Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

Fakulta elektrotechniky a informatiky

LINEÁRNÍ ALGEBRA

pro kombinované a distanční studium

Zdeněk Dostál, Libor Šindel

Ostrava 2003

Autoři: Zdeněk Dostál, Libor Šindel
Lineární algebra

Obsah

Kapitola 1

Číselné množiny

Průvodce studiem

Uběhla velmi dlouhá doba, než se v matematice ustálily pojmy jako čísla přirozená, celá, racionální, reálná a komplexní. Jejich zavedení bylo vyžádáno potřebami odstranit nedostatky ve stávajícím číselném systému. V této kapitole si jednotlivé číselné obory stručně připomeneme spolu s možnostmi jejich využití i potížemi.

Cíle

Naučíte se:

- zapisovat zmíněné číselné množiny,
- základní vlastnosti těchto číselných množin.

1.1. Přirozená čísla

Množinu přirozených čísel zapisujeme ve tvaru

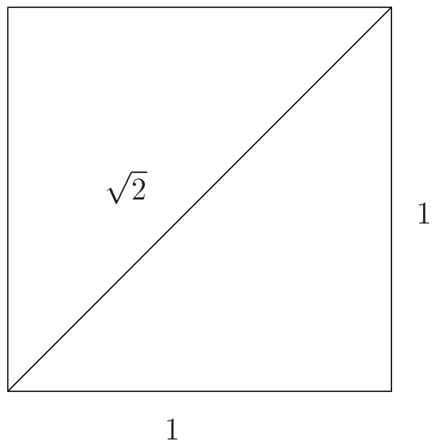
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

V množině přirozených čísel můžeme sčítat a násobit, tj. součtem nebo součinem přirozených čísel je opět přirozené číslo. Říkáme také, že obor přirozených čísel je uzavřený vzhledem k operacím sčítání a násobení.

1.2. Celá čísla

Přidáme-li k množině přirozených čísel nulu a celá čísla záporná obdržíme množinu celých čísel

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$



Obr. 1.1: Úhlopříčka čtverce

v níž můžeme navíc bez omezení odčítat. Zbývá tak ještě základní operace dělení, kterou v oboru celých čísel nelze vždy realizovat. Například dělení 12 : 3 lze provést, ne však dělení 12 : 5 nebo −5 : 0.

1.3. Racionální čísla

Zcela odlišná od celých čísel jsou čísla tvaru

$$\frac{p}{q} \tag{1.1}$$

kde p a q jsou celá čísla, přičemž $q \neq 0$. Množinu všech čísel tvaru 1.1 nazýváme množinou racionálních čísel a označujeme ji $\mathbb{Q}$. Tedy

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : \; p, q \in \mathbb{Z} \;\wedge\; q \neq 0 \right\}.$$

Každé celé číslo p můžeme vyjádřit jako $\frac{p}{1}$, takže $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Množina racionálních čísel je uzavřena vzhledem k operacím sčítání, odčítání, násobení a dělení, vyjma dělení nulou. Nicméně existuje celá řada úloh poukazujících na určitou neúplnost racionálních čísel. Už v antickém Řecku bylo objeveno, že poměr délky úhlopříčky čtverce k délce jeho strany nelze vyjádřit jako poměr dvou celých čísel. Víme, že tento poměr je roven $\sqrt{2}$.

1.4. Reálná čísla

Čísla, která nejsou racionální nazýváme iracionální. Sjednocením množin všech racionálních a iracionálních čísel dostaneme množinu všech reálných čísel $\mathbb{R}$. Problém s neúplností racionálních čísel je tak vyřešen, nicméně ani obor reálných čísel není ještě úplně bez problémů. Už v 16. století italský matematik Gieronymo Cardano při řešení úlohy rozložit číslo 10 na součet dvou sčítanců, jejichž součin je 40, nalezl pro rovnici $x(10-x)=40$ kořeny

$$x_1 = 5 + \sqrt{-15}, \quad x_2 = 5 - \sqrt{-15}\,. \tag{1.2}$$

Zcela analogicky při řešení kvadratické rovnice upravené na tvar

$$x^2 + 2px + q = 0 \tag{1.3}$$

dospějeme k výrazům

$$x_1 = -p + \sqrt{D}, \quad x_2 = -p - \sqrt{D}. \tag{1.4}$$

Je-li diskriminant $D = p^2 - q \geq 0$, jsou x_1, x_2 reálná čísla. Je-li $D < 0$, rovnice nemá reálné řešení. Problém tkví ve skutečnosti, že ani poměrně jednoduchou operaci jako je druhá odmocnina, nemůžeme aplikovat na záporná čísla.

Na druhé straně, nebudeme-li brát ohled na znaménko diskriminantu a s výrazy 1.2 nebo 1.4 budeme počítat jako s dvojčleny podle pravidel platných pro reálná čísla, shledáme, že jsou formálním řešením našich úloh. Skutečně

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \left(5 + \sqrt{15}\right) + \left(5 - \sqrt{15}\right) = 10, \\ x_1 x_2 &= \left(5 + \sqrt{15}\right)\left(5 - \sqrt{15}\right) = 25 - (-15) = 40. \end{aligned}$$

Stejně tak

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2px_1 + q &= \left(-p + \sqrt{D}\right)^2 + 2p\left(-p + \sqrt{D}\right) + q = \\ &= p^2 - 2p\sqrt{D} + D - 2p^2 + 2p\sqrt{D} + q = -p^2 + q + D = 0, \quad \text{atd.} \end{aligned}$$

Proveďme nyní ve výrazech 1.4 v případě, že $D < 0$ tuto formální úpravu:

$$x_{1,2} = -p \pm \sqrt{(-D)\,(-1)} = -p \pm \sqrt{-D}\sqrt{-1} = a + bi$$

Použili jsme označení $a = -p$, $b = \sqrt{-D}$, $i = \sqrt{-1}$. Nyní vidíme, že má-li mít kvadratická rovnice 1.3 vždy řešení, je třeba rozšířit obor reálných čísel o „*čísla imaginární*“ $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$ a s těmito čísly počítat podle pravidel:

$$\begin{aligned} &i^2 = -1 \\ &(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i \\ &(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bdi^2 + adi + bci = (ac - bd) + (ad + bc)\,i \end{aligned}$$

Pojmy k zapamatování

$\boxed{\Sigma}$

— číslo přirozené, celé, racionální, iracionální, reálné a imaginární,

— uzavřenost číselného oboru vzhledem k početní operaci,

— závislost řešení kvadratické rovnice na diskriminantu.

Kapitola 2

Komplexní čísla

Průvodce studiem

Jak už bylo řečeno, potřeba najít vždy řešení kvadratické rovnice vyžaduje zavedení čísel $a+bi$*, kterým budeme říkat komplexní čísla. Všimněme si, že každé komplexní číslo* $a+$ $+bi$ *lze také nahradit uspořádanou dvojicí reálných čísel* (a,b)*. Například dvojice* $(-1,2)$ *značí číslo* $-1+2i$*,* $(0,1)$ *značí číslo* $0+1i=i$ *a* $(2,0)$ *značí číslo* $2+0i=2$*. Této skutečnosti využijeme při konstrukci oboru komplexních čísel.*

Cíle

Cílem této kapitoly je vybudovat obor komplexních čísel, poukázat na různé způsoby jejich vyjádření a možnosti aplikace. Po jejím prostudování budete znát:

- algebraický a goniometrický tvar komplexního čísla a jeho znázornění v Gaussově rovině,
- základní početní operace s komplexními čísly včetně umocňování a odmocňování,
- řešení kvadratické a binomické rovnice.

2.1. Zavedení komplexních čísel

Definice 2.1. Komplexními čísly nazýváme uspořádané dvojice reálných čísel např. (a,b), (c,d), pro které definujeme rovnost, sčítání a násobení následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
&(a,b)=(c,d) \text{ právě tehdy, když } a=c \text{ a } b=d\\
&(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\\
&(a,b).(c,d)=(ac-bd,ad+bc)\ .
\end{aligned}$$

Množinu komplexních čísel budeme značit $\mathbb{C}$.

Příklad 2.2. Určete součet a součin komplexních čísel $(1,-2)$; $(3,7)$.

Řešení.

$$\begin{aligned}(1,-2)+(3,7)&=(1+3,-2+7)=(4,5)\;,\\(1,-2)\,.\,(3,7)&=(1.3-(-2)\,.7,1.7+(-2)\,.3)=(17,1)\,.\end{aligned}$$

▲

Je-li $(a,b)\,,\ (c,d)\,,\ (\mathrm{e},f)\in\mathbb{C}$, snadno se ukáže platnost těchto tvrzení:

$$(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b) \tag{2.1a}$$
$$(a,b)+[(c,d)+(\mathrm{e},f)]=[(a,b)+(c,d)]+(\mathrm{e},f) \tag{2.1b}$$
$$(a,b)+(0,0)=(a,b) \tag{2.1c}$$
$$(a,b)+(-a,-b)=(0,0) \tag{2.1d}$$
$$(a,b)\,.\,(c,d)=(c,d)\,.\,(a,b) \tag{2.1e}$$
$$(a,b)\,.\,[(c,d)\,.\,(\mathrm{e},f)]=[(a,b)\,.\,(c,d)]\,.\,(\mathrm{e},f) \tag{2.1f}$$
$$(a,b)\,.\,(1,0)=(a,b) \tag{2.1g}$$
$$(a,b)\neq(0,0)\Rightarrow(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0) \tag{2.1h}$$
$$(a,b)\,.\,[(c,d)+(\mathrm{e},f)]=(a,b)\,.\,(c,d)+(a,b)\,.\,(\mathrm{e},f) \tag{2.1i}$$

Ze vztahů (2.1a) až (2.1d) můžeme usoudit, že operace sčítání je komutativní a asociativní. Jejím nulovým prvkem je číslo $(0,0)$, číslem opačným k (a,b) je číslo $(-a,-b)$. 2.1e až 2.1h ukazují, že operace násobení je také komutativní a asociativní. Jednotkou je číslo $(1,0)$ a převrácenou hodnotou čísla $(a,b)\neq(0,0)$ (respektive inverzním prvkem k $(a,b)\neq(0,0)$) je číslo

$$(a,b)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

Obě operace jsou svázány distributivním zákonem (2.1i). Ukážeme si například, jak můžeme převrácenou (reciprokou) hodnotu čísla $(a,b)\neq(0,0)$ odvodit. Hledáme vlastně komplexní číslo (x,y) takové, aby platilo $(a,b)\,(x,y)=(1,0)$. Z definice násobení a rovnosti komplexních čísel vyplývá, že

$$\left.\begin{array}{rcrcl}ax&-&by&=&1\\bx&+&ay&=&0\end{array}\right\} \tag{2.2}$$

Soustavu řešíme například sčítací metodou. Vynásobíme-li první rovnici a a druhou rovnici b, obdržíme po sečtení obou rovnic $(a^2+b^2)\,x=a$. Stejně tak po vynásobení první rovnice $(-b)$ a druhé a, vychází po sečtení $(a^2+b^2)\,y=-b$. Je zřejmé, že soustava 2.2 má jediné řešení právě tehdy, když $a^2 + b^2 \neq 0$, tj. $(a, b) \neq (0, 0)$. Potom dostáváme

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

a inverzní prvek je nalezen.

Definice 2.3. Rozdílem komplexních čísel (a, b), (c, d) nazýváme komplexní číslo (x, y), pro které platí

$$(a, b) = (c, d) + (x, y)\,.$$

Lehce zjistíme, že hledaným číslem je uspořádaná dvojice $(a - c, b - d)$. Píšeme tedy

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)\,.$$

Definice 2.4. Podílem komplexních čísel (a, b), (c, d) se nazývá komplexní číslo (x, y) takové, že

$$(a, b) = (c, d)\,(x, y) \quad .$$

Stejným postupem jako při hledání komplexního čísla $(a, b)^{-1}$, najdeme řešení

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\ . \tag{2.3}$$

Platí

$$\frac{(a, b)}{(c, d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) \quad .$$

Příklad 2.5. Najděte rozdíl a podíl komplexních čísel $(1, -2)$, $(3, 7)$.

Řešení.

$$\begin{aligned} (1, -2) - (3, 7) &= (1 - 3, -2 - 7) = (-2, -9) \\ \frac{(1, -2)}{(3, 7)} &= \left(\frac{1.3 + (-2)\,.7}{3^2 + 7^2}, \frac{-2.3 - 1.7}{3^2 + 7^2} \right) = \left(-\frac{11}{58}, -\frac{13}{58} \right) \quad . \end{aligned}$$

▲

Zastavme se nyní u komplexním čísel, která jsou reprezentována uspořádanými dvojicemi $(a, 0)$, kde $a \in \mathbb{R}$. Ve shodě s definicí sčítání a násobení komplexních čísel vychází

$$\begin{aligned} (a, 0) + (b, 0) &= (a + b, 0) \quad , \\ (a, 0)\,.\,(b, 0) &= (ab, 0) \quad , \end{aligned}$$

takže množina komplexních čísel tvaru $(a, 0)$ je uzavřena vzhledem k operacím sčítání a násobení, které splňují tvrzení (2.1a) až (2.1i). Nulovým prvkem a jednotkovým prvkem jsou opět čísla $(0, 0)$ a $(1, 0)$. Číslem opačným k $(a, 0)$ je $(-a, 0)$ a inverzním prvkem k prvku $(a, 0) \neq (0, 0)$ je prvek $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$. V množině komplexních čísel $\mathbb{C}$ tedy existuje podmnožina $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$, která vykazuje vzhledem ke sčítání a násobení stejné vlastnosti jako množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$. V důsledku toho můžeme komplexní číslo $(a, 0)$ ztotožnit s reálným číslem a.

Naproti tomu komplexní čísla $(0, b)$, $b \in \mathbb{R}$, nelze v řádném případě ztotožnit s čísly reálnými. Množina těchto čísel není ani uzavřena vzhledem k násobení:

$$(0, b)\,(0, d) = (-bd, 0)\,.$$

Výsledkem není komplexní číslo stejného typu, nýbrž komplexní číslo, které jak už bylo řečeno bereme jako reálné. To má však pro nás velký význam. Nyní už není problém najít komplexní číslo, jehož čtverec je roven -1. Je jím komplexní číslo $(0, 1)$:

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)\ .$$

Označíme-li tedy $i = (0, 1)$, můžeme každé komplexní číslo (a, b) psát v algebraickém tvaru $a + bi$ zavedeném německým matematikem K. F. Gaussem (1777-1855). Platí

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

Dospěli jsme tak ke stejnému zápisu komplexního čísla jako v části (1.4). K označení komplexních čísel budeme také používat písmena, např. $z = a + bi$. Je-li $z = a + bi$, nazývá se a *reálná* část čísla z, zatímco b je jeho *imaginární* částí, což zapisujeme

$$a = Re\ z, \quad b = Im\ z\ .$$

Komplexní číslo, jehož imaginární část je různá od nuly se nazývá imaginární. Čísla tvaru bi, $b \neq 0$, označujeme jako ryze imaginární. Číslo i, jehož reálná část se rovná nule a imaginární část je rovna jedné, se nazývá imaginární jednotka.

V dalším textu budeme výhradně užívat algebraického zápisu komplexního čísla, neboť takto se všechna pravidla pro počítání s komplexními čísly dobře pamatují.

$$\begin{aligned}
(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i\ ,\\
(a + bi) - (c + di) &= (a - c) + (b - d)i\ ,\\
(a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i\ .
\end{aligned}$$

Všimněme si, že komplexní čísla sčítáme, odčítáme a násobíme podobně jako polynomy, přičemž klademe

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = i^2 i^2 = 1\ .$$

Tedy např.:

$$\begin{aligned}
(1 - 2i)\,(3 + 7i) &= 3 - 6i + 7i - 14i^2 = 17 + i\\
(1 - 2i)^3 &= 1 - 6i + 12i^2 - 8i^3 = -11 + 2i.
\end{aligned}$$

Je-li $z = a + bi \neq 0$, vypočte se převrácená hodnota následovně (srovnej s (2.1h)):

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{a+bi}\frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\ . \tag{2.4}$$

Speciálně pro podíl $(a+bi)\,/\,(c+di)$ vyjde (srovnej s (2.3)):

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd+(bc-ad)\,i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\ . \tag{2.5}$$

Ukažme si ještě jeden výpočet:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)\,(1+i)}{(1-i)\,(1+i)} = \frac{2i}{2} = i\ .$$

Postupu, který jsme použili při výpočtu podílu dvou komplexních čísel se říká usměrňování. Je-li např. ve jmenovateli číslo $a+bi$, rozšíříme zlomek číslem $a-bi$; tj. číslem se stejnou reálnou a opačnou imaginární částí.

