# Domácí úkol č. 2 – řešení

1. Sestavíme rozšířenou matici soustavy a pomocí elementárních řádkových operací ji upravíme na schodový tvar:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 9 & -3 & -1 & -7 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 9r_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 5 & -5 & -12 \\ 0 & -3 & 17 & -16 & -50 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ r_3 - 3r_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 5 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -14 \end{array}\right]$$

Získali jsme matici ve schodovém tvaru. Ve čtvrtém sloupci chybí vedoucí prvek, proto neznámou $x_4$ volíme libovolně. Položíme $x_4 = 2r$, $r \in \mathbb{R}$ (parametr) a přistoupíme ke zpětné substituci:

$$2x_3 - 2r = -14 \Rightarrow x_3 = -7 + r; \quad -x_2 + 5(-7+r) - 10r = -12 \Rightarrow x_2 = -23 - 5r,$$

$$x_1 - 2(-7+r) + 2r = 6 \Rightarrow x_1 = -8$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na jednom parametru: $\underline{x_1 = -8,\ x_2 = -23-5r,\ x_3 = -7+r,\ x_4 = 2r}$

Hledáme řešení, pro které platí $x_2 = -3$:

$$x_2 = -3 \Leftrightarrow -23 - 5r = -3 \Leftrightarrow -5r = 20 \Leftrightarrow \underline{r = -4}$$

Příslušné řešení zapsané jako vektor má tvar

$$\underline{\underline{x} = [-8, -3, -11, -8]^T}$$

2. Budeme postupovat stejně jako v příkladě 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 1 & -1 & 2 & b_2 \\ 0 & 4 & -3 & b_3 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ r_2-r_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & -4 & 3 & b_2-b_1 \\ 0 & 4 & -3 & b_3 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ \\ r_3+r_2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & -4 & 3 & b_2-b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3+b_2-b_1 \end{array}\right]$$

Poslední řádek v upravené matici soustavy je nulový. Soustava může mít řešení jenom tehdy, bude-li také nulový prvek v posledním řádku a sloupci, tj. musí platit $\underline{-b_1+b_2+b_3=0}$.

Obdrželi jsme rovnici o třech neznámých. Neznámé $b_3$ a $b_2$ volíme libovolně: $b_3=s$, $b_2=r$, $(r,s\in\mathbb{R})$ a dopočteme $b_1=r+s$.

Soustava bude mít řešení, jestliže vektor pravých stran bude mít tvar

$$\underline{\underline{b}=[r+s,\ r,\ s]^T;\quad r,s\in\mathbb{R}}$$

3. Inverzní matici vypočteme pomocí následujícího algoritmu:

$$[B|I] \overset{\text{elem. řádk. operace}}{\sim} \cdots \sim [I|B^{-1}]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ r_2-2r_1 \\ r_3+3r_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -10 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} r_1+3r_2 \\ \\ r_3+11r_2 \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -19 & 11 & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} r_1-r_3 \\ r_2-r_3 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 14 & -8 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 17 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -19 & 11 & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ -r_2 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 14 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -17 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -19 & 11 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 14 & -8 & -1 \\ -17 & 10 & 1 \\ -19 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

4. – Nejprve provedeme redukci matice $A$ na matici $U$. Řádky nevyměňujeme a vždy přičítáme násobek řádku k řádku, který je pod ním:

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l} \\ r_2-\frac{1}{2}r_1 \\ r_3-\frac{1}{4}r_1\end{array} \sim \begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{array}\right] \\ \quad s_3 \;\; s_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ r_3-\frac{3}{2}r_2\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \underline{U = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}, \quad \tilde{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

– Nalezení matice $L$ $(L = \tilde{L}^{-1})$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ r_2+\frac{1}{2}r_1 \\ r_3-\frac{1}{2}r_1\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ r_3+\frac{3}{2}r_2\end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \underline{L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}}$$

– Výpočet permutační matice $P$:

$$I = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \quad s_3 \;\; s_2 \end{array} \sim \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P}$$