VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Sbírka neřešených příkladů z lineární algebry

Petra Šarmanová

Ostrava 2009

Obsah

Aritmetické vektory

1. Určete taxativně (výčtem prvků) množinu $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$, pokud

$$\begin{aligned} A_1 &= \{-1, 0, 1\} \\ A_2 &= \{1, 2\} \\ A_3 &= \{2, 3\} \\ A_4 &= \{0\}. \end{aligned}$$

2. Obsahuje množina $\mathbb{N}^5$ prvek $[0, 1, -1, 2, 1]$ nebo $[2, 4, 6, 8]$, přičemž $\mathbb{N}$ je množina všech přirozených čísel? Své rozhodnutí zdůvodněte.

3. Rovnají se vektory $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^4$, pokud $\underline{u} = [\ln \sqrt{\mathrm{e}}, \cos \frac{\pi}{2}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{3}]$, $\underline{v} = [\sin \frac{\pi}{6}, \log 1, \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{6}]$? Své rozhodnutí zdůvodněte.

4. Patří do $\mathbb{R}^5$ aritmetický vektor $[\sqrt{-2}, \mathrm{e}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}, -1, \ln(-3)]$? Své rozhodnutí zdůvodněte.

5. Vypočítejte

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \left[\sqrt{5 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \ln \mathrm{e}^2}, -\sin \frac{\pi}{3}, \cos \frac{5}{6}\pi \right] - 2 \left[\cos \frac{5}{3}\pi, \frac{1}{2 \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)}, \sqrt{\frac{\log 10^4 - 4 \operatorname{tg}\left(\frac{-\pi}{4}\right)}{8}} \right].$$

6. Dokažte, že pro každé $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí

   (a) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

   (b) $\alpha(\underline{u} + \underline{v}) = \alpha\underline{u} + \alpha\underline{v}$

   (c) $(\alpha + \beta)\underline{u} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{u}$.

7. Určete výpočtem i graficky

$$\frac{1}{2}[-4, -2] + 2[1, 2].$$

8. Určete skalární součin, velikosti a odchylku vektorů $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$, kde $\underline{a} = [\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0]$, $\underline{b} = [3, 0, 0]$.

9. K danému vektoru $\underline{u} = [3, -1, 2]$ nalezněte alespoň jeden vektor kolmý.

Výsledky

1. $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 = \{[-1, 1, 2, 0], [-1, 1, 3, 0], [-1, 2, 2, 0], [-1, 2, 3, 0], [0, 1, 2, 0], [0, 1, 3, 0], [0, 2, 2, 0], [0, 2, 3, 0], [1, 1, 2, 0], [1, 1, 3, 0], [1, 2, 2, 0], [1, 2, 3, 0]\}$.

2. Ne.

3. Ano.
4. Ne.
5. $[1, 0, -3]$.
8. $\underline{a}.\underline{b} = 3\sqrt{2}$, $|\underline{a}| = 2, |\underline{b}| = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
9. Například $[-1, -1, 1]$.

Matice

1. Jsou dány matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

   Najděte matici C, pro niž platí $C = 2A - 3B$

2. Je dána matice A a vektor $\underline{v}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Vypočtěte $A \cdot \underline{v}$.

3. Jsou dány matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Vypočtěte matici $A \cdot B$

4. Je dána matice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Určete matici $A \cdot A$.

5. Určete matici X tak, aby platilo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & -4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

6. Určete matici X tak, aby platilo

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Určete matici X tak, aby platilo

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Jakou maticí musíme vynásobit matici typu (3,3) aby došlo k výměně 2 a 3 sloupce?

9. Jakou maticí musíme vynásobit matici typu (4,4) aby došlo k výměně 1 a 3 sloupce?
10. Dokažte, že pro každou matici A a reálná čísla r, s platí
    (a) $(r+s)A = rA + sA$,
    (b) $r(sA) = (rs)A$.

Výsledky

1. $$2A - 3B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. $$A \cdot \underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. $$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. $$A \cdot A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 10 \\ 4 & 7 & 8 \\ 16 & -2 & 15 \end{bmatrix}.$$

5. $$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. $$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. $$X = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. $$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

9.

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soustavy lineárních rovnic

1. Gaussovou eliminační metodou vyřešte soustavu

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 5 \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \\
-x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

2. Gaussovou eliminační metodou vyřešte soustavu

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\
-x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

3. Užitím Gaussovy eliminační metody najděte
   a) všechna řešení soustavy

$$
\begin{aligned}
6x_1 - 9x_2 + 7x_3 + 10x_4 &= 3 \\
2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\
2x_1 - 3x_2 + 13x_3 + 18x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

   b) řešení pro $x_2 = 1$.