Definice 2.6. Nechť $z = a + bi$ je libovolné komplexní číslo. Číslo $\overline{z} = a - bi$ se nazývá číslo komplexně sdružené k z.

Poznámka 2.7. Součinem čísel navzájem komplexně sdružených $z\overline{z}$ je číslo reálné! Navíc platí $z = \overline{z}$ právě tehdy, když $z \in \mathbb{R}$.

Definice 2.8. Nechť $z = a + bi$. Reálné číslo $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$ se nazývá absolutní hodnota (modul) čísla z. Komplexní číslo z takové, že $|z| = 1$ se nazývá komplexní jednotka.

Příklad 2.9. Určete hodnoty $|3-4i|$, $|1|$, $|0|$, $|i|$.

Řešení.

$$|3-4i| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5;\ \ |1| = \sqrt{1^2+0^2} = 1;\ \ |i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1;\ \ |0| = 0$$

▲

Příklad 2.10. Ukažte, že pro libovolná komplexní čísla z_1, z_2 platí

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\,\overline{z}_2 \tag{2.6a}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|\ . \tag{2.6b}$$

Řešení. Položíme $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Nejprve vypočteme součiny $z_1 z_2$, $\bar{z}_1 \bar{z}_2$, a nakonec určíme číslo komplexně sdružené k součinu $z_1 z_2$:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a + bi)\,(c + di) = ac - bd + (ad + bc)\, i \ , \\ \bar{z}_1 \bar{z}_2 &= (a - bi)\,(c - di) = ac - bd - (ad + bc)\, i \ , \\ \overline{z_1 z_2} &= ac - bd - (ad + bc)\, i = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \ . \end{aligned}$$

Nyní přistoupíme k ověření rovnosti 2.6b:

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2})} = \sqrt{(z_1 z_2)(\bar{z}_1 \bar{z}_2)} = \sqrt{(z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2)} = \sqrt{z_1 \bar{z}_1}\sqrt{z_2 \bar{z}_2} = |z_1|\,|z_2| \ .$$

Využili jsme první rovnosti 2.6a, tvrzení 2.1e, 2.1f a pravidla pro výpočet odmocniny ze součinu reálných čísel. ▲

Pojmy k zapamatování

Σ

— algebraický tvar komplexního čísla,
— reálná a imaginární část komplexního čísla,
— čísla komplexně sdružená,
— absolutní hodnota (modul) komplexního čísla.

Příklady k procvičení

!

1. Co je komplexní číslo? Jaké zápisy používáme pro komplexní čísla?

2. Ukažte, že sčítání a násobení komplexních čísel je komutativní a asociativní a že obě operace jsou svázány distributivním zákonem.

3. Která čísla nazýváme imaginární a ryze imaginární?

4. Vypočtěte: a) i^5 ; b) i^6 ; c) i^7 ; a pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ vypočtěte d) i^{4n} ; e) i^{4n+1} ; f) i^{4n+2} ; g) i^{4n+3} .

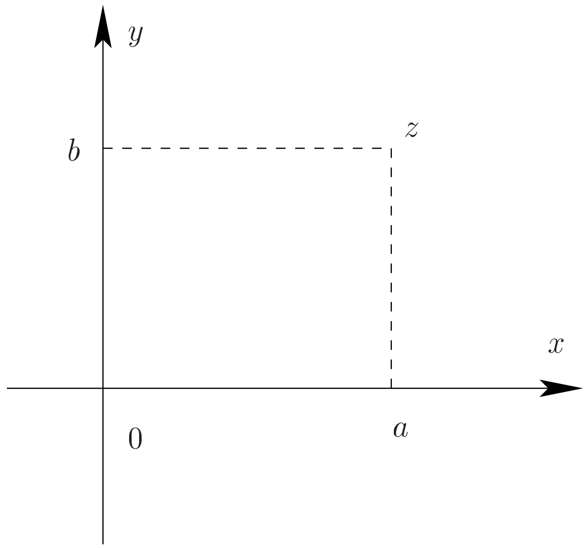
5. Vypočtěte: a) $(3 + i) + (2 - 5i)$; b) $(3 + i) - (2 - 5i)$; c) $(3 + i)\,(2 - 5i)$; d) $(3 + i) \,/\, (2 - 5i)$.

6. Položte $z = a + bi$ a vypočítejte: a) $Re\ z^2$; b) $Im\ z^2$; c) $Re\ (z + \bar{z})$; d) $Im\ (z + \bar{z})$; e) $Re\ (z - \bar{z})$; f) $Im\ (z - \bar{z})$; g) $Re\ \frac{1}{z}$; h) $Im\ \frac{1}{z}$; i) $Re\ \frac{1}{\bar{z}}$; j) $Im\ \frac{1}{\bar{z}}$.

7. Dokažte, že platí: a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; b) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$; c) $\overline{(\bar{z})} = z$.

8. Ukažte, že platí: a) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$; b) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Řešení.



Obr. 2.1: Geometrické znázornění komplexního čísla

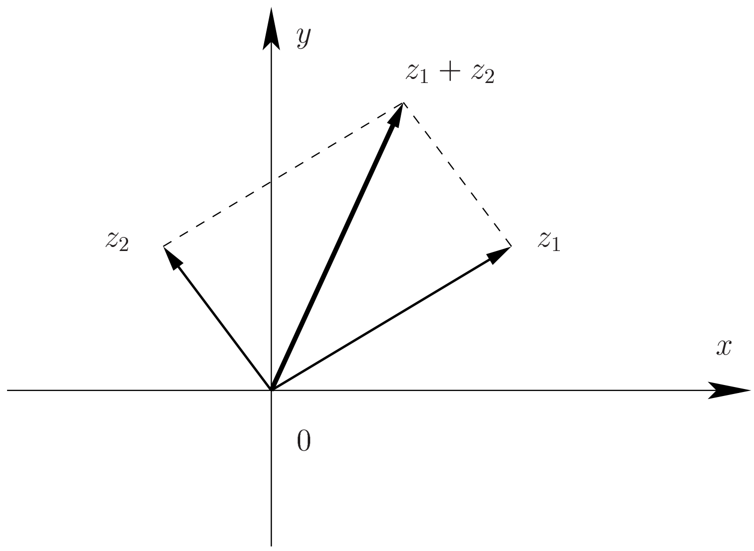
4. a) i ; b) -1 ; c) $-i$; d) 1 ; e) i ; f) -1 ; g) $-i$.
5. a) $5-4i$; b) $1+6i$; c) $11-13i$; d) $\frac{1}{29}+\frac{17}{29}i$.
6. a) a^2-b^2 ; b) $2ab$; c) $2a=2Re\ z$; d) 0 ; e) 0 ; f) $2b=2Im\ z$; g) $\frac{a}{a^2+b^2}$; h) $\frac{-b}{a^2+b^2}$; i) $\frac{a}{a^2+b^2}$; j) $\frac{b}{a^2+b^2}$.
8. b) Návod:
$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+\bar{z}_1z_2+z_1\bar{z}_2,\ \bar{z}_1z_2+z_1\bar{z}_2=2Re(\bar{z}_1z_2)\le 2|\bar{z}_1z_2|$.

▲

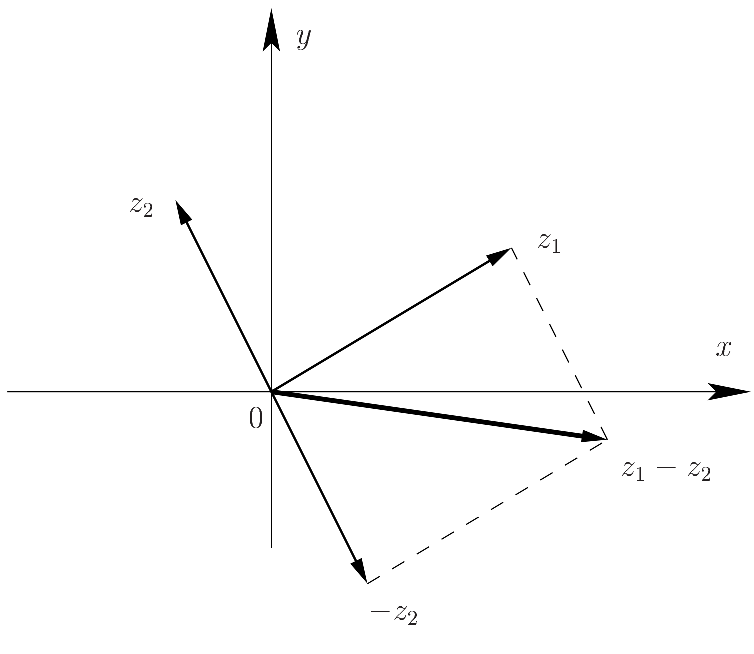
2.2. Geometrická interpretace komplexních čísel

Buď dána rovina s pravoúhlým souřadnicovým systémem, jehož osy označíme x, y. Z analytické geometrie víme, že si body roviny a uspořádané dvojice reálných čísel jejich pravoúhlých souřadnic vzájemně jednoznačně odpovídají. Každému komplexnímu číslu $z=a+bi$ můžeme přiřadit v této rovině bod o souřadnicích (a,b) a naopak každému bodu (a,b) této roviny odpovídá jediné číslo $a+bi$ (obr. 2.1). V této souvislosti se osa x nazývá reálná osa a y imaginární osa. Reálná a imaginární osa se někdy označují $Re\ z$, $Im\ z$. Rovina, v níž znázorňujeme komplexní čísla, se nazývá Gaussova rovina a označuje se $\mathbb{C}$. Počátek souřadnicového systému je obrazem čísla 0.

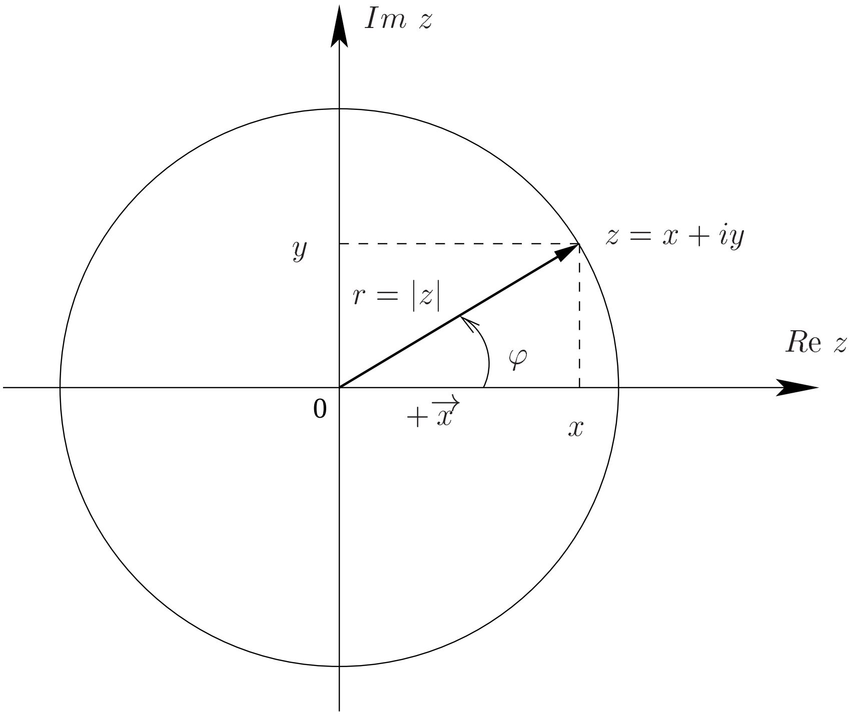
Někdy také ztotožňujeme komplexní čísla s vektory v rovině. Číslu $z=a+bi$ odpovídá vektor mající délku $|z|$ a směr polopřímky $\overrightarrow{0z}$. Součet a rozdíl komplexních čísel z_1, z_2; pak interpretujeme jako součet a rozdíl příslušných vektorů (obr. 2.2, 2.3).



Obr. 2.2: Geometrická interpretace součtu komplexních čísel



Obr. 2.3: Geometrická interpretace rozdílu komplexních čísel



Obr. 2.4: Znázornění komplexního čísla pomocí argumentu a modulu

!

Příklady k procvičení

1. Znázorněte v Gaussově rovině čísla: a) 1 ; b) i ; c) $-1 + 2i$; d) $3 - i$.

2. Komplexní čísla $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = -1 - 2i$ znázorněte jako vektory a určete $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$.

3. Kde leží v Gaussově rovině všechny komplexní jednotky?

2.3. Goniometrický tvar komplexního čísla

Absolutní hodnotu komplexního čísla můžeme interpretovat geometricky jako délku vektoru, který toto číslo znázorňuje. Nenulová komplexní čísla se stejným modulem leží na kružnici se středem v počátku a poloměrem rovným danému modulu.

K jednoznačnému určení komplexního čísla z potřebujeme ještě znát velikost orientovaného úhlu, jehož počátečním ramenem je kladná část osy x (ozn. $+\overrightarrow{x}$), a koncovým ramenem polopřímka $\overrightarrow{0z}$ (viz obrázek 2.4).

Definice 2.11. Argumentem čísla $z = x + iy \neq 0$ (značíme $Arg\ z$) nazýváme každé reálné číslo φ splňující dvě podmínky

$$\cos\varphi = \frac{Re\ z}{|z|},\ \sin\varphi = \frac{Im\ z}{|z|}\ . \tag{2.7}$$

Argument čísla 0 není definován.

Poznámka 2.12. Tento argument, jak již bylo naznačeno, můžeme chápat jako velikost orientovaného úhlu uspořádané dvojice polopřímek $(+\overrightarrow{x}, \overrightarrow{0z})$. Z vlastnosti goniometrických funkcí sinus a kosinus vyplývá, že každé komplexní číslo $z \neq 0$ má nekonečně mnoho argumentů, přičemž každé dva se liší o celistvý násobek čísla 2π.

Někdy se zavádí pojem *hlavního argumentu*: je to taková hodnota $Arg\ z$, která patří do intervalu $(-\pi, \pi\rangle$ a značí se $arg\ z$. Platí tedy

$$-\pi < arg\ z \leq \pi\ ,$$

a

$$Arg\ z = arg\ z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\ . \tag{2.8}$$

Někdy se také píše $Arg\ z \equiv arg\ z \pmod{2\pi}$, nebo stručněji $Arg\ z \sim arg\ z$, což čteme: argument a hlavní argument z se rovnají modulo 2π a intrepretujeme: rozdíl $Arg\ z - arg\ z$ je celým násobkem čísla 2π.

Například $arg\ 1 = 0$, $Arg\ 1 = 2k\pi$, $arg\ i = \frac{\pi}{2}$, $Arg\ i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Kladná reálná čísla mají hlavní argument rovný 0, záporná rovný π. Čísla ryze imaginární bi mají hlavní argument rovný $\frac{\pi}{2}$, je-li $b > 0$, nebo rovný $-\frac{\pi}{2}$, je-li $b < 0$.

Nyní už přejdeme ke goniometrickému vyjádření komplexního čísla. Každé komplexní číslo z lze psát v goniometrickém tvaru

$$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{2.9}$$

kde $r = |z|$. Je–li $r \neq 0$, označuje φ jeho libovolný argument, popřípadě hlavní argument. Je–li $r = 0$, můžeme za φ dosadit jakékoliv reálné číslo.

