Cvičení č. 13

Skalární součin. Norma vektoru. Ortogonalita. Gramův-Schmidtův ortonormalizační proces.

Skalární součin

Definice:
Skalárním součinem na vektorovém prostoru *V* rozumíme každou symetrickou bilineární formu jejíž příslušná kvadratická forma je pozitivně definitní.

Příklad:
Rozhodněte, zda-li zobrazení definované předpisem

$$[u,v] = 2u_1v_1 + 4u_2v_2 + 2u_3v_3$$

tvoří skalární součin na R^3.

Řešení:

1. $\forall u,v,w \in R^3 : [u+v,w] = 2(u_1+v_1)w_1 + 4(u_2+v_2)w_2 + 2(u_3+v_3)w_3 =$
$= 2u_1w_1 + 4u_2w_2 + 2u_3w_3 + 2v_1w_1 + 4v_2w_2 + 2v_3w_3 = [u,w]+[v,w].$
2. $\forall u,v \in R^3 \forall \alpha \in R : [\alpha u, v] = 2(\alpha u_1)v_1 + 4(\alpha u_2)v_2 + 2(\alpha u_3)v_3 =$
$= \alpha(2u_1v_1 + 4u_2v_2 + 2u_3v_3) = \alpha[u,v].$
3. $\forall u,v \in R^3 : [v,u] = 2v_1u_1 + 4v_2u_2 + 2v_3u_3 = 2u_1v_1 + 4u_2v_2 + 2u_3v_3 = [u,v].$

Body 1., 2., 3. jsme dokázali, že zadané zobrazení je symetrická bilineární forma. Nyní zbývá dokázat, že její příslušná kvadratická forma je pozitivně definitní.
$[u,u] = 2u_1^2 + 4u_2^2 + 2u_3^2 > 0, \quad \forall u \in R^3, u \neq o.$
Z posledního vyplývá, že $[u,u]$ je pozitivně definitní a tedy předpis $[u,v]$ je skalárním součinem na R^3. ♦

Norma vektoru.

Norma vektoru představuje zobecnění pojmu velikosti vektoru známého z R^2 či R^3 na obecný vektorový prostor *V*.

Definice:
Zobrazení, které každému vektoru *v* z vektorového prostoru *V* přiřadí kladné reálné číslo $\|v\|$ se nazývá norma vektoru *v* jestliže $\forall u,v \in V$ a libovolný skalár α platí:

1. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$
2. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$
3. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = o$

Příklad:
Rozhodněte, zda-li zobrazení $R^3 \ni v \to \|v\|_1 = |v_1| + |v_2| + |v_3|$ je normou na R^3. Pokud ano, vypočtěte $\|x\|_1$, kde $x = [1,3,-2]$.

Řešení:
Musíme ověřit všechny 3 vlastnosti normy.

1. $\forall u,v \in V : \|u+v\|_1 = |u_1+v_1| + |u_2+v_2| + |u_3+v_3| \le |u_1| + |v_1| + |u_2| + |v_2| + |u_3| + |v_3| =$
$= |u_1| + |u_2| + |u_3| + |v_1| + |v_2| + |v_3| = \|u\|_1 + \|v\|_1$.
2. $\forall u \in V \ \forall \alpha \in R : \|\alpha u\|_1 = |\alpha u_1| + |\alpha u_2| + |\alpha u_3| = |\alpha||u_1| + |\alpha||u_2| + |\alpha||u_3| =$
$= |\alpha|(|u_1| + |u_2| + |u_3|) = |\alpha|\|u\|_1$.
3. $\|u\|_1 = |u_1| + |u_2| + |u_3| = 0 \Leftrightarrow |u_1| = 0 \wedge |u_2| = 0 \wedge |u_3| = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0 \wedge u_2 = 0 \wedge u_3 = 0 \Leftrightarrow u = o.$

$\|v\|_1$ tedy tvoří normu na R^3.

Pro $x = [1,3,-2]$ je $\|x\|_1 = |1| + |3| + |-2| = 6$. ♦

Věta:
Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem (u,v). Pak $\|u\| = \sqrt{(u,u)}, \ \forall u \in V$ je norma na V. Tuto normu nazýváme Eukleidovskou normou.

