Cvičení č. 5

Vektorové prostory a podprostory.

Vektorové prostory

Definice:

Reálným (komplexním) vektorovým prostorem nazýváme množinu V na níž je definováno zobrazení $V \times V \ni (u,v) \rightarrow u+v \in V$, které nazýváme sčítání vektorů a zobrazení $R(C) \times V \ni (\alpha, v) \rightarrow \alpha v \in V$, které nazýváme násobení vektoru skalárem, a pro něž platí

$(V1)\ \forall u,v,w \in V : u+(v+w)=(u+v)+w$

$(V2)\ \exists o \in V\ \forall u \in V : u+o=o+u=u$

$(V3)\ \forall u \in V\ \exists -u \in V : u+(-u)=(-u)+u=o$

$(V4)\ \forall u,v \in V : u+v=v+u$

$(V5)\ \forall \alpha \in R(C) \forall u,v \in V : \alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$

$(V6)\ \forall \alpha,\beta \in R(C) \forall u \in V : (\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$

$(V7)\ \forall \alpha,\beta \in R(C) \forall u \in V : \alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$

$(V8)\ \forall u \in V : 1u=u$

Prvky množiny V pak nazýváme vektory a prvky množiny $R(C)$ skaláry.

Příklad:

Dokažte, že $R^n = \{[u_1,u_2,...,u_n], u_i \in R, i=1,...,n\}$, s operacemi definovanými předpisy $[u+v]_i=[u]_i+[v]_i, [\alpha u]_i=\alpha[u]_i, i=1,...n.$
tvoří reálný vektorový prostor.

$(V1) \forall u,v,w \in R^n : [u+(v+w)]_i = [u]_i + [v+w]_i = [u]_i + ([v]_i + [w]_i) = ([u]_i + [v]_i) + [w]_i =$
$= [u+v]_i + [w]_i = [(u+v)+w]_i$, pro lib. i a odtud $u+(v+w)=(u+v)+w.$

$(V2) \exists o=[0,...,0] \forall u \in R^n : [o+u]_i = [o]_i + [u]_i = 0+[u]_i = [u]_i = [u]_i + 0 = [u]_i + [o]_i = [u+o]_i$,
pro lib. i a odtud $o+u=u=u+o.$

$(V3) \forall u \in R^n \exists -u=[-u_1,...,-u_n] : [u+(-u)]_i = [u]_i + [-u]_i = u_i + (-u_i) = 0 = (-u_i)+u_i =$
$[-u]_i + [u]_i = [-u+u]_i$, pro lib. i a odtud $u+(-u)=o=-u+u.$

$(V4) \forall u,v \in R^n : [u+v]_i = [u]_i + [v]_i = [v]_i + [u]_i = [v+u]_i$, pro lib. i a odtud $u+v=v+u.$

$(V5) \forall \alpha \in R \forall u,v \in R^n : [\alpha(u+v)]_i = \alpha[u+v]_i = \alpha([u]_i+[v]_i) = \alpha[u]_i + \alpha[v]_i = [\alpha u]_i + [\alpha v]_i =$
$= [\alpha u + \alpha v]_i$, pro lib. i a odtud $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v.$

$(V6) \forall \alpha,\beta \in R \forall u \in R^n : [(\alpha+\beta)u]_i = (\alpha+\beta)[u]_i = \alpha[u]_i + \beta[u]_i) = [\alpha u]_i + [\beta u]_i = [\alpha u+\beta u]_i$,
pro lib. i a odtud $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u.$

$(V7) \forall \alpha,\beta \in R \forall u \in R^n : [(\alpha(\beta u)]_i = \alpha[\beta u]_i = \alpha(\beta[u]_i) = (\alpha\beta)[u]_i = [(\alpha\beta)u]_i$,
pro lib. i a odtud $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u.$

$(V8) \forall u \in R^n : [1u]_i = 1[u]_i = [u]_i$, pro lib. i a odtud $1u=u.$

R^n tedy tvoří s operací sčítání aritmetických vektorů a s operací násobení aritmetických vektorů skalárem reálný vektorový prostor. ♦

Analogicky se dá dokázat, že taktéž C^n (množina všech uspořádaných komplexních n-tic) tvoří s operací sčítání a násobení komplexním skalárem komplexní vektorový prostor.