Abychom například určili goniometrický tvar čísla $z = \sqrt{3} + i$ (obr. 2.5), vypočteme $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Z rovnic

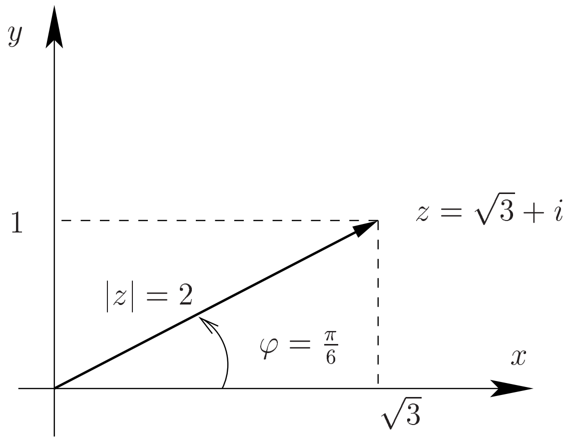
$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\varphi = \frac{1}{2}\ ;$$

plyne $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, kde k je libovolné celé číslo. Potom

$$Arg\ z = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ arg\ z = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cap (-\pi, \pi\rangle = \frac{\pi}{6}\ .$$

Použijeme-li tedy k vyjádření z hlavního argumentu, budeme psát

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\ .$$



Obr. 2.5:

Rovnost komplexních čísel $z_1 \neq 0$ a $z_2 \neq 0$ vyjádřených v goniometrickém tvaru formulujeme následovně:

$$z_1 = z_2 \text{ právě tehdy, když } |z_1| = |z_2| \text{ a } Arg\ z_1 \sim Arg\ z_2\ . \tag{2.10}$$

Sčítání a odčítání komplexních čísel v goniometrickém tvaru je obecně dost obtížné. Naproti tomu násobení, dělení popřípadě nalezení převrácené hodnoty daného čísla je snadnější než v případě algebraického vyjádření. Nechť jsou dána dvě komplexní čísla v goniometrickém tvaru

$$z_1 = r_1 \left(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1\right),\ \ z_2 = r_2 \left(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\right)\ . \tag{2.11}$$

Jejich součinem je číslo

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i\,(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)\right]\ ,$$

takže s využitím známých součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus obdržíme

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]\ . \tag{2.12}$$

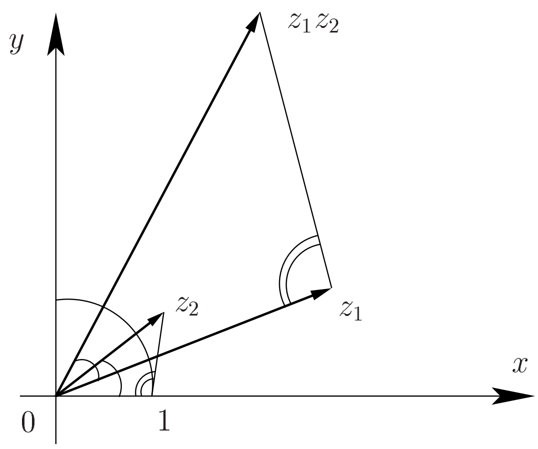
Tedy modul součinu komplexních čísel je roven součinu jejich modulů

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|\ , \tag{2.13}$$

a argument součinu komplexních čísel je roven součtu jejich argumentů modulo 2π

$$Arg(z_1 z_2) \sim Arg\ z_1 + Arg\ z_2\ . \tag{2.14}$$

Příklad 2.13. Pomocí hlavního argumentu napište v goniometrickém tvaru součin čísel $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$.



Obr. 2.6: Geometrická interpretace násobení komplexních čísel

Řešení. Známým způsobem dostáváme $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$. Ve shodě s 2.14 $Arg(z_1z_2) = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, tedy $arg(z_1z_2) = \{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cap (-\pi, \pi\rangle = -\frac{5\pi}{6}$. Odtud $z_1z_2 = 4[\cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\sin(-\frac{5\pi}{6})]$. ▲

Předpokládejme nyní, že $z_2 \neq 0$. Podílem čísel z_1, z_2 je číslo z takové, že $zz_2 = z_1$. Z výsledků odvozených pro násobení komplexních čísel je zřejmé, že $|z||z_2| = |z_1|$ a $Arg\ z + Arg\ z_2 \sim Arg\ z_1$. Potom

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0\ , \tag{2.15}$$

a tudíž modul podílu komplexních čísel je roven podílu jejich modulů. Dále

$$Arg\ \frac{z_1}{z_2} \sim Arg\ z_1 - Arg\ z_2\ , \tag{2.16}$$

což znamená, že argument podílu komplexních čísel je roven rozdílu jejich argumentů modulo 2π. Vzhledem k 2.11 píšeme

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]\ . \tag{2.17}$$

Geometrickou interpretaci součinu komplexních čísel ukazuje obrázek 2.6. Násobení komplexních čísel je složením dvou zobrazení: *otáčení* a *stejnolehlosti.*

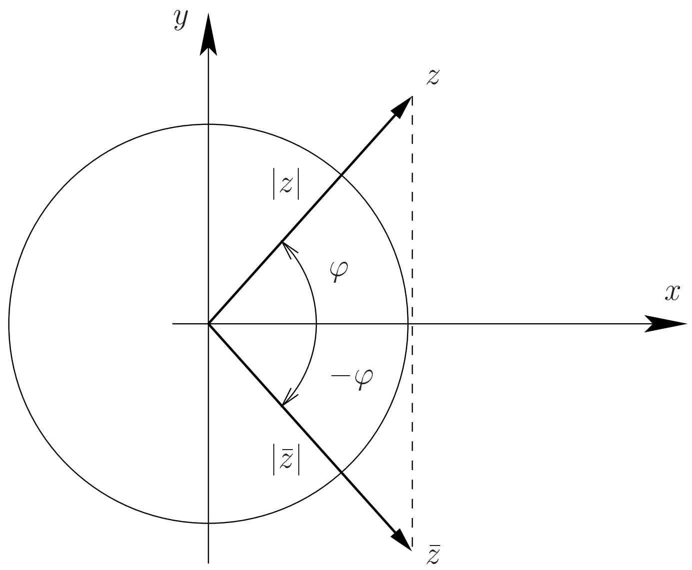
Na obrázku 2.7 je představen vztah mezi komplexně sdruženými čísly z a $\bar{z}$, $z \neq 0$. Zřejmě

$$\bar{z} = |z|\left[\cos\left(-Arg\ z\right) + i\sin\left(-Arg\ z\right)\right]\ . \tag{2.18}$$

Není-li z reálné číslo záporné, můžeme ve vztahu 2.18 uvést $arg\ z$ místo $Arg\ z$.

Poněkud obtížnější je nalezení bodu $w = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$. Platí

$$w = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{|z|\left[\cos\left(-Arg\ z\right) + i\sin\left(-Arg\ z\right)\right]}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}\left[\cos\left(-Arg\ z\right) + i\sin\left(-Arg\ z\right)\right]\ . \tag{2.19}$$



Obr. 2.7: Geometrické znázornění komplexně sdružených čísel

Při konstrukci bodu $w = \frac{1}{z}$ vycházíme tedy ze vztahů $|w| = \frac{1}{|z|}$ a $Arg\ w = -Arg\ z$. Úsečku délky $\frac{1}{|z|}$ sestrojíme užitím Euklidovy věty. Sestrojíme tak vlastně bod $\frac{1}{\bar{z}}$ ležící symetricky k bodu $\frac{1}{z}$ vzhledem k reálné ose a potom konečně bod $w = \frac{1}{z}$. Konstrukce je uvedena na obrázku 2.8.

Nakonec se ještě podíváme na výpočet mocniny komplexního čísla z.

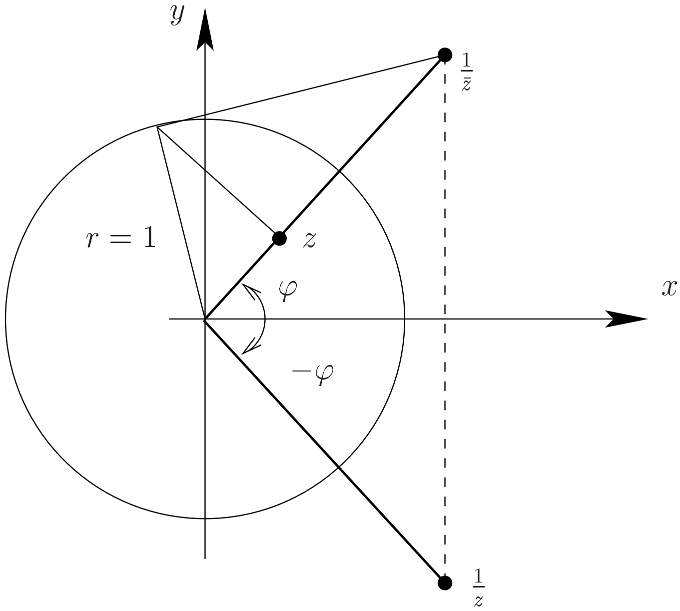
Věta 2.14. *Moivre de Abraham : Je-li* $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *pak*

$$z^m = r^m\,(\cos m\varphi + i\sin m\varphi) \ \ \textit{pro}\ m \in \mathbb{Z}\ . \tag{2.20}$$

Důkaz. Je-li m přirozené, ověří se vzorec 2.20 matematickou indukcí užitím 2.12. Věta zřejmě platí pro $m = 1$. Předpokládejme, že věta platí pro $m = n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n z = |z|^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]|z|[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)] = \\ &= |z|^{n+1}[\cos((n+1)\varphi) + i\sin((n+1)\varphi)]\ , \end{aligned}$$

to znamená, že věta platí i pro $m = n + 1$, a tedy platí pro každé přirozené číslo m.



Obr. 2.8: Geometrické znázornění inverzního komplexního čísla

Pro m celé záporné platí

$$z^m = \frac{1}{z^{-m}} = \frac{1}{r^{-m}\left[\cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi)\right]} = \tag{2.21}$$

$$= \frac{1}{r^{-m}\left[\cos(m\varphi) - i\sin(m\varphi)\right]}\,\frac{r^m\left[\cos m\varphi + i\sin\ m\varphi\right]}{r^m\left[\cos m\varphi + i\sin\ m\varphi\right]} = \tag{2.22}$$

$$= \frac{r^m\left[\cos\ m\varphi + i\sin\ m\varphi\right]}{\cos^2 m\varphi + \sin^2 m\varphi} = r^m\left(\cos\ m\varphi + i\sin\ m\varphi\right) \tag{2.23}$$

Využili jsme známých vlastností funkcí sinus a kosinus. □

Příklad 2.15. Napište v goniometrickém tvaru $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Řešení. Položíme $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$ a určíme goniometrický tvar čísla z. Platí $1 + i\sqrt{3} = 2[\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})]$ a $1 - i = \sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})]$. V souladu s dělením komplexních čísel v goniometrickém tvaru je $z = \sqrt{2}[\cos(\frac{7\pi}{12}) + i\sin(\frac{7\pi}{12})]$. Odtud

$$z^{20} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\right]^{20} = 2^{10}\left(\cos\frac{140\pi}{12} + i\sin\frac{140\pi}{12}\right) =$$
$$= 2^{10}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\ .$$

▲

Pojmy k zapamatování

— argument, hlavní argument komplexního čísla,
— rovnost modulo 2π,
— goniometrický tvar,
— mocnina komplexního čísla.

Příklady k procvičení

1. Napište v goniometrickém tvaru a) 1; b) -1; c) i; d) $-i$; e) $1+i$; f) $1-i\sqrt{3}$; g) $\sqrt{3}-i$.

2. Užitím Moivreova vzorce vypočtěte a) $(1-i)^7$; b) $(1+i\sqrt{3})^3$; c) $(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})^5$; d) $(\frac{1-i}{1+i})^7$; e) $(1+i)^{25}$.

3. Použijte Moivreovy a binomické věty k vyjádření a) $\sin 3\alpha$; b) $\cos 3\alpha$ pomocí $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$, návod:

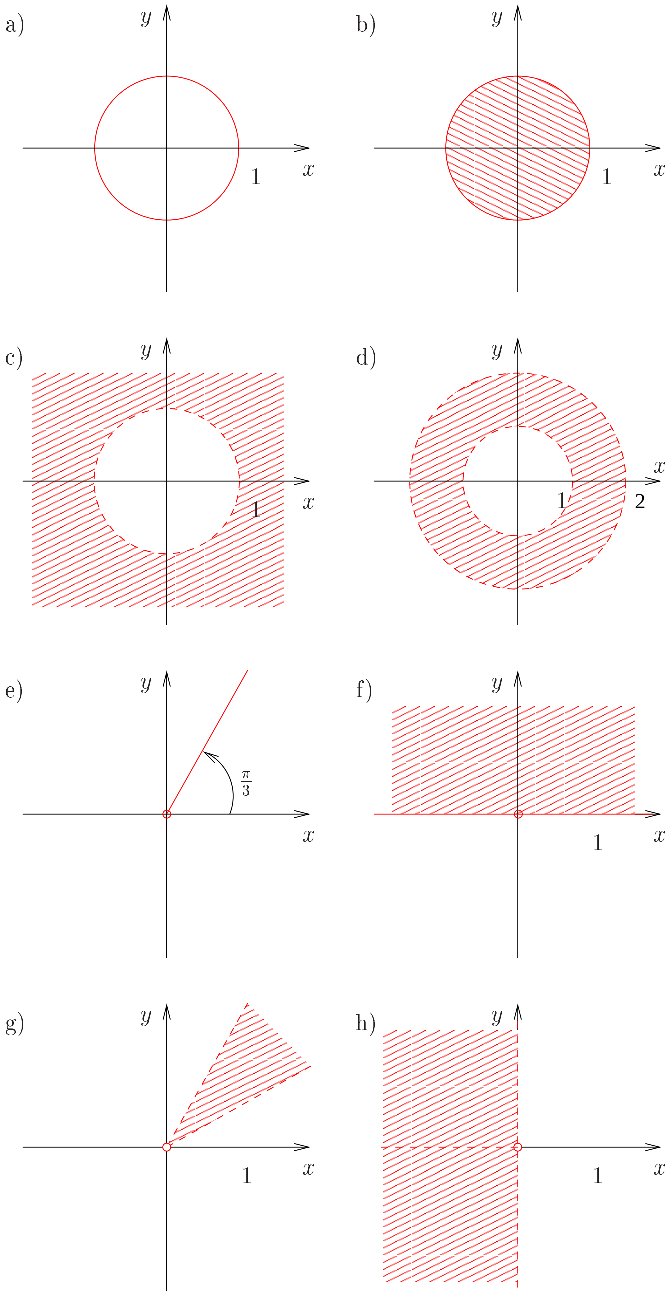
$$\left.\begin{array}{rcl}(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2 & = & \cos^2\alpha+2i\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha\\ (\cos\alpha+i\sin\alpha)^2 & = & \cos 2\alpha+i\sin 2\alpha\end{array}\right\}\begin{array}{rcl}\cos 2\alpha & = & \cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ \sin 2\alpha & = & 2\sin\alpha\cos\alpha\end{array}$$

4. Nakreslete v Gaussově rovině množinu všech čísel splňujících podmínku: a) $|z|=1$; b) $|z|\le 1$; c) $|z|>1$; d) $1<|z|<2$; e) $arg\ z=\frac{\pi}{3}$; f) $arg\ z\ge 0$; g) $\frac{\pi}{6}<arg\ z<\frac{\pi}{3}$; h) $arg\ z\in(-\pi,-\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi)$.

5. Podejte geometrickou interpretaci násobení komplexního čísla z číslem $\cos\alpha+i\sin\alpha$.

Řešení.

1. a) $\cos(0)+i\sin(0)$; b) $\cos(\pi)+i\sin(\pi)$; c) $\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2})$; d) $\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})$; e) $\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))$; f) $2(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3}))$; g) $2(\cos(\frac{11\pi}{6})+i\sin(\frac{11\pi}{6}))$.
2. a) $8(1+i)$; b) -8; c) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) i; e) $2^{12}(1+i)$.
3. a) $3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$; b) $4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$;
4.



▲

2.4. Odmocnina komplexního čísla

Definice 2.16. Buď $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Každé komplexní číslo w s vlastností

$$w^n = z \tag{2.24}$$

se nazývá n-tá odmocnina z komplexního čísla z a zapisuje se $w = \sqrt[n]{z}$.