4. Užitím Gaussovy eliminační metody najděte
   a) všechna řešení soustavy

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\
2x_1 - 5x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \\
4x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5
\end{aligned}
$$

   b) řešení pro $x_2 = 1$.

5. Řešte v $\mathbb{R}$ soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\
8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 3 \\
4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\
2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

6. Řešte v $\mathbb{C}$ soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
x_1 + i \cdot x_2 - 2x_3 &= 10 \\
x_1 - x_2 + 2i \cdot x_3 &= 10 \\
x_1 + 3i \cdot x_2 - (1+i) \cdot x_3 &= 30
\end{aligned}
$$

7. Užitím Gaussovy eliminační metody určete, pro která a, b má daná soustava nekonečně mnoho řešení a vyjádřete tato řešení pomocí parametru p.

$$\begin{aligned} ax_1 + 2x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + bx_3 &= 3 \end{aligned}$$

Výsledky

1. $[x_1, x_2, x_3] = [3 - 2p, 1 - p, p]$, $p \in \mathbb{R}$
2. Nemá řešení
3. a) $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [\frac{1+3p}{2}, p, 0, 0]$, $p \in \mathbb{R}$; b) $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [2, 1, 0, 0]$
4. a) $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [1 + p, p, -1 + 3p, 0]$, $p \in \mathbb{R}$; b) $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [2, 1, 2, 0]$
5. $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [\frac{3}{5} - \frac{3}{2}s - \frac{1}{10}t, s, \frac{1}{5} + \frac{4}{5}t, t]$, $s, t \in \mathbb{R}$
6. $[x_1, x_2, x_3] = [2 - 16i, 4 - 12i, 2 - 6i]$
7. $a = 3$, $b = 4$, $[x_1, x_2, x_3] = [\frac{2-2p}{3}, \frac{-7+10p}{6}, p]$, $p \in \mathbb{R}$

Inverzní matice

1. Určete inverzní matici A^{-1} k matici A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Určete inverzní matici A^{-1} k matici A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Určete inverzní matici A^{-1} k matici A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Je dána matice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) určete matici A^{-1}
b) pomocí matice A^{-1} určete řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 13 \end{aligned}$$

5. Užitím inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

6. Vypočítejte výhodně maticový výraz $C^{-1}A\underline{v} + C^{-1}B\underline{v}$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \underline{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7. Jakou maticí musíme vynásobit matici typu 3/3 aby se provedla operace

$$r_1 - r_2 + 5r_3 \to r_2$$

8. Užitím inverzní matice řešte soustavy rovnic $Ax = B$, $Ax = C$, $Ax = D$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

9. Nechť A, B jsou regulární matice řádu n. Dokažte, že platí

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

10. Nechť A je regulární matice. Dokažte, že platí: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Výsledky

1. $A^{-1} = \frac{1}{9}A$

2. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

3. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 11 & -5 & -4 \\ 8 & -5 & -2 \\ -10 & 5 & 5 \end{bmatrix}$, $[x_1, x_2, x_3] = [1, 2, 3]$

5. $[x_1, x_2, x_3] = [2, -2, -1]$

6. $C^{-1}A\underline{v} + C^{-1}B\underline{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $[1, 1, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{6}{5}]$

LU rozklad, řešení soustav rovnic LU rozkladem

1. Je dána matice
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Rozložte tuto matici na součin dolní a horní trojúhelníkové matice (LU rozklad).

2. Je dána matice
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

   a) rozložte tuto matici na součin dolní a horní trojúhelníkové matice (LU rozklad)
   b) využijte LU rozkladu k řešení soustavy:
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 =& 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 =& 0 \\ 2x_2 + 5x_3 =& 0 \end{aligned}$$

3. Je dána matice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   a) rozložte tuto matici na součin dolní a horní trojúhelníkové matice (LU rozklad)
   b) využijte LU rozkladu k řešení soustavy:
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 =& 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 =& 1 \\ -x_1 + 2x_3 =& -1 \end{aligned}$$

4. Je dána matice
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -8 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

   a) rozložte tuto matici na součin dolní a horní trojúhelníkové matice (LU rozklad)
   b) využijte LU rozkladu k řešení soustavy:
$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 =& 2 \\ 3x_1 - 8x_2 + 3x_3 =& 4 \\ 3x_2 + x_3 =& 14 \end{aligned}$$

c) využijte LU rozkladu k řešení soustavy:

$$
\begin{aligned}
-x_1 + 3x_2 &= 1 \\
3x_1 - 8x_2 + 3x_3 &= 2 \\
3x_2 + x_3 &= -1
\end{aligned}
$$