Příklad:
Dokažte, že množina F všech realných funkcí $f : R \to R$ s operacemi sčítání funkcí a násobení funkce skalárem definovanými předpisy
$f + g : x \to f(x) + g(x),\ \alpha f : x \to \alpha f(x),\ \forall x \in R$
tvoří reálný vektorový prostor.

$(V1) \forall f, g, h \in F : (f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) =$
$= (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) = ((f + g) + h)(x)$, pro $\forall x \in R$ a odtud
$f + (g + h) = (f + g) + h.$
$(V2) \exists o \in F, o(x) = 0 \forall x \in R, \forall f \in F : (f + o)(x) = f(x) + o(x) = f(x) + 0 =$
$f(x) = 0 + f(x) = o(x) + f(x) = (o + f)(x)$, pro $\forall x \in R$ a odtud $f + o = f = o + f.$
$(V3) \forall f \in F\ \exists -f \in F, (-f)(x) = -f(x), \forall x \in R : (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) =$
$= f(x) + (-f(x)) = 0 = o(x) = -f(x) + f(x) = (-f)(x) + f(x) = (-f + f)(x)$, pro $\forall x \in R$ a odtud
$f + (-f) = o = -f + f.$
$(V4) \forall f, g \in F : (f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$, pro $\forall x \in R$ a odtud
$f + g = g + f.$
$(V5) \forall \alpha \in R, \forall f, g \in F : (\alpha(f + g))(x) = \alpha(f + g)(x) = \alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) =$
$= (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) = (\alpha f + \alpha g)(x)$, pro $\forall x \in R$ a odtud $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g.$
$(V6) \forall \alpha, \beta \in R, \forall f \in F : ((\alpha + \beta) f)(x) = (\alpha + \beta) f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x)) = (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) =$
$= (\alpha f + \beta f)(x)$, pro $\forall x \in R$ a odtud $(\alpha + \beta) f = \alpha f + \beta f.$
$(V7) \forall \alpha, \beta \in R, \forall f \in F : (\alpha(\beta f))(x) = \alpha(\beta f)(x) = \alpha(\beta f(x)) = (\alpha\beta) f(x) = ((\alpha\beta) f)(x),$
pro $\forall x \in R$ a odtud $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta) f.$
$(V8) \forall f \in F : (1f)(x) = 1f(x) = f(x)$, pro $\forall x \in R$ a odtud $1f = f.$ ♦

Příklad:
Množina $R^{m,n}$ všech reálných matic typu (m,n) s operacemi sčítání matic a násobení matice skalárem definovanými předpisy
$[A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}, [\alpha A]_{ij} = \alpha[A]_{ij}, i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n,$
kde A,B jsou lib. reálné matice typu (m,n) a α lib. skalár, tvoří reálný vektorový prostor.

$(V1)\ \forall A, B, C \in R^{m,n} : A + (B + C) = (A + B) + C$ viz Cvičení 2, vlastnosti maticových operací, č.8
$(V2)\ \exists O \in R^{m,n}, [O]_{ij} = 0, i = 1,..,m,\ j = 1,..n, \forall A \in R^{m,n} : A + O = O + A = A$ viz Cvičení 2, vlastnosti maticových operací, č.9
$(V3)\ \forall A \in R^{m,n} \exists -A \in R^{m,n}, [-A]_{ij} = -[A]_{ij}, i = 1,..,m,\ j = 1,..n,: A + (-A) = -A + A = O$
viz Cvičení 2, vlastnosti maticových operací, č.10

$(V4)\ \forall A,B \in R^{m,n} : A+B = B+A$ viz Cvičení 2, vlastnosti maticových operací, č.7

$(V5)\ \forall \alpha \in R\ \forall A,B \in R^{m,n} : \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ viz Cvičení 2, vlastnosti maticových operací, č.4

$(V6)\ \forall \alpha,\beta \in R\ \forall A \in R^{m,n} : (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ viz Cvičení 2, vlastnosti maticových operací, č.3

$(V7)\ \forall \alpha,\beta \in R\ \forall A \in R^{m,n} : \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ viz Cvičení 2, vlastnosti maticových operací, č.5

$(V8)\ \forall A \in R^{m,n} : 1A = A$ viz Cvičení 2, vlastnosti maticových operací, č.2 ♦

Vektorové podprostory

Definice:
Neprázdná podmnožina *U* vektorového prostoru *V* se nazývá podprostorem *V*, je-li sama vektorovým prostorem vzhledem k operacím sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem definovanými na *V*.

