Pak jádro tvoří podprostor *U* a obor hodnot tvoří podprostor *V*.

Příklad:

Je dáno lineární zobrazení $A: R^3\to R^3$ definované předpisy

$A([1,1,0])=[1,2,1]$,

$A([0,1,1])=[1,1,0]$,

$A([1,0,1])=[0,1,1]$.

Nalezněte jádro a obor hodnot tohoto zobrazení a určete jejich dimenze.

Řešení:

A. Hledáme $x \in R^3$ takové, že $A(x) = o$. Tato úloha je analogická případu B. v předchozím příkladě. Hledáme tedy takovou lineární kombinaci, aby

$[0,0,0] = \alpha_1[1,2,1] + \alpha_2[1,1,0] + \alpha_3[0,1,1]$

$[0,0,0] = [\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3]$

Odtud dostáváme soustavu 3 rovnic o 3 neznámých:

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_1 & +\alpha_2 & & = & 0 \\ 2\alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & & +\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

kterou řešíme Gaussovou eliminační metodou

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ -r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \alpha_1 = -t \\ \alpha_2 = t \\ \alpha_3 = t, t \in R \end{matrix}$$

$[0,0,0] = -t[1,2,1] + t[1,1,0] + t[0,1,1],\ \forall t \in R$.

Tuto rovnici můžeme přepsat do tvaru

$A(x) = -tA([1,1,0]) + tA([0,1,1]) + tA([1,0,1]) = A(-t[1,1,0] + t[0,1,1] + t[1,0,1]) = A([0,0,2t])$.

Odtud dostáváme, že $A(x) = [0,0,0]$ pro $x = [0,0,2t], \forall t \in R$.

Jádrem A je tedy množina $N(A) = \{x \in R^3 : x = [0,0,2t], \forall t \in R\} = \langle [0,0,2] \rangle$.

Jelikož samotný vektor [0,0,2] je lineárně nezávislý, tvoří taktéž bázi $N(A)$ a dim$N(A)$=1.

B. Pokud chceme určit obor hodnot $H(A)$, musíme určit takové $y \in R^3$, že existuje $x \in R^3$ a $A(x) = y$.

Vezměme tedy libovolné $y = [y_1, y_2, y_3] \in R^3$. Ptáme se, zda-li se dá tento vektor vyjádřit jako lineární kombinace obrazů vektorů báze, pro které máme předepsáno zobrazení A.

$[y_1, y_2, y_3] = \alpha_1[1,2,1] + \alpha_2[1,1,0] + \alpha_3[0,1,1]$

$[y_1, y_2, y_3] = [\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3]$

Odtud dostáváme soustavu 3 rovnic o 3 neznámých se 3 parametry $y_1, y_2, y_3 \in R$:

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_1 & +\alpha_2 & & = & y_1 \\ 2\alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & = & y_2 \\ \alpha_1 & & +\alpha_3 & = & y_3 \end{array}$$

kterou řešíme Gaussovou eliminační metodou

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y_1 \\ 2 & 1 & 1 & y_2 \\ 1 & 0 & 1 & y_3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ -r_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & -1 & 1 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & -1 & 1 & y_3 - y_1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -r_2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & -1 & 1 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_3 - y_2 + y_1 \end{array}\right)$$

Z poslední matice je zřejmé, že soustava má řešení pouze je-li $y_3 - y_2 + y_1 = 0$. Pro takové vektory existuje řešení $\alpha_3 = t, \alpha_2 = 2y_1 - y_2 + t, \alpha_1 = -y_1 + y_2 - t, \forall t \in R$. Potom platí, že

$[y_1, y_2, y_3] = \alpha_1[1,2,1] + \alpha_2[1,1,0] + \alpha_3[0,1,1]$

$A(x) = \alpha_1 A([1,1,0]) + \alpha_2 A([0,1,1]) + \alpha_3 A([1,0,1]) = A(\alpha_1[1,1,0] + \alpha_2[0,1,1] + \alpha_3[1,0,1])$

Odtud dostáváme, že pro vektory $y = [y_1, y_2, y_3] \in R^3$ takové, že $y_3 - y_2 + y_1 = 0$ existují vzory

$$x = \alpha_1[1,1,0] + \alpha_2[0,1,1] + \alpha_3[1,0,1] = (-y_1 + y_2 - t)[1,1,0] + (2y_1 - y_2 + t)[0,1,1] + t[1,0,1] =$$
$$= [-y_1 + y_2, y_1, 2y_1 - y_2 + 2t], \forall t \in R.$$

Obor hodnot má tedy tvar

$$H(A) = \{[y_1, y_2, y_3] \in R^3 : y_3 - y_2 + y_1 = 0\} = \{[y_1, y_2, -y_1 + y_2] \in R^3 : \forall y_1, y_2 \in R\} =$$
$$= \{y_1[1,0,-1] + y_2[0,1,1] : \forall y_1, y_2 \in R\} = \langle [1,0,-1],[0,1,1] \rangle.$$

Z posledního je patrné, že vektory $[1,0,-1],[0,1,1]$ tvoří bázi $H(A)$ a tudíž dim $H(A)$ =2. ♦

Matice lineárního zobrazení

Definice:
Nechť $A \in L(U,V)$ a nechť $E = (e_1,...,e_m)$ je báze U a $F = (f_1,..., f_n)$ je báze V. Maticí lineárního zobrazení A rozumíme matici

$$[A]_{E,F} = [[A(e_1)]_F ,...,[A(e_m)]_F],$$

kde souřadnicové vektory $[A(e_i)]_F$ uvažujeme jako sloupcové.