Je-li $z = 0$, je zřejmě $\sqrt[n]{0} = 0$. Je–li $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$, pak hodnoty $\sqrt[n]{z}$ určíme pomocí Moivreovy věty. Označíme–li $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, potom z rovnice 2.24 plyne

$$\rho^n = r \quad \wedge \quad n\psi = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\ .$$

Odtud dostáváme $\rho = \sqrt[n]{r}$, čímž je myšlena jednoznačně definovaná n-tá odmocnina reálného čísla $r > 0$. Mezi argumenty $(\varphi + 2k\pi)/n$, kde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, existuje právě n takových, které se neliší o celistvý násobek čísla 2π. Jsou to například čísla

$$\psi_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1\ .$$

Pro $z \neq 0$ má tedy n–tá odmocnina z čísla $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ právě n navzájem různých hodnot, konkrétně

$$w_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}),\ k = 0, 1, \ldots, n-1\ . \tag{2.25}$$

Všechna čísla 2.25 mají stejné moduly, a tudíž leží na kružnici se středem v počátku o poloměru $\sqrt[n]{r}$. Kružnici rozdělují na n stejných částí, neboť argument každého následujícího čísla obdržíme z argumentu předcházejícího čísla přičtením $2\pi/n$.

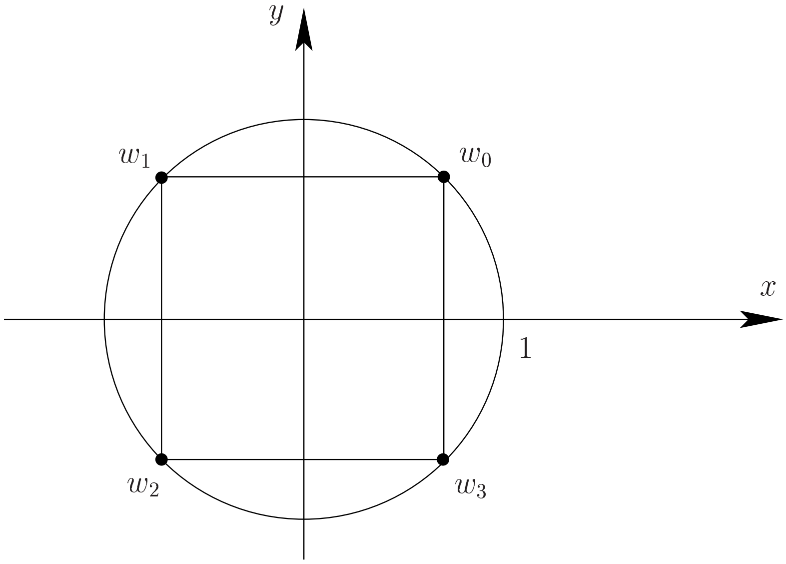
Příklad 2.17. Najděte všechny hodnoty $\sqrt[4]{-1}$.

Řešení. Číslo -1 napíšeme v goniometrickém tvaru: $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$. Označíme–li hodnoty $\sqrt[4]{-1}$ postupně $w_0,\ w_1,\ w_2,\ w_3$, potom v souladu s 2.25 platí

$$w_0 = \sqrt[4]{1}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}), \qquad w_1 = \sqrt[4]{1}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}),$$
$$w_2 = \sqrt[4]{1}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}), \qquad w_3 = \sqrt[4]{1}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}),$$

respektive $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $w_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $w_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Jak je vidno z obr. 2.9, leží obrazy hodnot $\sqrt[4]{-1}$ ve vrcholech čtverce. ▲

Příklad 2.18. Vypočtěte všechny kořeny rovnice $w^3 = z$, kde $z = 4\sqrt{2}(-1 + i)$.



Obr. 2.9: Znázornění hodnot $\sqrt[4]{-1}$ v Gaussově rovině

Řešení. Hledáme vlastně všechny třetí odmocniny z čísla $z = 4\sqrt{2}(-1+i)$. Nyní už budeme postupovat stručněji.

$$z = 8(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}), \quad |z| = 8, \quad arg\ z = \frac{3\pi}{4},$$

$$w_k = \sqrt[3]{4\sqrt{2}(-1+i)} = \sqrt[3]{8}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}), \quad k = 0, 1, 2.$$

Hledané kořeny rovnice jsou:

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \\
w_1 &= 2(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}) = \frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\
w_2 &= 2(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}) = \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

▲

Poznámka 2.19. Rovnice z příkladu 2.18 je konkrétním případem takzvané *binomické rovnice*. Je to vlastně rovnice 2.24, která se zapisuje také ve tvaru $w^n - z = 0$.

Pojmy k zapamatování

Σ

— odmocnina komplexního čísla,

— binomická rovnice.

Příklady k procvičení

1. Vypočtěte a) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; b) $\sqrt{-7+24i}$; c) $\sqrt{-1}$; d) $\sqrt[3]{-1}$.

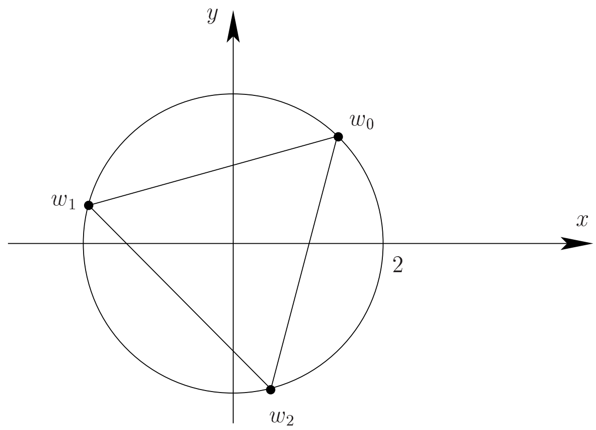
2. Ukažte, že kvadratická rovnice $ax^2+bx+c=0$ má v případě záporného diskriminantu $D=b^2-4ac$, komplexně sdružené kořeny
$$x_1=\frac{-b+i\sqrt{-D}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-i\sqrt{-D}}{2a}\ .$$

3. Najděte všechny kořeny rovnice: a) $x^2+4=0$; b) $x^3-1=0$; c) $x^2+4x+29=0$; d) $x^3+8=0$.

4. Znázorněte v Gaussově rovině kořeny rovnice z příkladu 2.18.

Řešení.

1. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3}+i)$; b) $3+4i$, $-3-4i$; c) $i, -i$; d) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, -1, $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;
2. Návod: Metodou doplnění na čtverec upravte rovnici na tvar $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, položte $w=x+\frac{b}{2a}$, $z=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ a řešte rovnici $w^2-z=0$.
3. a) $\pm 2i$; b) 1, $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $-2+5i$, $-2-5i$; d) $1+i\sqrt{3}$, -2, $1-i\sqrt{3}$.
4.



▲

Kapitola 3

Zobrazení a lineární rovnice

Průvodce studiem

Soustavy lineárních algebraických rovnic často vznikají při řešení praktických problémů. V této kapitole si nejprve odvodíme soustavu lineárních rovnic, kterou můžeme považovat za matematický model elektrického obvodu. Potom si připomeneme pojem zobrazení a ukážeme si různé interpretace řešení výsledné soustavy. Úvodní příklad nám bude v dalším výkladu sloužit k ilustraci a motivaci zavedení některých nových pojmů.

Cíle

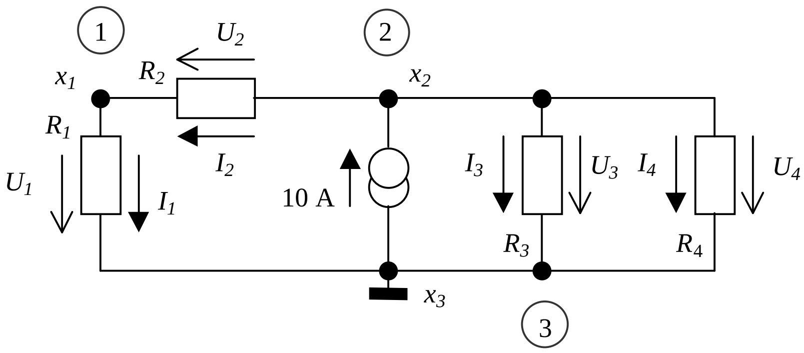
Uvědomíte si, že ke konkrétní úloze můžeme v matematice přistupovat různým způsobem. Budete umět:

- definovat pojem zobrazení
- klasifikovat zobrazení
- interpretovat geometricky soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

3.1. Elektrický obvod se zdrojem a spotřebiči

Uvažujme elektrický obvod na obrázku 3.1 se zadanými odpory spotřebičů R_1, R_2, R_3, R_4. K odvození rovnic pro neznámé potenciály x_1, x_2, x_3, s jejichž pomocí můžeme vypočítat neznámé hodnoty napětí na spotřebičích U_1, U_2, U_3, U_4 a hodnoty proudů procházejících spotřebiči I_1, I_2, I_3, I_4, použijeme základní fyzikální zákony a následující konvence:

i) Jeden uzel, v našem případě uzel 3, je uzeměn, tedy $x_3 = 0$.
ii) Hodnota napětí na spotřebiči je dáno rozdílem potenciálů na jeho svorkách (např. $U_2 = x_2 - x_1$).
iii) Proud ve směru šipky má kladnou hodnotu.



Obr. 3.1: Modelový elektrický obvod se zdrojem a spotřebiči

iv) Hodnoty napětí i proudu mohou být kladné i záporné. Proud se zápornou hodnotou má směr opačný, než je jeho směr vyznačený ve schématu. Obdobně záporná hodnota napětí charakterizuje skutečný pokles potenciálu v opačném směru.

V dalším textu si postupně vyjádříme napětí a proudy pomocí potenciálů a pro proudy vyjádřené vztahy obsahující potenciály si napíšeme Kirchhoffův zákon proudů.

Poznámka 3.1. Pokud jste se (zatím) s elektrickými obvody nespřátelili, můžete se na následující předpisy či rovnice dívat jako na zadaná zobrazení.

3.2. Vztah mezi napětími a potenciály

Hodnoty napětí na spotřebičích jsou dány podle 3.1 následujícím předpisem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} U_1 & = & & x_1 & & - & x_3 \\ U_2 & = & - & x_1 & + & x_2 & \\ U_3 & = & & & & x_2 & - & x_3 \\ U_4 & = & & & & x_2 & - & x_3 \end{array} \tag{3.1}$$

Je to předpis, který každé trojici potenciálů x_1, x_2, x_3 přiřazuje čtveřici hodnot napětí U_1, U_2, U_3, U_4. Snadno se zjistí, že pro některé hodnoty napětí neexistují potenciály (např. pro $U_3 \neq U_4$). Ani když potenciály k hodnotám napětí existují, nejsou určeny jednoznačně: Jsou-li (3.1) splněny pro x_1, x_2, x_3, pak jsou splněny i pro $x + c_1, x + + c_2, x + c_3$, kde c je libovolné reálné číslo. Jednoznačnost však bude zaručena, pokud přidáme rovnici $x_3 = 0$.

3.3. Zobrazení

Předpis (3.1) je zvláštním případem jednoho ze základních matematických pojmů.

Definice 3.2. *Zobrazení* $f : \mathscr{U} \mapsto \mathscr{V}$ množiny $\mathscr{U}$ do množiny $\mathscr{V}$ je předpis, který každému prvku množiny $\mathscr{U}$ přiřazuje nějaký prvek množiny $\mathscr{V}$. Množina $\mathscr{U}$ se nazývá *definiční obor* zobrazení f, množina $\mathscr{V}$ se nazývá *obor hodnot* zobrazení f. Zobrazení f se nazývá *zobrazení na* množinu $\mathscr{V}$, jestliže každý prvek množiny $\mathscr{V}$ je obrazem nějakého prvku množiny $\mathscr{U}$. Jestliže mají každé dva různé prvky množiny $\mathscr{U}$ různé obrazy, nazývá se zobrazení f *prosté*. Zobrazení, které je současně prosté a na (množinu), se nazývá *vzájemně jednoznačné*.

Předpis (3.1) tedy můžeme považovat za zobrazení, jehož definičním oborem je množina všech trojic reálných čísel x_1, x_2, x_3 a oborem hodnot je množina všech čtveřic reálných čísel U_1, U_2, U_3, U_4. Jak jsme si ukázali výše, toto zobrazení není ani prosté ani na (množinu všech uspořádaných čtveřic), takže není vzájemně jednoznačné.

3.4. Proud a napětí

Vztah mezi hodnotami proudu a napětí je dán Ohmovým zákonem:

$$\begin{aligned} I_1 &= \tfrac{1}{R_1}U_1 \\ I_2 &= \tfrac{1}{R_2}U_2 \\ I_3 &= \tfrac{1}{R_3}U_3 \\ I_4 &= \tfrac{1}{R_4}U_4 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Předpis (3.2) zřejmě definuje prosté, vzájemně jednoznačné zobrazení (alespoň za přirozeného předpokladu $R_i > 0$). Nás však zajímá vyjádření hodnot proudů pomocí potenciálů, které získáme, když dosadíme vztahy (3.2) do (3.1):

$$\begin{array}{rcrcrcr} I_1 &=& \frac{1}{R_1}x_1 & & & - & \frac{1}{R_1}x_3 \\ I_2 &=& -\frac{1}{R_2}x_1 & + & \frac{1}{R_2}x_2 & & \\ I_3 &=& & & \frac{1}{R_3}x_2 & - & \frac{1}{R_3}x_3 \\ I_4 &=& & & \frac{1}{R_4}x_2 & - & \frac{1}{R_4}x_3 \end{array} \tag{3.3}$$

3.5. Kirchhoffův zákon proudů

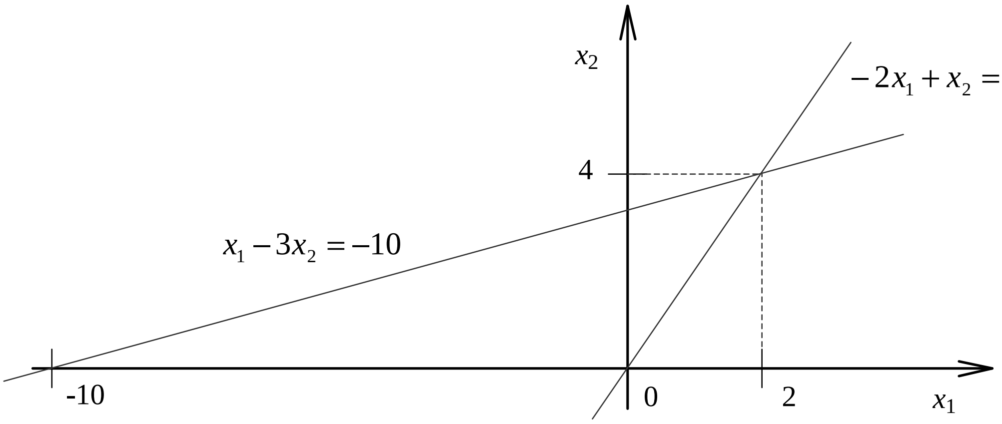
Kirchhoffův zákon proudů tvrdí, že součet proudů v uzlu je nula. V našem případě dostaneme postupně:

$$\text{Uzel 1:} \qquad -I_1 + I_2 = 0 \tag{3.4}$$

$$\text{Uzel 2:} \qquad -I_2 - I_3 - I_4 = -10 \tag{3.5}$$

$$\text{Uzel 3:} \qquad I_1 + I_3 + I_4 = 10 \tag{3.6}$$

Pokud I_1, I_2, I_3, I_4 splňují první dvě rovnice, pak zřejmě splňují i třetí, neboť tato je součtem prvních dvou s opačným znaménkem. Třetí rovnice tedy nenese žádnou



Obr. 3.2: Geometrické znázornění soustavy (3.8) po řádcích

novou informaci a lze ji vynechat. Dosadíme-li do (3.4) a (3.5) výrazy pro potenciály (3.3), dostaneme po úpravě:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) x_1 & + & \frac{1}{R_2} x_2 & + & \frac{1}{R_1} x_3 & = & 0 \\ \frac{1}{R_2} x_1 & - & \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right) x_2 & + & \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right) x_3 & = & -10 \end{array} \tag{3.7}$$

Zvolíme-li $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1$ a vezmeme-li v úvahu, že $x_3 = 0$, dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 &= -10 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Soustava se nazývá lineární, protože neobsahuje mocniny ani součiny neznámých. Jak se dá očekávat z fyzikálního významu úlohy, soustavu (3.8) splňuje jediná dvojice potenciálů x_1, x_2. Matematické argumenty si ukážeme později.

