Domácí úkol - řešení

1. Jádro lin. zobrazení $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ označujeme $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ a definujeme $\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{A}(\underline{x}) = [0,0,0]\}$.

Lin. zobrazení $\mathcal{A}$ je určeno obrazy báze prostoru $\mathbb{R}^3$, neboť vektory $f_1 = [1,1,0]$, $f_2 = [1,1,1]$, $f_3 = [0,1,0]$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$. Platí tedy:

$\underline{x} = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$ (1) [vlastnost báze]

$\mathcal{A}(\underline{x}) = \alpha_1 \mathcal{A}(f_1) + \alpha_2 \mathcal{A}(f_2) + \alpha_3 \mathcal{A}(f_3)$ (2) [vlastnost lin. zobrazení]

Nejdříve vyřešíme rovnici (2):

$\alpha_1 [1,-1,1] + \alpha_2 [1,0,1] + \alpha_3 [0,-1,0] = [0,0,0]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \alpha_1 = -r \\ \alpha_2 = r \\ \alpha_3 = r \end{array}, \quad r \in \mathbb{R}$$

Dosadíme za $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ do rovnice (1):

$\underline{x} = -r[1,1,0] + r[1,1,1] + r[0,1,0] = [0,r,r]$

Odtud $\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \underline{x} = r[0,1,1],\ r \in \mathbb{R}\} = \langle [0,1,1] \rangle$.

Obor hodnot lin. zobrazení $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ označujeme $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ a definujeme
$$\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^3 : \underline{x} \in \mathbb{R}^3\}.$$

Z rovnice (2) je zřejmé, že obor hodnot je lin. obalem vektorů $\mathcal{A}(f_1)$, $\mathcal{A}(f_2)$, $\mathcal{A}(f_3)$, tj.

$\mathcal{H}(a) = \langle [1,-1,1], [1,0,1], \cancel{[0,-1,0]} \rangle = \langle [1,-1,1], [1,0,1] \rangle$ //

Platí totiž: $\quad 1 \cdot [1,-1,1] + (-1)[1,0,1] = [0,-1,0]$

2. Označme standardní báze prostorů $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3$ po řadě

$$\mathcal{E} = (\underbrace{[1,0,0,0]}_{\underline{e}_1}, \underbrace{[0,1,0,0]}_{\underline{e}_2}, \underbrace{[0,0,1,0]}_{\underline{e}_3}, \underbrace{[0,0,0,1]}_{\underline{e}_4})$$

$$\tilde{\mathcal{E}} = (\underbrace{[1,0,0]}_{\tilde{\underline{e}}_1}, \underbrace{[0,1,0]}_{\tilde{\underline{e}}_2}, \underbrace{[0,0,1]}_{\tilde{\underline{e}}_3})$$

Podle definice pro matici lin. zobr. a v bázích $\mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}$ platí:

$$[a]_{\mathcal{E},\tilde{\mathcal{E}}} = \left[[a(\underline{e}_1)]_{\tilde{\mathcal{E}}}, [a(\underline{e}_2)]_{\tilde{\mathcal{E}}}, [a(\underline{e}_3)]_{\tilde{\mathcal{E}}}, [a(\underline{e}_4)]_{\tilde{\mathcal{E}}} \right]$$

Z vlastnosti báze a lin. zobrazení vyplývá (viz 1. příklad):

$$\underline{e}_i = \alpha_{i1}[1,1,-1,0] + \alpha_{i2}[1,2,-1,-2] + \alpha_{i3}[1,0,0,-1] + \alpha_{i4}[1,1,1,1] \quad (1)$$

$$a(\underline{e}_i) = \alpha_{i1}[0,0,0] + \alpha_{i2}[-1,-3,1] + \alpha_{i3}[0,0,0] + \alpha_{i4}[5,8,2] = \quad (2)$$

$$i = 1,2,3,4 \qquad = \alpha_{i2}[-1,-3,1] + \alpha_{i4}[5,8,2]$$

Rovnice (1) představují čtyři lineární soustavy se stejnou maticí, které můžeme vyřešit pomocí jedné rozšířené matice:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -r_1 \\ +r_1 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ +2r_2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ +3r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$\alpha_{11} = \frac{3}{7}, \alpha_{21} = -\frac{1}{7}, \alpha_{31} = -\frac{5}{7}, \alpha_{41} = \frac{3}{7}$