Příklad:
Je dán skalární součin $[u,v] = 2u_1v_1 + 4u_2v_2 + 2u_3v_3$ na vektorovém prostoru R^3. Určete Eukleidovskou normu vektoru $x = [1,3,-2]$ vzhledem k tomuto skalárnímu součinu.

Řešení:
$\|x\| = \sqrt{[x,x]} = \sqrt{2x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2} = \sqrt{2\cdot 1^2 + 4\cdot 3^2 + 2\cdot(-2)^2} = \sqrt{2+36+8} = \sqrt{46}$. ♦

<u>Ortogonalita</u>

Definice:
Je dán vektorový prostor V se skalárním součinem (u,v). Množina vektorů $\{e_1,\dots,e_n\}$ se nazývá ortogonální jestliže $(e_i,e_j) = 0, \ \forall i, j = 1,\dots,n, \ i \ne j.$ Je-li navíc $(e_i,e_i) = 1, \ \forall i = 1,\dots,n,$ pak se tato množina nazývá ortonormální.

Příklad:
Rozhodněte zda-li jsou vektory $f_1 = [1,1,0], \ f_2 = [0,1,1], \ f_3 = [1,0,1]$ ortogonální vzhledem ke skalárnímu součinu $[u,v] = 2u_1v_1 + 4u_2v_2 + 2u_3v_3$.

Řešení:
$$\left.\begin{aligned} [f_1,f_2] &= 2\cdot1\cdot0 + 4\cdot1\cdot1 + 2\cdot0\cdot1 = 4 \\ [f_1,f_3] &= 2\cdot1\cdot1 + 4\cdot1\cdot0 + 2\cdot0\cdot1 = 2 \\ [f_2,f_3] &= 2\cdot0\cdot1 + 4\cdot1\cdot0 + 2\cdot1\cdot1 = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{vektory nejsou ortogonální.}$$ ♦

<u>Gramův-Schmidtův ortonormalizační proces</u>

Gramův-Schmidtův ortonormalizační proces vytvoří z množiny lineárně nezávislých vektorů systém ortonormální. Celý proces si ozřejmíme na příkladě.

Příklad:
Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu vytvořte z vektorů $f_1=[1,1,0]$, $f_2=[0,1,1]$, $f_3=[1,0,1]$ ortonormální množinu vzhledem ke skalárnímu součinu $[u,v]=2u_1v_1+4u_2v_2+2u_3v_3$.

Řešení:
1. Určení prvního vektoru e_1 je snadné neboť se přímo určí z vektoru $f_1=[1,1,0]$:

$$e_1=\frac{f_1}{\|f_1\|}=\frac{f_1}{\sqrt{[f_1,f_1]}}=\frac{[1,1,0]}{\sqrt{2\cdot 1^2+4\cdot 1^2+2\cdot 0^2}}=\frac{[1,1,0]}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}[1,1,0].$$

Lze snadno ověřit, že pro vektor e_1 platí $[e_1,e_1]=1$.
2. Druhý vektor e_2 určíme z vektoru $f_2=[0,1,1]$ tak aby byl ortogonální na vektor e_1. Nejdříve tedy nalezneme vektor $g=f_2-\alpha_1e_1$ tak aby bylo splněno $[g,e_1]=0$. Dostáváme tedy rovnici

$$0=[g,e_1]=[f_2-\alpha_1e_1,e_1]=[f_2,e_1]-\alpha_1[e_1,e_1]=[f_2,e_1]-\alpha_1.$$

Odtud dostáváme, že

$$\alpha_1=[f_2,e_1]=2\cdot 0\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}+4\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}+2\cdot 1\cdot 0=\frac{4}{\sqrt{6}}.$$

Nový ortogonální vektor k vektoru e_1 tedy dostáváme ze vztahu

$$g=f_2-\alpha_1e_1=[0,1,1]-\frac{4}{\sqrt{6}}\cdot\frac{4}{\sqrt{6}}[1,1,0]=[0,1,1]-\frac{2}{3}[1,1,0]=\left[-\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3},1\right]=\frac{1}{3}[-2,1,3].$$

Nyní zbývá vytvořit z vektoru g vektor e_2 tak aby $[e_2,e_2]=1$. To lze provést stejným způsobem jako v kroku 1. Tzn.