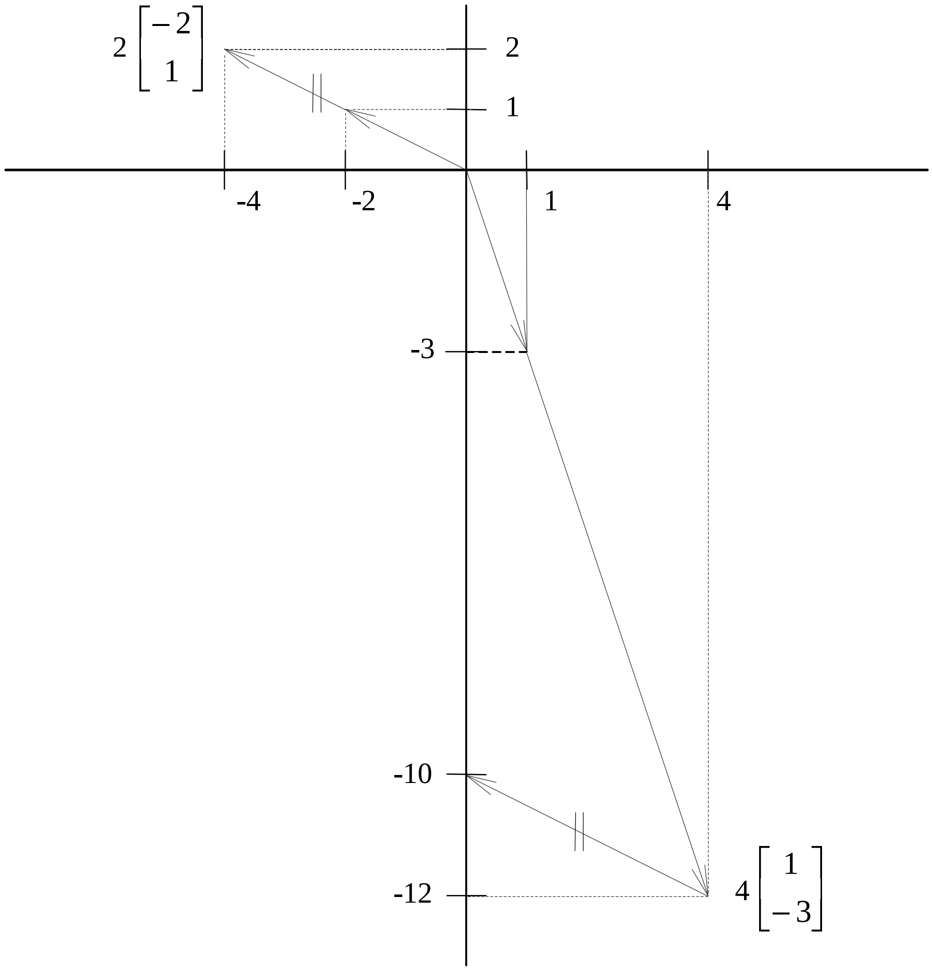
3.6. Interpretace řešení soustavy rovnic

Řešení soustavy (3.8) může být interpretováno zcela nezávisle na původní úloze.

První interpretaci dostaneme, když se na soustavu (3.8) budeme dívat *po řádcích*. Jednotlivé rovnice jsou vlastně rovnicemi přímek a úkolem je najít jejich průsečík, jak je to znázorněno na 3.2. Jelikož přímky mají různé směrnice, je zřejmé, že průsečík existuje. Pro souřadnice průsečíku platí $x_1 = 2, x_2 = 4$. Snadno si ověříme, že splňují soustavu (3.8).

Na soustavu (3.8) se však můžeme také dívat *po sloupcích*. V tomto případě je naším úkolem najít x_1 a x_2 tak, aby se x_1-násobek vektoru $\left[\begin{smallmatrix}-2\\1\end{smallmatrix}\right]$ sečtený s x_2-násobkem vektoru $\left[\begin{smallmatrix}1\\-3\end{smallmatrix}\right]$ rovnal vektoru $\left[\begin{smallmatrix}0\\-10\end{smallmatrix}\right]$. Číselné řešení je ovšem totéž, neboť

$$2\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-10\end{bmatrix}.$$



Obr. 3.3: Sloupcová interpretace soustavy (3.8)

Soustavu (3.8) lze popsat i pomocí *zobrazení*

$$A : \mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -2x_1 & + & x_2 \\ x_1 & - & 3x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

kde $\mathbb{R}^2$ značí množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel. Označíme-li si

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix},$$

pak úloha najít řešení (3.1) je ekvivalentní úloze najít $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tak, aby

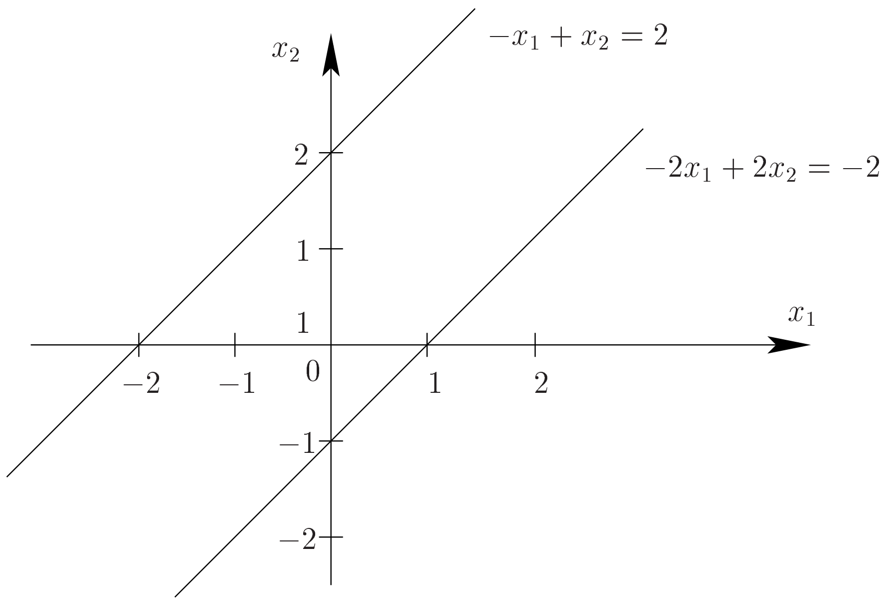
$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}. \tag{3.9}$$

Soustava (3.8) má řešení, právě když $\mathbf{b} \in \mathscr{H}(A)$, kde $\mathscr{H}(A)$ je obor hodnot zobrazení A. Jestliže $\mathbf{b} \in \mathscr{H}(A)$ a A je prosté zobrazení, pak soustava (3.8) má jediné řešení.

Příklad 3.3. Proveďte geometrickou interpretaci po řádcích u soustavy

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 2 \\ -2x_1 + 2x_2 &= -2 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Řešení. Snadno se přesvědčíme, že obě rovnice jsou rovnicemi přímek se stejnou směrnicí, které jsou rovnoběžné různé. V tomto případě soustavě rovnic nevyhovuje žádná dvojice čísel x_1, x_2. ▲



Obr. 3.4: Řádková interpretace soustavy (3.10)

Příklad 3.4. Proveďte klasifikaci zobrazení $f: U \to V$, které je definováno následovně:

a) $U = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$,
b) $U = \mathbb{R}$, $V = \langle 0, +\infty)$, $f(x) = x^2$,
c) $U = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$,
d) $U = \mathbb{R}$, $V = (0, +\infty)$, $f(x) = 2^x$.

Řešení.

a) Zobrazení není prosté: např. $f(-2) = f(2) = 4$, a není na množinu: zápornému číslu $y \in V$ neodpovídá žádný vzor $x \in U$;
b) zobrazení není prosté, ale je na množinu: ke každému $y \in V$ existuje alespoň jedno $x \in U$;

c) zobrazení je prosté: je-li $x_1 \neq x_2$, potom $2^{x_1} \neq 2^{x_2}$, ale není na množinu ze stejných důvodů jako zobrazení $f(x) = x^2$;
d) zobrazení je prosté a současně na množinu, neboť každé kladné číslo je jistou mocninou čísla 2, jedná se tedy o zobrazení vzájemně jednoznačné.

▲

Pojmy k zapamatování

Σ

— zobrazení prosté, na množinu, vzájemně jednoznačné,

— soustava lineárních rovnic.

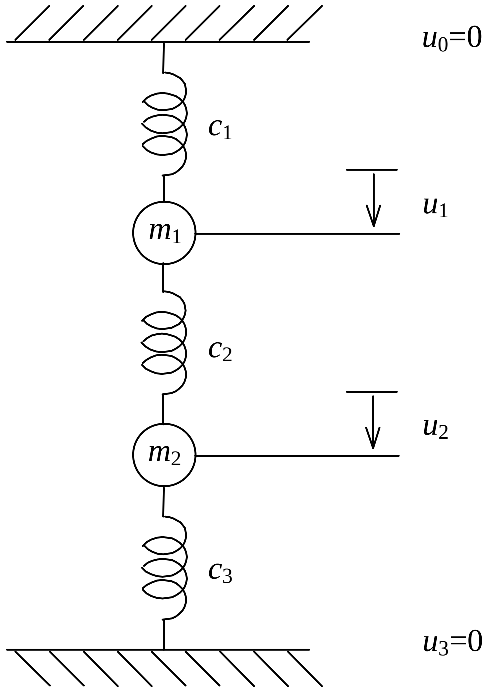
Příklady k procvičení

!

1. Nechť je zadána mechanická soustava sestávající ze tří pružin a dvou těles jako na obrázku 3.5. Najděte rovnice pro posunutí u_1, u_2, víte-li, že:

   - Prodloužení i-té pružiny je dáno vztahem $l_i = u_i - u_{i-1}$.
   - $u_0 = u_3 = 0$.
   - Síla y_i v natažené i-té pružině splňuje Hookův zákon $y_i = c_i l_i$. Vertikální pružina tedy působí na dolní těleso silou $-y_i$ a na horní těleso silou y_i.
   - Součet sil působících na každé těleso je nula. To lze vyjádřit také tak, že hmotnost $f_i = m_i g$ i-tého tělesa je vyrovnána odporem pružin. Síla f_i (kladná je orientována dolů) natahuje i-tou pružinu a stlačuje pružinu $i + 1$, takže platí $f_i = y_i - y_{i+1}$.

   Nápověda: Postupujte analogicky jako u elektrického obvodu z 3.1.



Obr. 3.5: Soustava pružin

Kapitola 4

Úpravy a řešení soustav lineárních rovnic

Průvodce studiem

V této kapitole se budeme zabývat řešením obecné soustavy lineárních rovnic, tj. úlohy najít $x_1, \ldots, x_n$ *tak, aby pro daná čísla* a_{ij} *a* b_i, $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ *platilo*

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ldots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{4.1}$$

Součástí této úlohy je rozhodnout, zda vůbec nějaké řešení dané soustavy existuje, kolik jich je a co o nich lze říci v případě, že je jich nekonečně mnoho. Konkrétním případem soustavy (4.1) je soustava (3.8), jejímž řešením jsou neznámé potenciály obvodu na obr. 3.1. Seznámíme se zde zejména s velmi účinnou metodou řešení soustavy (4.1), jejíž objev je připisován významnému německému matematikovi K.F.Gaussovi (1777–1855). V Číně však byla tato metoda známa nejméně 180 let před naším letopočtem pod jménem fang cheng.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- řešit soustavy rovnic Gaussovou eliminační metodou,
- řešit soustavy rovnic Gauss-Jordanovou metodou.

4.1. Ekvivalentní úpravy

Základní myšlenka řešení soustavy lineárních rovnic spočívá v nahrazení dané soustavy jinou soustavou, která má stejné řešení a je jednodušší. V případě dvou rovnic o dvou neznámých je jednodušší taková soustava, která obsahuje alespoň jednu rovnici s jedinou neznámou, neboť takovou rovnici už můžeme řešit nezávisle na druhé rovnici. Novou soustavu můžeme dostat postupným použitím tzv. *ekvivalentních úprav* zvolených tak, aby řešení původní soustavy bylo i řešením soustavy upravené:

($E1$) Vzájemná výměna libovolných dvou rovnic soustavy.

($E2$) Násobení obou stran některé rovnice soustavy nenulovým číslem.

($E3$) Přičtení násobku některé rovnice soustavy k jiné rovnici.

Vhodná úprava soustavy

$$-2x_1 + x_2 = 0 \tag{4.2a}$$
$$x_1 - 3x_2 = -10 \tag{4.2b}$$

je například vynásobení rovnice (4.2b) dvěma, podle pravidla ($E2$), a přičtení rovnice (4.2a) k upravené rovnici (4.2b), v souladu s pravidlem ($E3$). Upravená soustava bude mít tvar

$$-2x_1 + x_2 = 0 \tag{4.3a}$$
$$-5x_2 = -20 \tag{4.3b}$$

Z rovnice (4.3b) vypočteme $x_2 = 4$ a po dosazení do rovnice (4.3a) dostaneme

$$-2x_1 + 4 = 0, \tag{4.4}$$

odkud $x_1 = 2$. Dosazením do (4.2a), (4.2b) si ověříme, že jsme opravdu získali řešení soustavy.

Ekvivalentní úpravy mají tu vlastnost, že jejich pomocí můžeme z upravené soustavy získat zpět původní soustavu. Například soustavu (4.2) můžeme dostat ze soustavy (4.3) tak, že rovnici (4.3a) odečteme od rovnice (4.3b) a takto upravenou rovnici vynásobíme číslem $\frac{1}{2}$.

Obecně platí:

- Jestliže soustava S' vznikla ze soustavy S vzájemnou výměnou i-té a j-té rovnice podle pravidla ($E1$), pak tatáž úprava použitá na S' nás přivede zpět k S.

- Jestliže soustava S' vznikla ze soustavy S násobením i-té rovnice nenulovým číslem α podle pravidla ($E2$), pak násobením téže rovnice soustavy S' číslem $\frac{1}{\alpha}$ obdržíme zpátky soustavu S.

- Jestliže soustava S' vznikla ze soustavy S přičtením α-násobku i-té rovnice k j-té rovnici ($i \neq j$), pak přičtení $(-\alpha)$-násobku i-té rovnice soustavy S' k j-té rovnici soustavy S' vede opět k S.

Dvě soustavy lineárních rovnic nazýváme *ekvivalentní soustavy*, jestliže jednu z nich lze získat z druhé ekvivalentními úpravami. Jelikož řešení původní soustavy je také řešením upravené soustavy a upravenou soustavu můžeme ekvivalentními úpravami převést na původní soustavu, platí následující věta.

Věta 4.1. *Jsou-li dvě soustavy lineárních rovnic ekvivalentní, potom mají stejné řešení.*

4.2. Maticový zápis

Při úpravě rovnic si můžeme ušetřit práci, když nebudeme opisovat neznámé. Soustavě rovnic (4.1) bude v tomto úsporném zápisu odpovídat tabulka

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m, \end{array}\right] \tag{4.5}$$

kterou nazýváme *rozšířená matice soustavy* (4.1). Část tabulky bez posledního sloupce se nazývá *matice soustavy* (4.1). Poslední sloupec se nazývá *pravá strana soustavy*. Pokud budeme mluvit o tabulce, jako je matice soustavy, bez odkazu na soustavu, budeme ji nazývat stručně *matice*.

Ekvivalentním úpravám soustavy rovnic odpovídají operace s řádky rozšířené matice soustavy, které nazýváme *elementární (řádkové) operace*:

(r1) Vzájemná výměna libovolných dvou řádků.

(r2) Násobení některého řádku nenulovým číslem.

(r3) Přičtení násobku některého řádku k jinému řádku.

Máme-li dvě matice, z nichž jedna vznikla z druhé pomocí elementárních řádkových operací, říkáme, že matice jsou *řádkově ekvivalentní*. Větu 4.1 si můžeme vyjádřit pomocí nových pojmů.