Věta:
Nechť *U* je neprázdná podmnožina vektorového prostoru V. Jestliže

1. $\forall u,v \in U$ je $u+v \in U$
2. $\forall \alpha \in R(C) \forall u \in U$ je $\alpha u \in U$

pak *U* je podprostorem vektorového prostoru *V*.

Příklad:
Rozhodněte, zda-li je množina $U = \{[u_1,u_2,0] : u_1,u_2 \in R\}$ podprostorem R^3.

Je zřejmé, že $U \subset R^3$ neboť jestliže $u = [u_1,u_2,0] \in U \Rightarrow u \in R^3$

1. $u = [u_1,u_2,0] \in U$ a $v = [v_1,v_2,0] \in U \Rightarrow u+v = [u_1+v_1, u_2+v_2, 0+0] = [w_1,w_2,0] \in U$
2. $u = [u_1,u_2,0] \in U$ a lib. skalár $\alpha \Rightarrow \alpha u = [\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha 0] = [w_1,w_2,0] \in U$

Podle předchozí věty je tedy *U* podprostorem R^3. ♦

Příklad:
Rozhodněte, zda-li je množina $U = \{[u_1,u_2,1] : u_1,u_2 \in R\}$ podprostorem R^3.

Je zřejmé, že $U \subset R^3$ neboť jestliže $u = [u_1,u_2,1] \in U \Rightarrow u \in R^3$.
Avšak množina *U* není podprostorem R^3 neboť v U neexistuje nulový vektor $o \in U$ tak, že $\forall u \in U$ je $u+o=u$. Vskutku $[u_1,u_2,1]+[o_1,o_2,1] = [u_1+o_1, u_2+o_2, 2] \neq [u_1,u_2,1]$ neboť pro poslední složku je vždy $2 \neq 1$. ♦

Příklad:
Rozhodněte, zda-li je množina $U = \{[u_1,u_2,u_3] : u_1+u_2-u_3 = 0\}$ podprostorem R^3.

Je zřejmé, že $U \subset R^3$ neboť jestliže $u \in U \Rightarrow u \in R^3$.

1. $u=[u_1,u_2,u_3]\in U, u_1+u_2-u_3=0$, a $v=[v_1,v_2,v_3]\in U, v_1+v_2-v_3=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow u+v=[u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3]=[w_1,w_2,w_3]$ a zároveň $u_1+u_2-u_3=0 \wedge v_1+v_2-v_3=0$
Odtud $0=0+0=u_1+u_2-u_3+v_1+v_2-v_3=(u_1+v_1)+(u_2+v_2)-(u_3+v_3)=w_1+w_2-w_3$
Odtud dostáváme, že $u+w\in U$.
2. $u=[u_1,u_2,u_3]\in U, u_1+u_2-u_3=0$, a α lib. skalár $\Rightarrow \alpha u=[\alpha u_1,\alpha u_2,\alpha u_3]=[w_1,w_2,w_3]$
a zároveň $u_1+u_2-u_3=0$. Odtud $0=\alpha 0=\alpha(u_1+u_2-u_3)=\alpha u_1+\alpha u_2-\alpha u_3=w_1+w_2-w_3$
Odtud dostáváme, že $\alpha u\in U$.
U je tedy podprostorem vektorového prostoru R^3. ♦

Příklad:
Dokažte, že množina P_{n+1} všech mnohočlenů stupně nejvýše n je podprostorem vektorového prostoru všech reálných funkcí F.