$\alpha_{12} = -\frac{2}{7}, \alpha_{22} = \frac{3}{7}, \alpha_{32} = \frac{1}{7}, \alpha_{42} = -\frac{2}{7}$

$\alpha_{13} = \frac{5}{7}, \alpha_{23} = -\frac{4}{7}, \alpha_{33} = \frac{1}{7}, \alpha_{34} = -\frac{2}{7}$

$\alpha_{14} = \frac{1}{7}, \alpha_{24} = \frac{2}{7}, \alpha_{34} = \frac{3}{7}, \alpha_{44} = \frac{1}{7}$

$\mathcal{A}(\underline{e}_1) = -\frac{2}{7}[-1,-3,1] + \frac{4}{7}[5,8,2] = [1,2,0]$

$\mathcal{A}(\underline{e}_2) = \frac{3}{7}[-1,-3,1] + \frac{2}{7}[5,8,2] = [1,1,1]$

$\mathcal{A}(\underline{e}_3) = \frac{1}{7}[-1,-3,1] + \frac{3}{7}[5,8,2] = [2,3,1]$

$\mathcal{A}(\underline{e}_4) = -\frac{2}{7}[-1,-3,1] + \frac{1}{7}[5,8,2] = [1,2,0]$

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{E},\tilde{\mathcal{E}}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Zobrazení $\mathcal{A}: \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární, jestliže pro libovolné polynomy p, q a číslo α platí:

(i) $\mathcal{A}(p+q) = \mathcal{A}(p) + \mathcal{A}(q)$
(ii) $\mathcal{A}(\alpha p) = \alpha \mathcal{A}(p)$

Zvolíme lib. $p(x) = ax^2+bx+c$, $q(x) = dx^2+ex+f$ a $\alpha \in \mathbb{R}$.
$p(x)+q(x) = (a+d)x^2 + (b+e)x + (c+f)$, $\alpha p(x) = (\alpha a)x^2 + (\alpha b)x + (\alpha c)$.

(i) $L = \mathcal{A}(p+q) = [a+d-2(b+e)+3(c+f), (b+e)+(a+d)-(c+f), -2(a+d)-2(c+f)] =$
$= [(a-2b+3c)+(d-2e+3f), (b+a-c)+(e+d-f), (-2a-2c)+(-2d-2f)] =$
$= [a-2b+3c, b+a-c, -2a-2c] + [d-2e+3f, e+d-f, -2d-2f]$

$P = \mathcal{A}(p)+\mathcal{A}(q) = [a-2b+3c, b+a-c, -2a-2c] + [d-2e+3f, e+d-f, -2d-2f]$

$L = P \Rightarrow$ (i) platí

(ii) $L = \mathcal{A}(\alpha p) = [\alpha a - 2(\alpha b) + 3(\alpha c), \alpha b + \alpha a - \alpha c, -2(\alpha a) - 2(\alpha c)] =$
$= \alpha[a-2b+3c, b+a-c, -2a-2c]$

$P = \alpha \mathcal{A}(p) = [\alpha(a-2b+3c), \alpha(b+a-c), \alpha(-2a-2c)] =$
$= \alpha[a-2b+3c, b+a-c, -2a-2c]$ $\quad L = P \Rightarrow$ (ii) platí

Dané zobrazení je tedy lineární.

Přistupme nyní k sestavení matice vzhledem ke standardním bázím $E = (x^2, x, 1)$ a $F = ([1,0,0], [0,1,0], [0,0,1])$.

Podle definice určíme obrazy polynomů $x^2, x, 1$ a jejich souřadnice v bázi F napíšeme jako sloupce matice lin. zobrazení.

$$x^2 = 1x^2 + 0x + 0 \cdot 1 : \quad a(x^2) = [1, 1, -2]$$
$$x = 0x^2 + 1x + 0 \cdot 1 : \quad a(x) = [-2, 1, 0]$$
$$1 = 0x^2 + 0x + 1 \cdot 1 : \quad a(1) = [3, -1, -2]$$

$$[a]_{E,F} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [a(x^2)]_F, & [a(x)]_F, & [a(1)]_F \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$