5. Pomocí LU rozkladu vyřešte soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 9 \\
2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\
2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

6. Pomocí LU rozkladu nalezněte inverzní matici k matici A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Výsledky

1. $LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

2. a) $LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

   b) $[x_1, x_2, x_3] = [95, 50, -20]$

3. a) $LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$,

   b) $[x_1, x_2, x_3] = [\frac{3}{5}, 0, -\frac{1}{5}]$

4. a) $LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$,

   b) $[x_1, x_2, x_3] = [10, 4, 2]$,

   c) $[x_1, x_2, x_3] = [-4, -1, 2]$

5. $LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, $[x_1, x_2, x_3] = [1, 2, 2]$,

6. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -7 & -4 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Vektorové prostory a podprostory

1. Nechť $\mathscr{F}$ je množina všech reálných funkcí (tj. zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Pro $f, g \in \mathscr{F}$ definujme součet $f + g \in \mathscr{F}$ takto: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Pro $f \in \mathscr{F}$, $r \in \mathbb{R}$ definujme součin $r \cdot f \in \mathscr{F}$ takto: $(r \cdot f)(x) = r \cdot (f(x))$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $\mathscr{F}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

2. Nechť $\mathscr{F}$ je vektorový prostor všech reálných funkcí definovaný v příkladu 1. Rozhodněte, zda jsou následující množiny podprostory $\mathscr{F}$. Své rozhodnutí zdůvodněte.

   (a) $W_1 = \{f \in \mathscr{F} : f(0) = 1\}$,
   $W_2 = \{f \in \mathscr{F} : f(0) = 0\}$

   (b) $W_1 = \{f \in \mathscr{F} : 2f(x) - f(0) = 0\}$,
   $W_2 = \{f \in \mathscr{F} : 2f(x) - f(0) = 3\}$

   (c) $W_1 = \{f \in \mathscr{F} : f(1) = 0 \ \wedge f(-1) = 0\}$,
   $W_2 = \{f \in \mathscr{F} : f(0) = -1 \ \wedge f(1) = 0\}$

   (d) $W = \{f \in \mathscr{F} : 2f(x) - f(-x) = 0\}$

   (e) $W = P_n$, kde P_n značí množinu všech polynomů stupně nejvýše n.

3. Nechť je dán vektorový prostor P_2 (prostor všech polynomů stupně maximálně 2). Rozhodněte, zda je množina $W = \{p(x) = ax^2 + bx + c : \ a + c = 0 \ \wedge \ a - b = 0\}$ podprostorem P_2. Své rozhodnutí zdůvodněte.

4. Rozhodněte, zda podmnožina $W \subset P_n$ je podprostorem vektorového prostoru polynomů P_n, je-li
   a) $W_1 = \{p \in P_n : p(x) = p(-x)\}$,
   b) $W_2 = \{p \in P_n : 2p(0) + 3p(1) = 0\}$,
   c) $W_3 = \{p \in P_n : p(x) = x^2 + ax + b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$,
   d) $W_4 = \{p \in P_n : p(x) = ax^2 + bx + c, \ a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$.

5. Rozhodněte, zda je podmnožina $W \subset \mathbb{R}^n$ podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$, je-li $W = \{(x_1, \cdots x_n) : \ x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{Z}\}$.

6. Jsou dány podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$:

   $$U = \{[u_1, u_2, u_3, u_4] \in \mathbb{R}^4 : \ u_1 + u_2 + u_3 - u_4 = 0\},$$
   $$V = \{[u_1, u_2, u_3, u_4] \in \mathbb{R}^4 : \ u_3 + u_4 = 0\}.$$

   Určete $U \cap V$.

7. Jsou dány podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$:

   $$U = \{[u_1, u_2, u_3, u_4] \in \mathbb{R}^4 : \ u_1 + u_2 - u_3 + u_4 = 0 \wedge -u_1 - u_3 = 0\},$$
   $$V = \{[u_1, u_2, u_3, u_4] \in \mathbb{R}^4 : \ u_2 - 2u_3 + u_4 = 0\}.$$

   Určete $U \cap V$.

8. Jsou dány podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{[u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{R}^3 : \ u_1 + u_2 - u_3 = 0 \wedge u_1 - 2u_2 = 0\},$$
$$V = \{[u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{R}^3 : \ u_1 - u_2 - u_3 = 0\}.$$

   Určete $U + V$.

