Řešení 3. domácího úkolu

1. Množina $\mathcal{F}$ je uzavřena vzhledem k operacím sčítání a násobení skalárem. Zbývá ověřit, zda-li jsou splněny všechny axiomy vek. prostoru. Snadno ověříme, že neplatí komutativní zákon, tj:

$$f+g \neq g+f$$

$$(f+g)(x) = f(x) + 2g(x), \quad (g+f)(x) = g(x) + 2f(x)$$

$$f(x) + 2g(x) = g(x) + 2f(x) \iff$$

$$g(x) = f(x)$$

Komutativní zákon by platil pouze v případě, že funkce f a g by byly stejné. Pro různé funkce f a g však neplatí.

2. Sestavíme lin. kombinaci polynomů x^2-1, x^2+1, $4x$, $2x-3$ a položíme ji rovnou nulovému polynomu, tj:

$$\alpha_1(x^2-1) + \alpha_2(x^2+1) + \alpha_3 \cdot 4x + \alpha_4(2x-3) = 0x^2 + 0x + 0 \qquad (1)$$

Porovnáme nyní koeficienty u jednotlivých mocnin.

$$\begin{array}{lrrrrl} x^2: & \alpha_1 & +\alpha_2 & & & = 0 \\ x^1: & & & 4\alpha_3 & +2\alpha_4 & = 0 \\ x^0: & -\alpha_1 & +\alpha_2 & & -3\alpha_4 & = 0 \end{array} \qquad (2)$$

Sestavíme rozšířenou matici soustavy (2) a upravíme na schodový tvar.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ r_3 \\ r_2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ r_2+r_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \alpha_1 = -3r \\ \alpha_2 = 3r \\ \alpha_3 = -r \\ \alpha_4 = 2r,\ r \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Rovnice (1) má i netriviální řešení, například pro $r=1$: $\alpha_1=-3$, $\alpha_2=3$, $\alpha_3=-1$, $\alpha_4=2$, a tedy množina daných polynomů je lin. závislá.

3. Nejdříve ukážeme, že vektory $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ jsou lin. nezávislé.

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3 = \underline{o} \qquad (*)$$

$$\alpha_1 (1,3,-2) + \alpha_2 (4,1,3) + \alpha_3 (-1,2,0) = (0,0,0)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ r_2-3r_1 \\ r_3+2r_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -11 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & -2 & 0 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ \\ r_3+r_2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -11 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{matrix}$$

Rovnice (*) má pouze triviální řešení, tzn. vektory $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ jsou lin. nezávislé, a tedy tvoří bázi vek. prostoru $\mathbb{R}^3$, neboť $\dim(\mathbb{R}^3)=3$, takže libovolná trojice lin. nezávislých vektorů tvoří jeho bázi.

Vektor $\underline{v}$ nyní vyjádříme jako lin. kombinaci vektorů $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$, tj: $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3 = \underline{v}$. Této rovnici odpovídá soustava rovnic s maticí:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 13 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right],$$ kterou opět upravíme na schodový tvar.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 13 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ r_2-3r_1 \\ r_3+2r_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -11 & 5 & 4 \\ 0 & 11 & -2 & 5 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ \\ r_3+r_2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -11 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right] \begin{matrix} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 3 \end{matrix}$$

Vektor $\underline{v}$ má vzhledem k usp. bázi F souřadnice $2, 1, 3$.