Věta 4.2. *Mají-li dvě soustavy lineárních rovnic řádkově ekvivalentní rozšířené matice, potom mají stejné řešení.*

Úpravu soustavy (4.2) na (4.3) můžeme zapsat pomocí elementárních operací ve tvaru

$$\left[\begin{array}{rr|r} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -10 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 2\mathrm{r}_2 + \mathrm{r}_1 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{rr|r} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -20. \end{array}\right] \tag{4.6}$$

4.3. Úprava na schodový tvar

Podívejme se, jak můžeme pomocí elementárních řádkových operací převést matici (4.5) na tzv. *schodový tvar*, tj. na tvar, v němž jsou první nenulové prvky řádků zvané *vedoucí prvky* uspořádány jako schody klesající zleva doprava. Požaduje se přitom, aby vedoucí prvky nebyly nad sebou a aby všechny případné nulové řádky byly dole. Příkladem matice ve schodovém tvaru je pravá matice ve výrazu (4.6) nebo matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Při úpravě matice využijeme pozorování, že je-li v matici (4.5) prvek a_{ij} nenulový, pak vynásobíme-li i-tý řádek této matice číslem $-a_{kj}/a_{ij}$ a přičteme-li ho ke k-tému řádku, bude mít upravená matice v k-tém řádku a j-tém sloupci prvek

$$a_{kj} + (-a_{kj}/a_{ij})\, a_{ij} = 0. \tag{4.7}$$

Pokud je prvek a_{11} nenulový, lze takto transformovat matici (4.5) na tvar

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^1 & \dots & a_{mn}^1 & b_m^1 \end{array}\right].$$

Pokud bude také prvek a_{22}^1 nenulový, můžeme obdobně dosáhnout pomocí elementárních řádkových operací, aby i pod ním byly v upravené matici nuly. Bude-li pokaždé $a_{ii}^{i-1} \neq 0$, dostaneme nakonec matici (4.8) ve schodovém tvaru s nenulovými prvky $a_{11}, a_{22}^1, \dots, a_{kk}^{k-1}$.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2k}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{kk}^{k-1} & \dots & a_{kn}^{k-1} & b_k^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{k+1}^k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{4.8}$$

Rozložení nenulových prvků v levé části upravené matice soustavy připomíná trojúhelník, proto říkáme, že *matice je v trojúhelníkovém tvaru*. Úpravu na trojúhelníkový tvar lze provést i v případě, že pokaždé, když $a_{ii}^{i-1} = 0$, je možno nalézt prvek $a_{ji}^{i-1} \neq 0, j > i$. Stačí vzájemně vyměnit před úpravou i-tý a j-tý řádek.

Každou matici však nelze elementárními řádkovými úpravami převést na trojúhelníkový tvar. Kdyby byl například celý první sloupec nulový, nebyli bychom schopni žádnou řádkovou úpravou zajistit, aby se do levého horního rohu upravené matice dostal nenulový prvek. V takovém případě bychom přešli na úpravu prvního nenulového sloupce. Obdobně bychom postupovali i při úpravě dalších řádků. Nedospěli bychom však k matici (4.8), ale k obecnější matici ve schodovém tvaru.

Varování: Z našich úvah vyplývá, že *postupným* prováděním ekvivalentních úprav dostaneme soustavu, která má stejné řešení jako původní soustava. Neprovádíme-li následnou úpravu na upravené matici, můžeme se dopustit chyby. Například úpravami

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \mathrm{r}_2-\mathrm{r}_3 \\ \mathrm{r}_3-\mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{r}_3+\mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

dostaneme rozšířenou matici soustavy, která má jiné řešení než soustava odpovídající původní matici soustavy. Této chybě se můžeme vyhnout tak, že vybereme některý pevně zvolený řádek, který neupravíme, ale použijeme ho k úpravě ostatních řádků. Například úpravy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \mathrm{r}_2-2\mathrm{r}_1 \\ \mathrm{r}_3-2\mathrm{r}_1 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{r}_3-2\mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

jsou ekvivalentní.

4.4. Zpětná substituce

Nyní si ukážeme, jak získat řešení soustavy s maticí ve schodovém tvaru. Budeme rozlišovat tři případy:

- Jestliže poslední nenulový řádek rozšířené matice soustavy má nenulový pouze poslední prvek b_{k+1}^k, pak tomuto řádku odpovídá rovnice

$$0 = b_{k+1}^k,$$

  která nemá pro $b_{k+1}^k \neq 0$ řešení. V tomto případě tedy daná *soustava nemá řešení*.

- Jestliže rozšířená matice má trojúhelníkový tvar (4.8) s $k = n, b_{n+1}^n = 0$ a $a_{ii}^{i-1} \neq 0, i = 1, \ldots, n$, pak n-tá rovnice má tvar

$$a_{nn}^{n-1} x_n = b_n^{n-1},$$

  ze které snadno vypočteme x_n. Po dosazení do předchozích rovnic zbude v $(n-1)$-ní rovnici jediná neznámá, kterou také snadno vypočteme. Budeme-li takto postupovat dále, určíme snadno *jediné řešení soustavy*.

- Jestliže rozšířená matice má obecný schodový tvar, pak z každé rovnice soustavy vyjádříme neznámou, která odpovídá vedoucímu prvku. Postupným dosazováním od posledního řádku dostaneme vzorce pro neznámé odpovídající vedoucím prvkům vyjádřené pomocí neznámých na pravé straně. V tomto případě má soustava *nekonečně mnoho řešení*.

4.5. Gaussova eliminace

Výpočetní postup pro řešení soustav lineárních rovnic, se kterým jsme se právě seznámili se nazývá *Gaussova eliminace*. První krok, redukce na schodový tvar, se při řešení soustav nazývá *dopředná redukce*, zatímco řešení soustavy se schodovou maticí se nazývá *zpětná substituce*.

Příklad 4.3. *Soustava s jediným řešením.*
Řešme soustavu

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 4 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Řešení. Ekvivalentními řádkovými úpravami dostaneme postupně

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \mathrm{r}_3 \\ \\ \mathrm{r}_1 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{r}_3 - 2\mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]. \tag{4.10}$$

Řešením rovnic, které odpovídají matici napravo, dostaneme postupně $x_3 = 2, x_2 = -x_3 = -2, x_1 = 4 - x_3 = 2$, což je jediné řešení naší soustavy (4.9). ▲

Příklad 4.4. *Soustava, která má nekonečně mnoho řešení.*
Řešme soustavu

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array} \tag{4.11}$$

Řešení. Ekvivalentními úpravami dostaneme postupně

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1 \\ \\ \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{r}_3 + \mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Poslední matice je rozšířenou maticí soustavy

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \tag{4.12}$$

Poslední rovnice nenese žádnou informaci.

Z předposlední rovnice vypočteme x_2 pomocí x_3, tj. $x_2 = -2x_3$. Po dosazení za x_2 do první rovnice dostaneme $x_1 = 1 + x_3$. Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení ve tvaru x_3 *libovolné*, $x_2 = -2x_3, x_1 = 1 + x_3$. Můžeme je zapsat také pomocí libovolného parametru p ve tvaru $x_3 = p, x_2 = -2p, x_1 = 1 + p$. ▲

Poznámka 4.5. Má-li soustava nekonečně mnoho řešení, je *množina* řešení určena jednoznačně, nikoliv však její *parametrizace*, tj. analytický tvar. Například $x_2 = p, x_3 = -\frac{1}{2}p$ a $x_1 = -\frac{1}{2}p + 1$ je *jiný* tvar *téhož* řešení.

Příklad 4.6. *Soustava, která nemá řešení.*
Řešme soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & & & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \end{array} \tag{4.13}$$

Řešení. Ekvivalentními úpravami rozšířené matice soustavy dostaneme postupně

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 2\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1 \\ \mathrm{r}_3 - 2\mathrm{r}_1 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{r}_3 - \mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right].$$

Poslední rovnici $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -5$ nelze splnit žádnou volbou x_1, x_2, x_3. Soustava proto nemá řešení. ▲

4.6. Gauss-Jordanova metoda

Při ekvivalentních úpravách se nemusíme zastavit u schodového tvaru. Jestliže podělíme každý řádek (tj. prvky každého řádku) vedoucím prvkem a pomocí transformace (4.7) upravíme matici dále tak, aby i nad vedoucím prvkem každého řádku byly nuly, dostaneme matici v *normovaném schodovém tvaru.*

Gauss-Jordanova metoda se od Gaussovy eliminace liší tím, že se při dopředné redukci upraví rozšířená matice soustavy na normovaný schodový tvar místo na schodový tvar. Zpětná substituce je pak snadnější a nemusí se provádět od poslední rovnice.

Například dodatečnou úpravou rozšířené matice soustavy (4.10) dostaneme

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_3 \\ \mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_3 \\ \\ \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Řešení soustavy se nachází v posledním sloupci matice vpravo, neboť rovnice, které odpovídají rozšířené matici soustavy napravo, jsou $x_1 = 2, x_2 = -2$ a $x_3 = 2$.

Redukci matice soustavy na normovaný schodový tvar si ukážeme pro jistotu ještě jednou na poněkud složitější úloze.

Příklad 4.7. Gauss-Jordanovou metodou řešte soustavy

$$
\begin{array}{rrrrcr}
2x_1 & -4x_2 & & & = & -10\\
x_1 & -3x_2 & & +x_4 & = & -4\\
x_1 & & -x_3 & +2x_4 & = & 4\\
3x_1 & -4x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & -11,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrcr}
2y_1 & -4y_2 & & & = & -8\\
y_1 & -3y_2 & & +y_4 & = & -2\\
y_1 & & -y_3 & +2y_4 & = & 9\\
3y_1 & -4y_2 & +3y_3 & -y_4 & = & -15.
\end{array}
$$

Řešení. Obě soustavy mají stejnou matici. V takovém případě nemusíme řešit každou z nich zvlášť, ale stačí sestavit jednu rozšířenou matici pro obě tak, že k společné matici soustavy přidáme oba sloupce pravých stran.

$$
\left[\begin{array}{rrrr|rr}
2 & -4 & 0 & 0 & -10 & -8\\
1 & -3 & 0 & 1 & -4 & -2\\
1 & 0 & -1 & 2 & 4 & 9\\
3 & -4 & 3 & -1 & -11 & -15
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \frac{1}{2}r_1\\ \\ \\ \\ \end{array}
\to
\left[\begin{array}{rrrr|rr}
1 & -2 & 0 & 0 & -5 & -4\\
1 & -3 & 0 & 1 & -4 & -2\\
1 & 0 & -1 & 2 & 4 & 9\\
3 & -4 & 3 & -1 & -11 & -15
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ r_2- r_1\\ r_3- r_1\\ r_4- 3r_1 \end{array}
\to
$$

$$
\to
\left[\begin{array}{rrrr|rr}
1 & -2 & 0 & 0 & -5 & -4\\
0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2\\
0 & 2 & -1 & 2 & 9 & 13\\
0 & 2 & 3 & -1 & 4 & -3
\end{array}\right]
\begin{array}{l} r_1- 2r_2\\ \\ r_3+ 2r_2\\ r_4+ 2r_2 \end{array}
\to
\left[\begin{array}{rrrr|rr}
1 & 0 & 0 & -2 & -7 & -8\\
0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2\\
0 & 0 & -1 & 4 & 11 & 17\\
0 & 0 & 3 & 1 & 6 & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ -r_2\\ \\ r_4+3r_3 \end{array}
\to
$$

$$
\to
\left[\begin{array}{rrrr|rr}
1 & 0 & 0 & -2 & -7 & -8\\
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2\\
0 & 0 & -1 & 4 & 11 & 17\\
0 & 0 & 0 & 13 & 39 & 52
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \\ -r_3\\ \frac{1}{13}r_4 \end{array}
\to
\left[\begin{array}{rrrr|rr}
1 & 0 & 0 & -2 & -7 & -8\\
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2\\
0 & 0 & 1 & -4 & -11 & -17\\
0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4
\end{array}\right]
\begin{array}{l} r_1+ 2r_4\\ r_2+ r_4\\ r_3+ 4r_4\\ \\ \end{array}
\to
$$

$$
\to
\left[\begin{array}{rrrr|rr}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4
\end{array}\right].
$$

Řešení první soustavy určíme z předposledního sloupce, takže $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$. V posledním sloupci se nachází řešení druhé soustavy $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = -1$, a $y_4 = 4$. ▲

4.7. Pracnost řešení

Gaussova eliminace je velmi efektivní metoda pro ruční řešení malých soustav a pro počítačové řešení soustav stovek až tisíců rovnic. Metoda je velmi efektivní i pro počítačové řešení větších soustav se speciální strukturou rozložení nenulových prvků, která usnadňuje dopřednou redukci soustavy. Pro rozsáhlejší soustavy existují efektivnější metody, které se rozvíjejí i v současné době.

Pracnost řešení soustavy metodou Gaussovy eliminace lze výstižně charakterizovat počtem násobení. Přímým výpočtem lze ověřit, že pro $m = n$ vyžaduje dopředná redukce $\frac{1}{6}(2n+1)(n+1)n$ násobení, zatímco zpětná substituce vyžaduje asi $\frac{1}{2}n(n-1)$ násobení. Pro velká n přitom platí

$$\frac{1}{6}(2n+1)(n+1)n \sim \frac{1}{3}n^3 \quad \text{a} \quad \frac{1}{2}n(n-1) \sim \frac{1}{2}n^2.$$

Dopředná redukce je tedy podstatně pracnější než zpětná substituce.

Pojmy k zapamatování

— ekvivalentní úpravy,

— elementární řádkové operace,

— matice ve schodovém a normovaném schodovém tvaru,

— dopředná redukce,

— zpětná substituce,

— Gaussova a Gauss-Jordanova eliminační metoda.

Příklady k procvičení

1. Zdůvodněte, proč není žádná z matic

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve schodovém tvaru.

2. Najděte schodový tvar matic $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ ze předchozího cvičení.

3. Najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -1 \end{array} \tag{4.14}$$

4. Řešte soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{array} \tag{4.15}$$

- pomocí Gaussovy eliminace.
- pomocí Gauss–Jordanovy metody.

Řešení.

1. Vedoucí prvky matice A jsou nad sebou. Nulový řádek matice B není dole. Vedoucí prvky matic C a D nejsou uspořádány jako schody klesající zleva doprava.

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Úpravou na schodový tvar dostaneme $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, odtud $x_4 = s$, $x_3 = r$, $x_2 = \frac{1}{5}(3 + 3r - 3s)$, $x_1 = \frac{1}{5}(4 - r + s)$; $r, s \in \mathbb{R}$. Soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na dvou parametrech r, s.

4. Gauss-Jordanovou metodou dospějeme k matici v normovaném schodovém tvaru: $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$, a potom platí $x_1 = 4$, $x_2 = -4$, $x_3 = 4$.

▲

Kapitola 5

Aritmetické vektory

Průvodce studiem

V rovnicích, které popisují elektrický obvod na obr. 3.1, se vyskytují skupiny veličin, jako je x_1, x_2, x_3 nebo I_1, I_2, I_3, I_4, kterým lze připsat společný fyzikální význam; zde potenciály nebo proudy obvodu z obr. 3.1.

V této kapitole budeme zkoumat, jak se s takovými skupinami manipuluje vcelku, což nám umožní jednodušším způsobem zapsat vztahy podobné těm, kterými jsme se zabývali v předcházejících kapitolách, aniž bychom měli před sebou stále všechny detaily. To nás přivede k aritmetickým vektorům a operacím s nimi.

Cíle

Naučíme se provádět s aritmetickými vektory tyto operace:

- násobení vektoru skalárem,
- sčítání vektorů,

a základní pravidla, které pro tyto operace platí.

5.1. Aritmetické vektory

n-rozměrný *aritmetický vektor* je uspořádaná n-tice čísel, jejíž prvky se nazývají *složky*. Tyto uspořádané n-tice budeme zapisovat do hranatých závorek do řádků nebo sloupců. Například vektor proudů obvodu z obr. 3.1 můžeme definovat předpisem $\mathbf{i} = [I_1, I_2, I_3, I_4]$.

Aritmetický vektor je určen svými složkami. Jestliže $\mathbf{v}$ je aritmetický vektor, pak i-tou složku vektoru $\mathbf{v}$ budeme značit $[\mathbf{v}]_i$ (např. $[\mathbf{i}]_1 = I_1$).

Počet složek aritmetického vektoru nazýváme jeho *rozměrem* nebo též *dimenzí*. Například vektor $\mathbf{u} = [1, 2]$ je dvourozměrný vektor, $\mathbf{i}$ je čtyřrozměrný.

Dva aritmetické vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ považujeme za *stejné* (píšeme $\mathbf{u} = \mathbf{v}$), jestliže mají stejnou dimenzi n a stejné odpovídající složky, tj. $[\mathbf{u}]_1 = [\mathbf{v}]_1, \ldots, [\mathbf{u}]_n = [\mathbf{v}]_n$.

Vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, které nejsou stejné, jsou *různé* (píšeme $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$). Jestliže tedy $\mathbf{u} = [1, 2]$ a $\mathbf{v} = [2, 1]$, pak $[\mathbf{u}]_1 = 1, [\mathbf{v}]_1 = 2$, takže $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

Dvourozměrné nebo třírozměrné aritmerické vektory si můžeme znázornit v dané kartézské soustavě souřadnic šipkami vedoucími od počátku do bodů, které mají stejné souřadnice jako příslušné vektory. Tyto šipky se také nazývají *polohové vektory* příslušných bodů. Jelikož všechny šipky vychází z jednoho bodu, nazývají se také *vázané vektory*.

Každý aritmetický vektor $\mathbf{u}$ dimenze dvě nebo tři definuje *zobrazení posunutí* $p_{\mathbf{u}}$, které každý bod A posune do polohy $p_{\mathbf{u}}(\mathrm{A})$ tak jako na obr. 5.1. Každý aritmerický vektor dimenze dvě nebo tři si tedy můžeme představit také jako zobrazení posunutí.

Zobrazení $p_{\mathbf{u}}$ je určeno libovolnou rovnoběžně přenesenou kopií polohového vektoru $\mathbf{u}$ s počátkem v kterémkoliv bodu. Rovnoběžné kopie vektoru $\mathbf{u}$ můžeme proto považovat za různé reprezentace jednoho a téhož aritmetického vektoru. V takovém případě mluvíme o *volných vektorech*.

Aritmetické vektory dimenze vyšší než tři si nemůžeme představit jako šipky. Můžeme si je však představovat jako funkce definované na indexech složek, jako na obr. 5.2. *Součin skaláru (čísla)* α *a aritmetického vektoru* $\mathbf{u} = [u_1, \ldots, u_n]$ je vektor $\alpha\mathbf{u}$ definovaný předpisem

$$\alpha\mathbf{u} = [\alpha u_1, \ldots, \alpha u_n]. \tag{5.1}$$

Pro složky $\alpha\mathbf{u}$ tedy platí

$$[\alpha\mathbf{u}]_i = \alpha[\mathbf{u}]_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.2}$$

například

$$3[1,2] = [3 \cdot 1, 3 \cdot 2] = [3, 6],$$

$$\big[3[1,2]\big]_1 = 3 \cdot 1 = 3, \quad \big[3[1,2]\big]_2 = 3 \cdot 2 = 6.$$

Součet aritmetických vektorů $\mathbf{u} = [u_1, \ldots, u_n]$ a $\mathbf{v} = [v_1, \ldots, v_n]$ stejné dimenze je vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ definovaný předpisem

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n]. \tag{5.3}$$

Pro složky $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ tedy platí

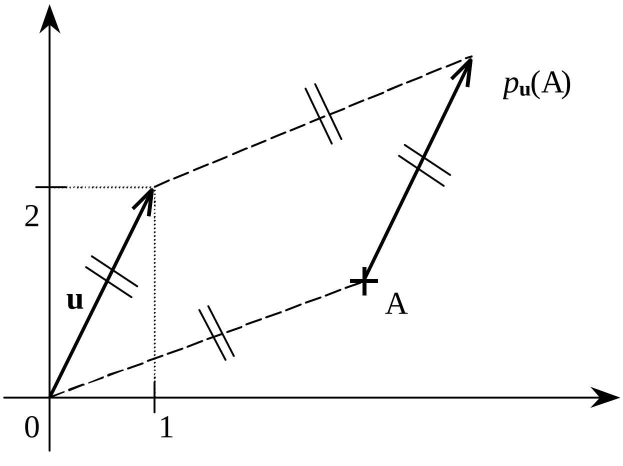
$$[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_i = [\mathbf{u}]_i + [\mathbf{v}]_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.4}$$

například

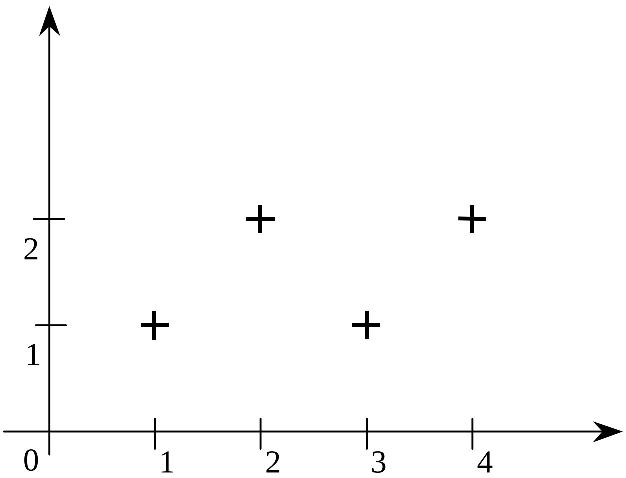
$$[1,2] + [2,3] = [1+2, 2+3] = [3, 5],$$

$$\big[[1,2] + [2,3]\big]_1 = 1 + 2 = 3, \quad \big[[1,2] + [2,3]\big]_2 = 2 + 3 = 5.$$

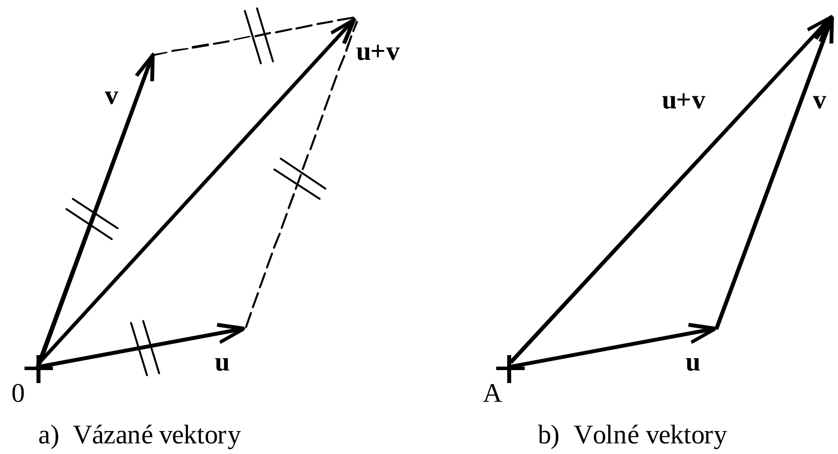
Součet dvourozměrných nebo třírozměrných aritmetických vektorů lze znázornit jako na obr. 5.3.



Obr. 5.1: Volné a vázané vektory



Obr. 5.2: Znázornění vektoru $\mathbf{w} = [1, 2, 1, 2]$



Obr. 5.3: Součet vektorů

Snadno se ověří, že pro libovolná čísla α, β a vektory $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$,$\mathbf{w}$ stejné dimenze platí:

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \tag{5.5a}$$
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \tag{5.5b}$$
$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} \tag{5.5c}$$
$$(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u} \tag{5.5d}$$
$$\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u} \tag{5.5e}$$
$$1\mathbf{u} = \mathbf{u} \tag{5.5f}$$

Důkazy těchto tvrzení se provádí po složkách s využitím definic a vlastností čísel. Například vztah (5.5f) dokážeme pomocí vztahu (5.2) a vlastnosti čísla 1. Pro libovolnou složku i dostaneme

$$[1\mathbf{u}]_i = 1[\mathbf{u}]_i = [\mathbf{u}]_i, \tag{5.6}$$

což dokazuje (5.5f).

Nové pojmy nám umožňují alternativní zápis vztahů z 3. kapitoly. Například vztah (3.1) lze zapsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

5.2. Nulový a opačný vektor

Při počítání s vektory má zvláštní úlohu vektor $\mathbf{o} = [0, \ldots, 0]$, který se nazývá *nulový vektor*, neboť má při sčítání vektorů stejnou úlohu jako číslo nula při sčítání čísel. Nulový vektor dimenze n budeme značit $\mathbf{o}_n$ nebo $\mathbf{o}$, když lze určit n z předpokladu, že výraz, ve kterém se vyskytuje, má smysl. Je-li $\mathbf{u}$ libovolný n-rozměrný vektor, pak nulový vektor dimenze n je jediný nulový vektor $\mathbf{o}$, který splňuje

$$\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}. \tag{5.8}$$

Je-li vektor $\mathbf{u} = [u_1, \ldots, u_n]$ libovolný aritmetický vektor, pak se vektor

$$-\mathbf{u} = [-u_1, \ldots, -u_n] = (-1)\mathbf{u} \tag{5.9}$$

nazývá *opačný vektor* k vektoru $\mathbf{u}$. Opačný vektor je jediný vektor, který splňuje

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}. \tag{5.10}$$

Jestliže $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou libovolné aritmetické vektory stejné dimenze, pak jediný vektor $\mathbf{x}$, který splňuje

$$\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v} \tag{5.11}$$

lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{v}. \tag{5.12}$$

Poznámka 5.1. V rovnici (5.12) jsme se vyhli zápisu $\mathbf{x} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, protože se v něm vyskytuje rozdíl aritmetických vektorů, který jsme si zatím nedefinovali. Mohli bychom to ovšem snadno dohnat předpisem

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u}). \tag{5.13}$$

Pojmy k zapamatování

Σ

— aritmetický vektor,
— nulový vektor,
— opačný vektor.

Příklady k procvičení

!

1. Vypočtěte, případně označte výrazy, které nejsou definovány:

   a) $3\,[1,2]$
   b) $[1,2] + [3,4]$
   c) $[1,2] + [1,2,3]$

2. Nechť tři pracovníci P_1, P_2, P_3 mají hodinové mzdy 50, 80 a 120 Kč v pracovní dny a 60, 100 a 150 Kč v sobotu a v neděli. Označme si $\mathbf{p} = [50, 80, 120], \mathbf{s} = [60, 100, 150]$.

   a) Vyčíslete $40[\mathbf{p}]_1$ a $[40\mathbf{p} + 8\mathbf{s}]_2$.
   b) Jaký je význam $40[\mathbf{p}]_1$ ve slovním vyjádření?
   c) Jaký je význam $[40\mathbf{p} + 8\mathbf{s}]_2$ ve slovním vyjádření?

3. Nechť $\mathbf{u} = [1,2]$ a $\mathbf{v} = [2,4]$. Vypočtěte vektor, který splňuje $\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$.

4. Dokažte vztah (5.5a).

Kapitola 6

Matice a vektorové operace

Průvodce studiem

Při sdružování informací do složitějších celků se nemusíme zastavit u aritmetických vektorů. Například tři sloupcové vektory na pravé straně výrazu (5.7) obsahují informaci o spojení uzlů sítě z obrázku 3.1, takže spojení uzlů sítě je popsáno tabulkou

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{6.1}$$

Podobné tabulky vznikají v mnoha dalších situacích, s nimiž se postupně seznámíme. Nejsou pro nás úplnou novinkou, neboť jsme je v části 4.2 použili ke stručnému zápisu soustav rovnic a zavedli jsme si pro ně název matice. Nyní budeme matice považovat za svébytné matematické objekty a naučíme se s nimi počítat.

Cíle

V této kapitole se zaměříme na rozšíření operací:

- sčítání
- násobení skalárem

z aritmetických vektorů na matice.

6.1. Definice a označení

Nechť jsou dány prvky $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ z dané množiny $\mathscr{F}$, jejíž prvky lze sčítat a násobit obdobně jako čísla. Prvky množiny $\mathscr{F}$ nazýváme také *skaláry*. *Matice* typu

(m, n) (stručně $m \times n$ matice) je obdélníková tabulka

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

která má *mn prvků* a_{ij} uspořádaných do *m řádků* $\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}$ a *n sloupců* $\mathbf{s}_j^{\mathbf{A}}$, takže

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}} \end{bmatrix} = \left[\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \dots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}}\right],$$

$$\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} = \left[a_{i1}, \dots, a_{in}\right], \quad \mathbf{s}_j^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Stručně píšeme též $\mathbf{A} = [a_{ij}]$. Množinu všech matic typu (m, n) s prvky z množiny $\mathscr{F}$ budeme značit $\mathscr{F}^{m,n}$.

Jestliže $m = n$, pak se $\mathbf{A}$ nazývá *čtvercová matice* řádu n. Matici typu $(1, n)$ nazýváme *řádkovým vektorem* řádu n, matici typu $(m, 1)$ nazýváme *sloupcovým vektorem* řádu m. Kromě řádků a sloupců matice $\mathbf{A}$ je význačnou částí matice její *diagonála* tvořená prvky $a_{11}, \dots, a_{ss}$, $s = \min\{m, n\}$. Diagonála matice $\mathbf{C}$ z (6.1) je tedy tvořena prvky $1, 1, -1$.

Matice obvykle značíme velkými písmeny, která mohou být vysázena tučně. Prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci matice $\mathbf{A}$ budeme značit $[\mathbf{A}]_{ij}$, takže pro matici $\mathbf{C}$ z (6.1) platí $[\mathbf{C}]_{21} = -1$. Množinu $\mathscr{F}$, která obsahuje prvky matice budeme v případě potřeby specifikovat příslušným přídavným jménem, takže budeme mluvit o *reálných maticích*, *komplexních maticích*, *polynomiálních maticích* atd.

Dvě matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ považujeme za *stejné* (píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$), jestliže jsou stejného typu a mají stejné odpovídající prvky, tj. $[\mathbf{A}]_{ij} = [\mathbf{B}]_{ij}$. Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, které nejsou stejné, jsou *různé* (píšeme $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$). Například

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq [1, 2], \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

6.2. Násobení matice skalárem a sčítání matic

Operace sčítání a násobení číslem (skalárem), které jsme si zavedli pro aritmetické vektory, můžeme přirozeně rozšířit na matice. *Součin skaláru α a matice* $\mathbf{A}$ je matice $\alpha\mathbf{A}$ stejného typu jako $\mathbf{A}$ definovaná předpisem

$$[\alpha\mathbf{A}]_{ij} = \alpha[\mathbf{A}]_{ij}. \tag{6.2}$$

Například

$$2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 4\\ 4 & 2\end{bmatrix}.$$

Obdobně *součet matic* $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ stejného typu je matice $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ stejného typu jako $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ definovaná předpisem

$$[\mathbf{A}+\mathbf{B}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [\mathbf{B}]_{ij}. \tag{6.3}$$

Například

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 3\\ -3 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

Pro ilustraci smyslu právě zavedených operací s maticemi označme $\mathbf{L}$ a $\mathbf{P}$ matice doby letu a časových nároků na dopravu z centra města na letiště a zpět v minutách mezi městy Ostravou (O), Prahou (P) a Brnem (B). Pak matice $\mathbf{T} = \mathbf{L}+\mathbf{P}$ obsahuje čas potřebný na cestu mezi uvažovanými městy v minutách. V matici $\frac{1}{60}\mathbf{T}$ je tentýž čas v hodinách.

Jelikož obě nové operace jsou definovány po složkách, obdobně jako odpovídající operace pro aritmetické vektory, platí pro jakékoliv číselné matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ stejného typu a pro libovolné skaláry α, β vztahy obdobné vztahům (5.5a) až (5.5f):

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B}) + \mathbf{C} \tag{6.4a}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A} \tag{6.4b}$$

$$\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B} \tag{6.4c}$$

$$(\alpha+\beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A} \tag{6.4d}$$

$$\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A} \tag{6.4e}$$

$$1\mathbf{A} = \mathbf{A} \tag{6.4f}$$

6.3. Nulová matice a odečítání matic

Při sčítání matic má obdobnou úlohu jako nula při sčítání čísel nebo nulový vektor při sčítání vektorů *nulová matice*

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix}0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0\end{bmatrix},$$

jejíž všechny prvky jsou nuly. Snadno se ověří, že pro libovolnou matici $\mathbf{A}$ a nulovou matici stejného typu platí

$$[\mathbf{A}+\mathbf{O}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [\mathbf{O}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + 0 = [\mathbf{A}]_{ij},$$

takže

$$\mathbf{A}+\mathbf{O} = \mathbf{A}. \tag{6.5}$$

Nulovou matici typu (m, n) značíme také $\mathbf{O}_{mn}$, avšak indexy obvykle vynecháváme, když je lze určit z předpokladu, že daný maticový výraz má smysl.