9. Udejte příklad vektorového prostoru nad $\mathbb{R}$, který má konečně mnoho vektorů.

10. Udejte příklad nekonečné podmnožiny M v $\mathbb{R}^5$ tak, že M není podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$.

Výsledky

1. $\mathscr{F}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
2. (a) W_1 není, W_2 je podprostor,
   (b) W_1 je, W_2 není podprostor,
   (c) W_1 je, W_2 není podprostor,
   (d) W je podprostor,
   (e) W je podprostor.
3. W je podprostor,
4. (a) W je podprostor,
   (b) W je podprostor,
   (c) W není podprostor,
   (d) W není podprostor.
5. W není podprostor.
6. $U \cap V = \langle [-1, 1, 0, 0], [2, 0, -1, 1] \rangle$
7. $U \cap V = \langle [-1, 2, 1, 0], [0, -1, 0, 1] \rangle$
8. $U + V = \langle [2, 1, 3], [1, 1, 0], [1, 0, 1] \rangle$

Lineární závislost, lineární kombinace, báze

1. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}^4$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně závislé nebo nezávislé:

   (a) $u = (2, -1, 0, 3)$, $v = (1, 2, 5, -4)$, $w = (7, -1, 5, 8)$,

   (b) $u = (1, 2, -2, 0)$, $v = (3, 4, -1, 1)$, $w = (1, 5, 7, 0)$, $x = (-2, 3, 3, -2)$

2. Uvažujme vektorový prostor $P_2 = \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0\colon\ a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující polynomy lineárně závislé nebo nezávislé:

   (a) $p(x) = 3x + 2,\ q(x) = x^2 - 3x - 1,\ r(x) = -x^2 + 3x + 3,$

   (b) $p(x) = 2x^2 - 2x + 2,\ q(x) = -x^2 - 2x + 1,\ r(x) = -6x + 4,$

   (c) $p(x) = x^2 + x + 1,\ q(x) = 2x^2 - x - 1,\ r(x) = -6x - 10.$

3. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{C}^3$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory lineárně závislé nebo nezávislé:

$$u = (2, 2 + 2i, 2i),\ v = (1 - i, 1 + 3i, -1 + i),\ w = (1 + i, 1 - i, 1 + i).$$

4. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}^4$. V závislosti na parametrech a, b, rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti zadaných vektorů:

$$u_1 = (1, 2 + a, 4, 6),\ u_2 = (1, 2, 3 - b, 3),\ u_3 = (2, 4, b - 6, 7),\ u_4 = (1, 2 - a, 2 - b, 1).$$

5. Uvažujme vektorový prostor $P_2 = \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0\colon\ a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$. Rozhodněte, zda je polynom $p(x) = x^2 + 2$ lineární kombinací polynomů $q(x) = x^2 - x$, $r(x) = x + 1$.

6. Uvažujme vektorový prostor P_3 polynomů stupně maximálně 3. Polynom $p(x) = 7x^3 - 7x^2 + 4x - 1$ vyjádřete jako lineární kombinaci polynomů $q(x) = x^3 + 3x^2 - x + 2$, $r(x) = 2x^2 - x + 3$, $s(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 1$.

7. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^6$ jsou dány podprostory $W_1 = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ a $W_2 = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$. Určete bázi a dimenzi podprostorů W_1, W_2. Přitom
   $u_1 = (0, 1, 0, 1, 0, -1)$, $u_2 = (-2, -1, -1, 0, 0, -1)$, $u_3 = (1, 1, 0, 2, 1, 0)$,
   $v_1 = (2, 1, 1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (2, 2, 1, 1, 0, 0)$, $v_3 = (2, -1, 1, -2, 0, 3)$.

8. Nechť $\mathrm{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathrm{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathrm{e}_3 = (0, 0, 1)$, $x = (1, 1, 1)$, $y = (0, 1, 1)$, $z = (1, -1, 0)$, $u = (1, 1, 0)$ jsou vektory z $\mathbb{R}^3$.
   a) Který z vektorů e_1, e_2, e_3 lze nahradit vektorem x abychom dostali bázi $\mathbb{R}^3$?
   b) Který z vektorů e_1, e_2, e_3 lze nahradit vektorem y abychom dostali bázi $\mathbb{R}^3$?
   c) Který z vektorů e_1, e_2, e_3 lze nahradit vektorem z abychom dostali bázi $\mathbb{R}^3$?
   d) Který z vektorů e_1, z, u lze nahradit vektorem e_2 abychom dostali bázi $\mathbb{R}^3$?