Je zřejmé, že každý mnohočlen $p\in P_{n+1}$ definovaný předpisem $p(x)=a_nx^n+...+a_1x^1+a_0$,
kde $x,a_n,...,a_1,a_0\in R$ je reálnou funkcí a tedy $P_{n+1}\subset F$
1. $p\in P_{n+1}, p(x)=a_nx^n+...+a_1x^1+a_0$ a $q\in P_{n+1}, q(x)=b_nx^n+...+b_1x^1+b_0 \Rightarrow (p+q)(x)=$
$=p(x)+q(x)=a_nx^n+...+a_1x^1+a_0+b_nx^n+...+b_1x^1+b_0=$
$=(a_n+b_n)x^n+...+(a_1+b_1)x^1+(a_0+b_0)$ a odtud $p+q\in P_{n+1}$
2. $p\in P_{n+1}, p(x)=a_nx^n+...+a_1x^1+a_0$ a $\alpha\in R \Rightarrow (\alpha p)(x)=\alpha p(x)=$
$=\alpha(a_nx^n+...+a_1x^1+a_0)=(\alpha a_n)x^n+...+(\alpha a_1)x^1+(\alpha a_0)$ a odtud $\alpha p\in P_{n+1}$

Podle věty tedy plyne, že P_{n+1} je podprostorem vektorového prostoru F. ♦

Příklad:
Rozhodněte, zda-li množina mnohočlenů $U=\{p(x)=a_2x^2+a_2x+a_0 : a_0,a_2\in R\}$ je podprostorem P_3.

Je zřejmé, že každý prvek množiny U je mnohočlenem stupně nejvýše 2 a tedy i prvkem P_3.
Odtud tedy $U\subset P_3$.
1. $p\in U, p(x)=a_2x^2+a_2x+a_0$ a $q\in P_{n+1}, q(x)=b_2x^2+b_2x+b_0 \Rightarrow (p+q)(x)=$
$=p(x)+q(x)=a_2x^2+a_2x+a_0+b_2x^2+b_2x+b_0=(a_2+b_2)x^2+(a_2+b_2)x+(a_0+b_0)=$
$=c_2x^2+c_2x+c_0$ a odtud $p+q\in P_{n+1}$
2. $p\in U, p(x)=a_2x^2+a_2x+a_0$ a $\alpha\in R \Rightarrow (\alpha p)(x)=\alpha p(x)=$
$=\alpha(a_2x^2+a_2x+a_0)=(\alpha a_2)x^2+(\alpha a_2)x+(\alpha a_0)=c_2x^2+c_2x+c_0$ a odtud $\alpha p\in U$
U je tedy podprostorem vektorového prostoru P_3. ♦

Věta:
Nechť V je libovolný vektorový prostor a $v_1,v_2,...,v_m\in V$ jeho libovolné vektory. Množina $U=\{v\in V : v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+\alpha_mv_m, \forall\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m\in R\}$ je podprostorem V, která se nazývá <u>lineární obal</u> vektorů $v_1,v_2,...,v_m\in V$ a značíme $U=\langle v_1,v_2,...,v_m\rangle$.

Důkaz:
Je zřejmé, že $U \subset V$, neboť každý vektor z *U* vznikl ze součtu vektorů z *V* nebo jeko násobek skaláru vektoru z *V* a tudíž musí taktéž patřit do vektorového prostoru *V*.
1. Jestliže $u, v \in U$ jsou libovolná, pak $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m$ a
$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_m v_m$. Potom lze vyjádřit
$u + v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_m v_m =$
$= (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)v_2 + ... + (\alpha_m + \beta_m)v_m = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + ... + \gamma_m v_m$.
Odtud je patrné, že $u + v \in U$.
2. Je-li $u \in U$ a $\gamma \in R$ libovolná, pak
$\gamma u = \gamma(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m) = \gamma\alpha_1 v_1 + \gamma\alpha_2 v_2 + ... + \gamma\alpha_m v_m =$,
$= (\gamma\alpha_1)v_1 + (\gamma\alpha_2)v_2 + ... + (\gamma\alpha_m)v_m = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_m v_m$.
Odtud zřejmě $\gamma u \in U$.
Z 1. a 2. tedy vyplývá, že *U* je podprostorem *V*. ♦

Příklad:
Rozhodněte, zda-li jsou množiny $U = \{[u_1, u_2, u_3] \in R^3 : u_1 + u_2 - u_3 = 0 \wedge u_2 - u_3 = 0\}$ a $V = \{[u_1, u_2, u_3] \in R^3 : u_2 + u_3 = 0\}$ podprostory R^3. Pokud ano, nalezněte jejich průnik a součet.