Věta:
Nechť $A \in L(U,V)$ a nechť $E = (e_1,...,e_m)$ je báze U a $F = (f_1,..., f_n)$ je báze V. Pak platí

$$[A(u)]_F = [A]_{E,F}[u]_E, \forall u \in U.$$

Příklad:
Pro lineární zobrazení $D : P_3 \to P_2$ definované předpisem

$$D(p) = 2ax + b, \forall p \in P_3 : p(x) = ax^2 + bx + c$$

sestavte matici vzhledem k bázím $E = (e_1, e_2, e_3), e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2$ a $F = (f_1, f_2), f_1(x) = x + 1, f_2(x) = x - 1$. Nalezněte souřadnice obrazu mnohočlenu $p(x) = x^2 - 2x + 3$ vzhledem k bázi F.

Řešení:
Abychom mohli sestavit matici $[D]_{E,F} = [[D(e_1)]_F ,[D(e_2)]_F ,[D(e_3)]_F],$ musíme nejdříve určit obrazy vektorů báze E, tj. $D(e_1) = 0, D(e_2) = 1, D(e_3) = 2x.$
Dále musíme určit souřadnice těchto obrazů vzhledem k bázi F. Tzn. musíme řešit 3 rovnice

$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = D(e_1),$

$\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 = D(e_2),$

$\gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 = D(e_3).$

Tyto 3 rovnice mají stejné levé strany a liší se pouze v pravých stranách. Proto rozepíšeme pouze první rovnici a ostatní budou analogické.

$\alpha_1(x + 1) + \alpha_2(x - 1) = 0,$

$(\alpha_1 + \alpha_2)x + (\alpha_1 + \alpha_2) = 0.$

Toto vede na soustavu

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 & +\alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & = & 0 \end{array}$$

Pro neznámé β a γ se pak změní pravé strany a tak můžeme řešit všechny 3 úlohy najednou pomocí Gauss-Jordanovy metody se 3 různými pravými stranami.

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} -r_2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 & \beta_1 = \frac{1}{2} \quad \gamma_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 & \beta_2 = -\frac{1}{2} \quad \gamma_2 = 1 \end{cases}$$

Odtud

$$[D(e_1)]_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [D(e_2)]_F = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, [D(e_3)]_F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Hledaná matice má tedy tvar

$$[D]_{E,F} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Pokud chceme určit souřadnice obrazu vektoru p vzhledem k bázi F, pak nejdříve vypočteme

souřadnice $[p]_E = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, neboť $p = 3e_1 - 2e_2 + e_3$. Pak

$$[D(p)]_F = [D]_{E,F}[p]_E = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Lehce se dá ověřit, že $D(p) = 2x - 2 = 0f_1 + 2f_2$. ♦

Příklad:
Je dáno lineární zobrazení $D: P_3 \to P_2$ z předchozího příkladu. Určete takový vzor $p \in P_3$ aby $D(p) = x + 1$.

Řešení:
K řešení využijeme matici zobrazení *D*, kterou jsme sestavili v předchozím příkladě. Pro matici lineárního zobrazení totiž platí $[D(p)]_F = [D]_{E,F}[p]_E$, kde *E* je báze P_3 a *F* je báze P_2. Jelikož souřadnice obrazu $D(p) = x + 1$ vzhledem k bázi *F* jsou $[D(p)]_F = [1,0]$ můžeme souřadnice $[p]_E = [x_1, x_2, x_3]$ hledaného mnohočlenu *p* vzhledem k bázi *E* určit ze soustavy lineárních rovnic $[D]_{E,F}[p]_E = [D(p)]_F$. Řešíme tedy Gaussovou eliminační metodou.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \cdot 2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Jelikož u neznámé x_1 není vedoucí prvek volíme ji za parametr a tedy $x_1 = t, t \in R$. Dále dostáváme $x_2 = 1, x_3 = \frac{1}{2}$. Souřadnice hledaného vzoru *p* vzhledem k bázi *E* jsou tedy $[p]_E = [t, 1, \frac{1}{2}], \forall t \in R$. Hledaný vzor má tedy tvar

$$p(x) = te_1(x) + 1e_2(x) + \tfrac{1}{2}e_1(x) = t + x + \tfrac{1}{2}x^2, \forall t \in R.$$ ♦