9. Jakým podmínkám musí vyhovovat číslo a, aby následující vektory tvořily bázi prostoru $\mathbb{R}^3$:

   (a) $(1, 1, 1)$, $(1, a, a^2)$,

(b) $(0, a, a)$, $(a, a, 1)$, $(0, 1, a)$.

10. Množina všech matic typu (2,2) je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ (vzhledem k operacím sčítání matic a součinu čísla s maticí).

    (a) Určete libovolnou bázi tohoto vektorového prostoru.

    (b) Určete dimenzi tohoto vektorového prostoru.

    (c) Vyjádřete matici D jako lineární kombinaci matic A, B, C, je-li
    $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 9 & -16 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$

11. Udejte příklad vektorů u, v, $w \in \mathbb{R}^2$, které jsou lineárně závislé a přitom vektor u nelze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů v, w.

12. Nalezněte v $\mathbb{R}^3$ tři báze, které mají společný vektor $(1, 1, 1)$, ale už žádný jiný.

Výsledky

1. (a) lineárně nezávislé,
   (b) lineárně závislé,

2. (a) lineárně nezávislé,
   (b) lineárně závislé,
   (c) lineárně nezávislé,

3. lineárně závislé,

4. pro $a \neq 0$ a $b \neq 6$ jsou vektory lineárně nezávislé, jinak jsou lineárně závislé,

5. není,

6. $p(x) = q(x) - 2r(x) + 3s(x)$,

7. $dim(W_1) = 3$, bázi tvoří vektory u_1, u_2, u_3,
   $dim(W_2) = 2$, bázi tvoří vektory v_1, v_2,

8. (a) libovolný,
   (b) e_2 nebo e_3,
   (c) e_1 nebo e_2.
   (d) Vektory e_1, z, u netvoří bázi $\mathbb{R}^3$. Pokud libovolný z těchto vektorů nahradíme vektorem e_2 také nedostaneme bázi $\mathbb{R}^3$.

9. (a) Vektory nemohou nikdy tvořit bázi $\mathbb{R}^3$.
   (b) Vektory tvoří bázi pro každé $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

10. (a) Například $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
    (b) dimenze je 4
    (c) $D = 2A + 5B - C$

Souřadnice vektoru, hodnost matice, Frobeniova věta

1. Jsou dány vektory $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Rozhodněte, zda vektory u, v, w tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$, je-li $u = 2e_1 + e_2 + 3e_3$, $v = e_2 + 2e_3$, $w = e_1 - e_2 + 7e_3$.

2. Nechť vektory u, v, w tvoří bázi vektorového prostoru V. Rozhodněte, zda následující vektory tvoří bázi prostoru V:
   a) $u + v$, $v - w$, $u + w$,
   b) $2u + v + 3w$, $v + 2w$, $u - v + 7w$.

3. Ukažte, že vektory u_1, u_2, u_3 tvoří bázi a spočtěte souřadnice vektoru x v této bázi.
   a) $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 2)$, $u_3 = (1, 2, 3)$, $x = (6, 9, 14)$
   b) $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 2)$, $x = (3, 4, 7)$
   c) $u_1 = (2, 1, -3)$, $u_2 = (3, 2, -5)$, $u_3 = (1, -1, 1)$, $x = (6, 2, -7)$

4. Mějme vektorový prostor P_2 polynomů stupně maximálně 2. Nalezněte souřadnice polynomu $p(x) = 2x^2 + 5x + 7$ v uspořádané bázi $B = ((x + 2)^2, x + 2, 1)$.

5. Je dána homogenní soustava lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

   Ověřte, že množina M všech řešení této soustavy je vektorový podprostor prostoru $\mathbb{R}^3$. Určete $dimM$ a najděte alespoň jednu bázi vektorového prostoru M.

6. Jsou dány homogenní soustavy nad $\mathbb{R}$. Určete bázi a dimenzi podprostoru řešení těchto soustav.

$$a) \quad \begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 - 4x_2 - 13x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad b) \quad \begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 &= 0 \end{aligned}$$

7. Najděte bázi a dimenzi vektorového prostoru $\mathscr{V}$, kde

$$\mathscr{V} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : \; 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \; x_1 - x_2 - x_3 = 0\}.$$

Výsledky

1. ano,

2. a) ne, b) ano,

3. a) $x = (1, 2, 3)$, b) $x = (1, 0, 2)$, c) $x = (1, 1, 1)$

4. $p = (2, -3, 5)$

5. dimenze je 1, bázi tvoří např. vektor $(-5, 4, 3)$
6. a) dimenze je 1, bázi tvoří např. vektor $(-7, -5, 1)$,
   b) dimenze je 2, bázi tvoří např. vektory $(2, 0, -5, 7)$, $(2, 1, 0, 0)$
7. dimenze je 1, bázi tvoří např. vektor $(0, 1, 1)$.