Všechny prvky množiny *U* musí splňovat podmínky $u_1 + u_2 - u_3 = 0, u_2 - u_3 = 0$. Tzn. že složky vektoru $u \in U$ musí být řešením soustavy 2 rovnic
$$u_1 + u_2 - u_3 = 0$$
$$u_2 - u_3 = 0$$
Matice této soustavy je již ve schodovém tvaru, takže můžeme přímo určit její řešení
$u_1 = 0, u_2 = t, u_3 = t, \forall t \in R$. Vektor řešení můžeme dále zapsat ve tvaru
$u = [u_1, u_2, u_3] = [0, t, t] = t \cdot [0,1,1]$ pro $\forall t \in R$.
Odtud $U = \{t \cdot [0,1,1], \forall t \in R\} = \langle[0,1,1]\rangle$. Množina *U* je tedy lineárním obalem vektoru $[0,1,1] \in R^3$ a tedy podprostorem R^3.

Analogicky musí všechny prvky množiny *V* splňovat podmínku $u_2 + u_3 = 0$. Tzn. že složky vektoru $u \in V$ musí být řešením 1 rovnice o 3 neznámých $u_2 + u_3 = 0$
V této rovnici si proto volíme neznámé u_1, u_3 za parametry a dostáváme řešení
$u_1 = p, u_2 = -q, u_3 = q, \forall p, q \in R$. Tento vektor řešení můžeme dále zapsat ve tvaru
$u = [u_1, u_2, u_3] = [p, -q, q] = [p,0,0] + [0, -q, q] = p \cdot [1,0,0] + q \cdot [0,-1,1]$ pro $\forall p, q \in R$.
Odtud $V = \{p \cdot [1,0,0] + q \cdot [0,-1,1], \forall p, q \in R\} = \langle[1,0,0],[0,-1,1]\rangle$. Množina *V* je tedy lineárním obalem vektorů $[1,0,0],[0,-1,1] \in R^3$ a tedy podprostorem R^3.

Složky všech vektorů $u = [u_1, u_2, u_3]$ průniku $U \cap V$ musí splňovat podmínky $u_1 + u_2 - u_3 = 0, u_2 - u_3 = 0$ a zároveň podmínku $u_2 + u_3 = 0$. Dostáváme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 - u_3 &= 0 \\ u_2 - u_3 &= 0 \\ u_2 + u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Odečtením 2. rovnice od 3. dostáváme soustavu ve schodovém tvaru

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 - u_3 &= 0 \\ u_2 - u_3 &= 0 \\ 2u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Jejíž řešením je $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$. Průnik podprostoru U a V obsahuje tedy pouze jediný vektor a tím je vektor nulový! $U \cap V = \{o\}$.

Pokud uvážíme, že libovolný vektor $u \in U$ má tvar $u = t \cdot [0,1,1]$ pro $\forall t \in R$ a libovolný vektor $v \in V$ má tvar $v = p \cdot [1,0,0] + q \cdot [0,-1,1]$ pro $\forall p, q \in R$, tak $w = u + v \in U + V$ má tvar $w = t \cdot [0,1,1] + p \cdot [1,0,0] + q \cdot [0,-1,1]$ pro $\forall t, p, q \in R$. Pak podprostor $U + V$ je lineární kombinací vektorů $[0,1,1],[1,0,0],[0,-1,1] \in R^3$ a můžeme psát $U + V = \langle [0,1,1],[1,0,0],[0,-1,1] \rangle$.

♦

Poznámka:
Z předchozího příkladu vyplývá, že všechna řešení soustavy lineárních rovnic s nulovými pravými stranami tvoří podprostor vektorového prostoru R^n, kde n je počet neznámých soustavy!