$$e_2=\frac{g}{\|g\|}=\frac{g}{\sqrt{[g,g]}}=\frac{\frac{1}{3}[-2,1,3]}{\sqrt{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+2\cdot 1^2}}=\frac{1}{3}\frac{[-2,1,3]}{\sqrt{\frac{30}{9}}}=\frac{1}{3}\frac{3}{\sqrt{30}}[-2,1,3]=\frac{1}{\sqrt{30}}[-2,1,3].$$

Vektor e_2 tedy splňuje podmínku $[e_1,e_2]=0$ i podmínku $[e_2,e_2]=1$.
3. Třetí vektor e_3 musí splňovat podmínku ortogonality vzhledem k oběma předchozím vektorům e_1,e_2. Vytvoříme jej tedy z vektoru $f_3=[1,0,1]$ následujícím způsobem

$$g=f_3-\alpha_1e_1-\alpha_2e_2.$$

Přitom musí být splněny podmínky ortogonality $[g,e_1]=0$ a $[g,e_2]=0$. Dosazením dostáváme rovnice

$$0=[g,e_1]=[f_3-\alpha_1e_1-\alpha_2e_2,e_1]=[f_3,e_1]-\alpha_1[e_1,e_1]-\alpha_2[e_2,e_1]=[f_3,e_1]-\alpha_1,$$
$$0=[g,e_2]=[f_3-\alpha_1e_1-\alpha_2e_2,e_2]=[f_3,e_2]-\alpha_1[e_1,e_2]-\alpha_2[e_2,e_2]=[f_3,e_2]-\alpha_2.$$

Jejich řešením je

$$\alpha_1=[f_3,e_1]=2\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}+4\cdot 0\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}+2\cdot 1\cdot 0=\frac{2}{\sqrt{6}},$$

$$\alpha_2=[f_3,e_2]=2\cdot 1\cdot\frac{-2}{30}+4\cdot 0\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}+2\cdot 1\cdot\frac{3}{\sqrt{30}}=\frac{2}{\sqrt{30}}.$$

Nyní můžeme sestavit vektor g, který je ortogonální k e_1,e_2.

$$g=[1,0,1]-\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}[1,1,0]-\frac{2}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}[-2,1,3]=[1,0,1]-\frac{1}{3}[1,1,0]-\frac{1}{15}[-2,1,3]=\frac{1}{5}[4,-2,4].$$

Zbývá tedy určit e_3 tak, aby $[e_3,e_3]=1$.

$$e_3 = \frac{g}{\|g\|} = \frac{g}{\sqrt{[g,g]}} = \frac{\frac{1}{5}[4,-2,4]}{\sqrt{2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2 + 4\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{1}{5}\frac{[4,-2,4]}{\sqrt{\frac{80}{25}}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2\sqrt{20}}[4,-2,4] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{20}}[2,-1,2].$$

Zkouška:

$$[e_1,e_2] = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{-2}{\sqrt{30}} + 4\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}} + 2\cdot 0\cdot\frac{3}{\sqrt{30}} = -\frac{4}{\sqrt{180}} + \frac{4}{\sqrt{180}} = 0$$

$$[e_1,e_3] = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{2}{\sqrt{20}} + 4\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{20}} + 2\cdot 0\cdot\frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{4}{\sqrt{120}} - \frac{4}{\sqrt{120}} = 0$$

$$[e_2,e_3] = 2\cdot\frac{-2}{\sqrt{30}}\cdot\frac{2}{\sqrt{20}} + 4\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{20}} + 2\cdot\frac{3}{\sqrt{30}}\cdot\frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{-8-4+12}{\sqrt{600}} = 0$$

$$[e_1,e_1] = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} + 4\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} + 2\cdot 0\cdot 0 = \frac{2+4}{6} = 1$$

$$[e_2,e_2] = 2\cdot\frac{-2}{\sqrt{30}}\cdot\frac{-2}{\sqrt{30}} + 4\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}} + 2\cdot\frac{3}{\sqrt{30}}\cdot\frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{8+4+18}{30} = 1$$

$$[e_3,e_3] = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{20}}\cdot\frac{2}{\sqrt{20}} + 4\cdot\frac{-1}{\sqrt{20}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{20}} + 2\cdot\frac{2}{\sqrt{20}}\cdot\frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{8+4+8}{20} = 1$$

Vektory $e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}[1,1,0]$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}[-2,1,3]$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{20}}[2,-1,2]$ jsou hledané ortonormální vektory. ♦