Lineární zobrazení vektorových prostorů

1. Vyšetřete, zda je zobrazení $\mathscr{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineární, je-li
   a) $\mathscr{A}((x_1, x_2, x_3)) = (2x_2 + x_3, x_1 + x_3, 3x_1 + x_2 - x_3)$,
   b) $\mathscr{A}((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3, x_1^2)$.

2. Rozhodněte, zda je zobrazení $\mathscr{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineární, je-li

$$\mathscr{A}((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + 5x_2 - x_3, -x_1 - 2x_3 - 2).$$

3. Ověřte, zda je zobrazení $\mathscr{A}\colon P_2 \to \mathbb{R}^3$ lineární, přičemž $\mathscr{A}$ je definováno takto:
   $\mathscr{A}(ax^2 + bx + c) = (a + b, a - b, -c)$.

4. Je dáno lineární zobrazení $\mathscr{A}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované předpisy:
   $\mathscr{A}(1, -1) = (2, 3)$, $\mathscr{A}(-1, -1) = (1, 2)$. Určete obraz vektoru $(5, 1)$, tj. $\mathscr{A}(5, 1)$.

5. Je dáno zobrazení $\mathscr{A}\colon P_2 \to P_2$, takové že $\mathscr{A}(p) = p(-x) + p(x + 1)$.
   a) Dokažte, že se jedná o lineární zobrazení.
   b) Určete obraz polynomu $p(x) = 2 - 5x + 6x^2$.

6. Je dáno lineární zobrazení $\mathscr{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definované předpisy:

$$\mathscr{A}(1, 2, 0) = (2, 3), \quad \mathscr{A}(1, 1, 1) = (0, 1), \quad \mathscr{A}(-1, 3, -1) = (1, 4).$$

   a) Určete obraz vektoru $(6, 1, -7)$, tj. $\mathscr{A}(6, 1, -7)$.
   b) Určete obraz vektoru $(0, 0, -4)$, tj. $\mathscr{A}(0, 0, -4)$.

7. Je dáno lineární zobrazení $\mathscr{A} : P_2 \to \mathbb{R}^2$ definované předpisy

$$\mathscr{A}(x^2 + x) = (1, -1), \qquad \mathscr{A}(x^2 + x + 1) = (-1, 2), \qquad \mathscr{A}(x) = (0, -1).$$

   a) Nalezněte obraz polynomu $-2x^2 + 3x - 4$.
   b) Nalezněte vzor vektoru $(3, -2) \in \mathbb{R}^2$.

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathscr{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ předpisem

$$\mathscr{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3).$$

   Určete
   a) jádro zobrazení $\mathscr{A}$ a jeho dimenzi,
   b) obor hodnot (obraz) lineárního zobrazení a jeho dimenzi.

9. Je dáno lineární zobrazení $\mathscr{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definované předpisy:

$$\mathscr{A}(1, 1, -1) = (2, 1), \quad \mathscr{A}(1, -1, 1) = (2, -2), \quad \mathscr{A}(-1, 1, 1) = (0, -3).$$

   Nalezněte jádro lineárního zobrazení $\mathscr{A}$ a určete dimenzi jádra.

10. Je dána lineární transformace $\mathscr{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definovaná předpisy

$$\mathscr{A}(1,1,0) = (1,-1,1), \qquad \mathscr{A}(1,1,1) = (1,0,1), \qquad \mathscr{A}(0,1,0) = (0,-1,0).$$

a) Nalezněte jádro a určete jeho dimenzi.
b) Nalezněte obor hodnot a určete jeho dimenzi.

11. Je dáno lineární zobrazení $\mathscr{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ předpisem

$$\mathscr{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, 3x_2 + 4x_3).$$

Nalezněte matici lineárního zobrazení $\mathscr{A}$ vzhledem k bázím E a F, kde E je standardní báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ a $F = \langle f_1, f_1 \rangle$ je báze prostoru $\mathbb{R}^2$. Přitom $f_1 = (1,2)$, $f_2 = (2,2)$.

12. Je dáno lineární zobrazení $\mathscr{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definované předpisy:
$\mathscr{A}(1,1,-1,0) = (0,0,0)$, $\mathscr{A}(1,2,-1,-2) = (-1,-3,1)$, $\mathscr{A}(1,0,0,-1) = (0,0,0)$, $\mathscr{A}(1,1,1,1) = (5,8,2)$.
Sestavte matici lineárního zobrazení vzhledem ke standardním bázím prostoru $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$.

Výsledky

1. a) ano, b) ne,

2. ne,

3. ano,

4. $(1,0)$,

5. a) ano, b) $5 + 12x + 12x^2$,

6. a) $(\frac{43}{2}, \frac{19}{2})$, b) $(7,3)$,

7. a) $(6,-15)$, b) $1 + 5x + 5x^2 + p(1 + 3x + 2x^2)$,

8. a) $N(\mathscr{A}) = \{\underline{o}\}$, $dim N(\mathscr{A}) = 0$,
b) $H(\mathscr{A}) = \langle (1,1,1), (-1,1,1), (0,0,1) \rangle$, $dim H(\mathscr{A}) = 3$,

9. $N(\mathscr{A}) = \langle (-1,3,-1) \rangle$, $dim N(\mathscr{A}) = 1$,

10. a) $N(\mathscr{A}) = \langle (0,1,1) \rangle$, $dim N(\mathscr{A}) = 1$,
b) $H(\mathscr{A}) = \langle (1,0,1), (0,-1,0) \rangle$, $dim H(\mathscr{A}) = 2$,

11. $[\mathscr{A}]_{EF} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$.

12. $[\mathscr{A}]_{EF} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Bilineární formy

1. Rozhodněte, zda je zobrazení $B\colon P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$ definované pro každé $p, q \in P_2$ předpisem

   (a) $B(p,q) = 4p(0)q(1) + p(2)q(3)$

   (b) $B(p,q) = p(1)q(-1) + p(0)q^2(1)$

   bilineární forma.

2. Je dána bilineární forma $B\colon\ P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

   $$B(p(x), q(x)) = p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad \text{kde } p(x), q(x) \in P_2.$$

   Sestavte matici této bilineární formy vzhledem ke standardní bázi prostoru P_2.

3. Je dána bilineární forma $B\colon P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

   $$B(p,q) = p(2)q(3).$$

   Sestavte matici bilineární formy B vzhledem k bázi $E = (p_1, p_2, p_3)$, kde $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1 - x$, $p_3(x) = (1-x)^2$.

4. Je dána bilineární forma $B\colon P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

   $$B(p,q) = p(0)q(3),$$

   kde $p, q \in P_2$.

   (a) Sestavte matici bilineární formy B vzhledem k bázi $F = (p_1, p_2, p_3)$, kde $p_1 = 1$, $p_2 = x - 1$, $p_3 = (x-1)^2$.

   (b) Určete souřadnice polynomů $p(x) = x+1$ a $q(x) = x^2+1$ v bázi $F = (p_1, p_2, p_3)$.

   (c) Pomocí matice bilineární formy vyčíslete $B(p,q)$ pro polynomy $p(x)$, $q(x)$.

5. Je dána bilineární forma $B\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

   $$B(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - x_2y_3.$$

   (a) Určete její symetrickou a antisymetrickou část.

   (b) Určete matici bilineární formy B vzhledem ke standardní bázi, matici symetrické části B a matici antisymetrické části B.

6. Rozložte matici bilineární formy

   $$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

   na součet symetrické a antisymetrické části.

Výsledky

1. (a) ano, (b) ne,

2. $[B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $[B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

4. (a) $[B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

   (b) $p = (2, 1, 0)$, $q = (2, 2, 1)$,

   (c) $B(p, q) = 10$,

5. (a) $B^S(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 + \frac{3}{2}x_1y_3 - x_2y_1 - \frac{1}{2}x_2y_3 + \frac{3}{2}x_3y_1 - \frac{1}{2}x_3y_2$,
   $B^A(x, y) = -x_1y_2 + \frac{3}{2}x_1y_3 + x_2y_1 - \frac{1}{2}x_2y_3 - \frac{3}{2}x_3y_1 + \frac{1}{2}x_3y_2$,

   (b) $[B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $[B^S] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$, $[B^A] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

6. $[B] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Kvadratické formy

1. Je dána bilineární forma $B\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$B(x, y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 5x_2y_1 - 3x_2y_2.$$

Najděte kvadratickou formu příslušnou bilineární formě B a její matici.

2. Je dána bilineární forma $B : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$B(p(x), q(x)) = p(-1)q(2) + p(2)q(1)$$

   (a) Nalezněte matici bilineární formy vzhledem ke standardní bázi $E = (x^2, x, 1)$ a potom nalezněte matice její symetrické a antisymetrické části.

   (b) Určete obraz dvojice polynomů $p(x) = -3x^2 + 5x + 2$ a $q(x) = 4x^2 - 2x$ v bilineární formě.

   (c) Je kvadratická forma Q v P_2 daná předpisem $Q(p(x)) = 8a^2 + 2c^2 + 4ab + {} + 10ac + 4bc$, příslušná k bilineární formě B, jestliže $p(x) = ax^2 + bx + c$? Své tvrzení zdůvodněte!

3. Klasifikujte následující kvadratické formy:

   (a) $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) = 3x_2^2 - 2x_1x_2,$

   (b) $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) = -3x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3,$

   (c) $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3,$

   (d) $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3,$

   (e) $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3.$

4. Je dána kvadratická forma Q. Určete bázi, ve které má tato kvadratická forma diagonální matici a formu klasifikujte.

   (a) $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2,$

   (b) $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2,$

   (c) $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) = -2x_1^2 - 2x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2,$

   (d) $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 29x_3^2 + 4x_1x_2 - 12x_1x_3 - 4x_2x_3.$

5. Najděte diagonální matici D, která je kongruentní s maticí A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Výsledky

1. $Q(x) = x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2$,

   $[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

2. (a) $[B] = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $[B^S] = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $[B^A] = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $B(p, q) = -62$,

   (c) ano.

3. (a) indefinitní,

   (b) negativně definitní,

   (c) indefinitní,

   (d) indefinitní,

   (e) pozitivně definitní.

4. (a) indefinitní, báze $D = ((1, 0), (1, -3))$, $[Q]_D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

   (b) negativně definitní, báze $D = ((1, 0), (1, 2))$, $[Q]_D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$.

   (c) negativně semidefinitní, báze $D = ((1, 0), (1, -2))$, $[Q]_D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (d) pozitivně definitní, báze $D = ((1, 0, 0), (-1, 1, 0), (5, -2, 1))$, $[Q]_D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

5. Například $[Q] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$.

Skalární součin, ortogonalizace

1. Je dán vektorový prostor $\mathbb{R}^2$. Rozhodněte, zda následující předpisy určují skalární součin (u, v), přičemž $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$:
   (a) $(u, v) = 4u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 3u_2v_2$,
   (b) $(u, v) = 2u_1^2 + 4u_2^2 + 6u_3^2 - u_1v_2 - 2u_2v_3$.
2. V $\mathbb{R}^3$ je zadán skalární součin $(x, y) = 3x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3$. Ortogonalizujte bázi $F = \{f_1, f_2, f_3\}$, kde $f_1 = (0, 0, 1)$, $f_2 = (0, 1, 1)$, $f_3 = (1, 2, 1)$ vzhledem k zadanému skalárnímu součinu.
3. Gram-Smidtovým procesem nalezněte ortonormální bázi lineárního obalu vektorů $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, -1, 0)$, $u_3 = (1, 3, -1, 3)$ vzhledem ke skalárnímu součinu $(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$.
4. Je dán vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$. Vypočtěte souřadnice vektoru $x = (3, 4, 5)$ vzhledem k ortogonální bázi
$$E = \Big((1, -1, 1), (1, 1, 0), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)\Big).$$
   K výpočtu využijte ortogonality báze.

Výsledky

1. a) ano, b) ne,
2. $E = ((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$,
3. $E = \Big((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{3}{2\sqrt{3}})\Big)$,
4. $x = [\frac{4}{3}, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}]$.

Determinanty, Cramerovo pravidlo

1. Vypočtěte determinant matice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

2. Vypočtěte determinant matice B

$$B = \begin{bmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix}$$

3. Cramerovým pravidlem vypočtěte neznámou x_2 dané soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_2 + 3x_4 &= -1 \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 &= -2 \end{aligned}$$

4. Cramerovým pravidlem vypočtěte neznámou x_3 dané soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 13 \end{aligned}$$

5. Cramerovým pravidlem vypočtěte neznámou x_1 dané soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_4 &= 8 \end{aligned}$$

6. Pomocí determinantů určete inverzní matici A^{-1} k matici A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Pomocí determinantů určete inverzní matici A^{-1} k matici A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Výsledky

1. 0,
2. 1,
3. -2,
4. 3,
5. 4,
6. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$,
7. $A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \\ 8 & 4 & -4 \end{bmatrix}$