Obdobně, jako jsme si zavedli po složkách opačný vektor, můžeme ke každé číselné matici $\mathbf{A}$ definovat *matici opačnou* $-\mathbf{A}$ předpisem

$$[-\mathbf{A}]_{ij} = \big[(-1)\mathbf{A}\big]_{ij} = -[\mathbf{A}]_{ij}, \tag{6.6}$$

takže platí

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O} \tag{6.7a}$$

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A} \tag{6.7b}$$

Jestliže matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou libovolné matice stejného typu, pak jedinou matici $\mathbf{X}$, která splňuje

$$\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B},$$

lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{B}. \tag{6.8}$$

Pro stručnější psaní výrazů, jako je (6.8), definujeme *odečítání matic* nebo též *rozdíl matic* předpisem

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}).$$

6.4. Matice rozdělené na bloky

V některých případech je výhodné rozdělit danou matici pomocí vhodně zvolených horizontálních či vertikálních čar na menší matice, zvané též *submatice* nebo *bloky*. Například následující matici typu $(3, 4)$ můžeme rozdělit na čtyři bloky

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ \hline 5 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{bmatrix}. \tag{6.9}$$

Matice, jejichž prvky jsou uspořádány do bloků, nazýváme *blokové matice*.

Rozdělení na bloky je užitečné při odvozování vztahů, ve kterých figurují části matice, a při manipulaci s velkými maticemi, neboť ty mohou být postupně prováděny po blocích. Například, je-li matice $\mathbf{B}$ typu $(3, 4)$ rozdělena na bloky $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$, stejně jako matice $\mathbf{A}$ z (6.9), pak

$$\alpha\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha\mathbf{C} & \alpha\mathbf{D} \\ \alpha\mathbf{E} & \alpha\mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}+\mathbf{P} & \mathbf{D}+\mathbf{Q} \\ \mathbf{E}+\mathbf{R} & \mathbf{F}+\mathbf{S} \end{bmatrix}.$$

Pro blokové matice používáme obdobnou terminologii jako pro běžné matice, takže mluvíme o *blokové diagonále* nebo o *blokových řádcích*. Například matice

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

má nenulové pouze diagonální bloky.

Σ Pojmy k zapamatování

— matice typu (m, n),
— čtvercová matice řádu n,
— řádkový, sloupcový vektor,
— diagonála matice,
— nulová matice,
— matice opačná.

! Příklady k procvičení

1. Určete, pro které dvojice následujících matic lze vypočítat součet:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Určete, pro která x, y, z je splněna maticová rovnost

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z \\ z & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Obchodní síť má 3 prodejny, které prodávají 2 produkty spotřební elektroniky. Předpokládejme, že odbyt v prvním a druhém pololetí je zapsán do matic $\mathbf{P}$ a $\mathbf{D}$ typu $(3, 2)$ tak, že v i-tém řádku a j-tém sloupci je prodej j-tého produktu v i-té prodejně. Nechť

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 120 & 100 \\ 80 & 120 \\ 100 & 80 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 140 & 120 \\ 100 & 100 \\ 160 & 180 \end{bmatrix}.$$

   a) Vypočtěte $\mathbf{S} = \mathbf{P} + \mathbf{D}$ a $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{P} + \mathbf{D})$.
   b) Jaký je význam prvků $[\mathbf{S}]_{21}$ a $[\mathbf{A}]_{21}$?

4. Dokažte vztah (6.4a).

Kapitola 7

Násobení a transponování matic

Cíle

V předešlé kapitole jsme se naučili sčítání matic a násobení matice skalárem. V této kapitole rozšíříme operace s maticemi o násobení a transponování matic. Po prostudování této kapitoly budete umět:

- násobit matici a vektor,
- násobit matice,
- transponovat matice.

Dále se naučíte pravidla, která platí pro násobení a transponování matic.

7.1. Násobení matice a vektoru

Znovu se vraťme ke vztahu (5.7). Jeho pravá strana je sestavena ze složek vektoru

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

a ze sloupců matice $\mathbf{C}$ z (6.1). Takový výraz budeme považovat za součin $\mathbf{Cx}$ matice $\mathbf{C}$ a sloupcového vektoru $\mathbf{x}$, takže

$$\mathbf{Cx} = x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}} + x_2\mathbf{s}_2^{\mathbf{C}} + x_3\mathbf{s}_3^{\mathbf{C}}.$$

Obecně definujeme *součin matice* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ typu (m,n) *a sloupcového vektoru* $\mathbf{x} = [x_i]$ dimenze n předpisem

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} = x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} + \ldots + x_n\mathbf{s}_n^{\mathbf{A}}. \tag{7.1}$$

Rozepsáním definice (7.1) po složkách dostaneme

$$[\mathbf{y}]_i = [\mathbf{Ax}]_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{x}. \tag{7.2}$$

Toto pravidlo si můžeme znázornit pomocí:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{y} & & \mathbf{A} & \mathbf{x} \\ \begin{bmatrix} \\ y_i \\ \\ \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ & \longrightarrow & \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \downarrow \end{array} \tag{7.3}$$

Jako příklady násobení matice a vektoru si uveďme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & + & 1\cdot 2 & + & 0\cdot 3 \\ -1\cdot 1 & + & 3\cdot 2 & + & 1\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Příklad 7.1. Soustavu lineárních rovnic (4.1) napište ve tvaru součinu matice a sloupcového vektoru.

Řešení. Označíme–li $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ matici soustavy, $\mathbf{x}$ vektor neznámých a $\mathbf{b}$ vektor pravých stran, potom soustavu (4.1) můžeme v souladu se (7.1), (7.2), (7.3) zapsat ve tvaru $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Stačí jenom vektor $\mathbf{y}$ v těchto vztazích nahradit vektorem $\mathbf{b}$. Například ve vztahu (7.2) dostaneme

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i.$$

Položíme–li $i = 1, \dots, m$, obdržíme postupně jednotlivé rovnice soustavy (4.1). ▲

Pro libovolné matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ typu (m, n), n-rozměrné vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a skalár α platí:

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{Au}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{u} \tag{7.4a}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{Au} + \mathbf{Av} \tag{7.4b}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{Au} + \mathbf{Bu} \tag{7.4c}$$

Rovnosti (7.4a) – (7.4c) se dokazují po složkách. Tím se vlastně redukují na důkaz tvrzení pro matice typu $(1, n)$. Například s použitím definic a vlastností sčítání a násobení čísel dostáváme

$$\left[\mathbf{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v})\right]_i = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a_{i1}(u_1+v_1) + \ldots + a_{in}(u_n+v_n) = \tag{7.5}$$

$$= (a_{i1}u_1 + \ldots + a_{in}u_n) + (a_{i1}v_1 + \ldots + a_{in}v_n) = \tag{7.6}$$

$$= \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{u} + \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{v} = [\mathbf{Au}]_i + [\mathbf{Av}]_i, \tag{7.7}$$

což dokazuje (7.4b).

Pomocí součinu matice a vektoru si můžeme stručně zapsat vztahy mezi napětím, potenciály a proudy obvodu z 3.1. Označme si

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C}^\top = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4^{-1} \end{bmatrix}. \quad (7.8)$$

Potom (3.1), (3.2) a (3.4) - (3.6) lze zapsat postupně ve tvaru

$$\mathbf{u} = \mathbf{Cx}, \quad \mathbf{i} = \mathbf{Du} \quad \text{a} \quad (-\mathbf{C}^\top)\,\mathbf{i} = \mathbf{c}.$$

Postupným dosazením s použitím $-\mathbf{C}^\top = (-1)\mathbf{C}^\top$ dostaneme

$$-\mathbf{C}^\top\big(\mathbf{D}(\mathbf{Cx})\big) = \mathbf{c}. \quad (7.9)$$

Specifikací matice $\mathbf{D}$, dosazením $x_3 = 0$ a vynecháním poslední složky vektorů na obou stranách rovnice (7.9) dostaneme výraz ekvivalentní (3.7). □

7.2. Násobení matic

Ačkoliv jsou koeficienty rovnice (3.7) plně určeny maticemi $\mathbf{C}^\top$, $\mathbf{D}$ a $\mathbf{C}$, výraz (7.9) nám je umožňuje vypočítat pouze s pomocí neznámých potenciálů x_1, x_2, x_3. Naším cílem teď bude toto omezení překonat.

Podívejme se nejprve podrobněji na výraz $\mathbf{D}(\mathbf{Cx})$. S použitím (7.4a) a (7.4b) dostaneme

$$\mathbf{D}(\mathbf{Cx}) = \mathbf{D}\left(x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}} + x_2\mathbf{s}_2^{\mathbf{C}} + x_3\mathbf{s}_3^{\mathbf{C}}\right) = x_1\mathbf{Ds}_1^{\mathbf{C}} + x_2\mathbf{Ds}_2^{\mathbf{C}} + x_3\mathbf{Ds}_3^{\mathbf{C}},$$

odkud s pomocí nového označení

$$\mathbf{DC} = \left[\mathbf{Ds}_1^{\mathbf{C}}, \mathbf{Ds}_2^{\mathbf{C}}, \mathbf{Ds}_3^{\mathbf{C}}\right] \quad (7.10)$$

a definice součinu matice a vektoru (7.1) dostaneme

$$\mathbf{D}(\mathbf{Cx}) = (\mathbf{DC})\mathbf{x}.$$

Vztah (7.10) je vzorem obecné definice součinu matic. Jestliže $\mathbf{A}$ je matice typu (m, p) a $\mathbf{B}$ je matice typu (p, n), pak *součin matic* $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ je matice $\mathbf{AB}$ typu (m, n) definovaná předpisem

$$\mathbf{AB} = \left[\mathbf{As}_1^{\mathbf{B}}, \dots, \mathbf{As}_n^{\mathbf{B}}\right]. \quad (7.11)$$

Rozepíšeme-li si tuto definici po složkách, dostaneme

$$[\mathbf{AB}]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_j^{\mathbf{B}} \tag{7.12}$$

a

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} & \ldots & \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_n^{\mathbf{B}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} & \ldots & \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_n^{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \tag{7.13}$$

Při odvození rovnosti (7.13) jsme pro každý řádek použili definici (7.11) s tím, že za levou matici jsme si postupně dosazovali řádky matice $\mathbf{A}$. Pravidlo pro násobení matic lze také znázornit pomocí

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{AB} & & \mathbf{A} & & \mathbf{B} \\ \begin{bmatrix} \\ [\mathbf{AB}]_{ij} \\ \\ \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \\ a_{i1} \;\; \ldots \;\; a_{ip} \\ \\ \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Jako příklady násobení matic si uveďme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 - 1\cdot 0 & 0\cdot 2 - 1\cdot 1 \\ -2\cdot 1 + 3\cdot 0 & -2\cdot 2 + 3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Povšimněme si, že definice součinu dvou matic je zvolena tak, aby platilo

$$\mathbf{A}(\mathbf{Bx}) = (\mathbf{AB})\mathbf{x} \tag{7.14}$$

pro libovolné matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ a sloupcový vektor $\mathbf{x}$, pro které má alespoň jeden z výrazů význam. Levou stranu rovnice (7.9) tedy můžeme zapsat ve tvaru součinu matice a vektoru $\mathbf{x}$, neboť

$$-\mathbf{C}^\top\big(\mathbf{D}(\mathbf{Cx})\big) = -(\mathbf{C}^\top\mathbf{D})(\mathbf{Cx}) = -\big((\mathbf{C}^\top\mathbf{D})\mathbf{C}\big)\mathbf{x}.$$

Na možnost vynechání vnitřních závorek se podíváme v článku 7.3.

7.3. Pravidla pro násobení matic

Z definice (7.11) vyplývá, že pro součin matic platí obdobná pravidla jako pro násobení matice a vektoru (7.4), takže pro skalár α a matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ platí

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} \tag{7.15a}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \tag{7.15b}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}\ , \tag{7.15c}$$

kdykoliv jsou příslušné výrazy definovány. Tato pravidla připomínají známá aritmetická pravidla pro počítání s čísly.

Pro násobení matice $\mathbf{A}$ typu (m,p), matice $\mathbf{B}$ typu (p,q) a matice $\mathbf{C}$ typu (q,n) platí také *asociativní zákon*

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \tag{7.16}$$

neboť podle definice součinu matic a (7.14)

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{BC}) &= \mathbf{A}\left[\mathbf{Bs}_1^{\mathbf{C}}, \dots, \mathbf{Bs}_n^{\mathbf{C}}\right] = \left[\mathbf{A}(\mathbf{Bs}_1^{\mathbf{C}}), \dots, \mathbf{A}(\mathbf{Bs}_n^{\mathbf{C}})\right] = \\ &= \left[(\mathbf{AB})\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}}, \dots, (\mathbf{AB})\mathbf{s}_n^{\mathbf{C}}\right] = (\mathbf{AB})\mathbf{C}.\end{aligned} \tag{7.17}$$

Z asociativního zákona (7.16) plyne, že výsledek součinu tří matic nezávisí na rozmístění závorek, které proto můžeme vynechat. Indukcí lze dokázat obdobné tvrzení i pro součin více než tří matic. Odtud speciálně vyplývá, že *mocnina čtvercové matice*

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{AA}\cdots\mathbf{A}}_{k}$$

je definována jednoznačně v tom smyslu, že nezáleží na „uzávorkování“ při jejím vyčíslení. Odtud bezprostředně plyne

$$\mathbf{A}^{k+l} = \underbrace{\mathbf{AA}\cdots\mathbf{A}}_{k}\ \underbrace{\mathbf{AA}\cdots\mathbf{A}}_{l} = \mathbf{A}^k\mathbf{A}^l.$$

S použitím asociativního zákona můžeme upravit levou stranu rovnice (7.9) na

$$-(\mathbf{C}^\top\mathbf{DC})\mathbf{x} = \mathbf{c}.$$

Stojí za povšimnutí, že tento vztah nám umožňuje vyčíslit matici soustavy nezávisle na $\mathbf{x}$, zatímco (7.9) nám umožňoval pouze ověřit, zda pro dané $\mathbf{x}$ platí příslušná rovnost.

Úlohu jedničky při násobení matic má *jednotková matice*

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednotkovou matici řádu n značíme také $\mathbf{I}_n$, avšak index obvykle vynecháváme, když ho můžeme určit z předpokladu, že daný maticový výraz má smysl. Jestliže $\mathbf{A}$ je libovolná matice, pak pro jednotkové matice příslušné dimenze platí

$$\mathbf{AI} = \mathbf{A} \tag{7.18a}$$

$$\mathbf{IA} = \mathbf{A}. \tag{7.18b}$$

Například

$$\begin{array}{cc} & \mathbf{A} \\ i & \begin{bmatrix} & & & & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & & & & \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccccc} 1 & & j & & n \end{array} \end{array} \begin{array}{cc} & \mathbf{I} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \\ j \\ \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & 0 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \end{bmatrix} \end{array} = a_{ij} \tag{7.19}$$

Zatím jsme si ukázali pravidla pro počítání s maticemi, která jsou obdobná pravidlům pro počítání s čísly. To nás však nesmí vést k ukvapenému závěru, že se s maticemi počítá úplně stejně jako s čísly. Například pro

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

platí

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7.20}$$

takže

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

Navíc platí

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}. \tag{7.21}$$

Pro násobení matic tedy *neplatí komutativní zákon* a *mocnina nenulové matice* může být *nulová matice*!

7.4. Transponované matice

Porovnáme-li matice $\mathbf{C}$ a $\mathbf{C}^\top$ v (7.8), zjistíme, že řádky matice $\mathbf{C}$ jsou tvořeny sloupci matice $\mathbf{C}^\top$ a obráceně. Matici takto vytvořenou z dané matice nazýváme *maticí transponovanou*. Formálněji, k dané matici $\mathbf{A}$ typu (m, n) definujeme matici transponovanou $\mathbf{A}^\top$ typu (n, m) předpisem

$$\left[\mathbf{A}^\top\right]_{ij} = \left[\mathbf{A}\right]_{ji}. \tag{7.22}$$

Například

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Snadno se ověří po složkách, že pro matice stejného typu platí:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top \tag{7.23a}$$

$$(\alpha\mathbf{A})^\top = \alpha\mathbf{A}^\top \tag{7.23b}$$

Například

$$\left[(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\top\right]_{ij} = [\mathbf{A}+\mathbf{B}]_{ji} = [\mathbf{A}]_{ji} + [\mathbf{B}]_{ji} = [\mathbf{A}^\top]_{ij} + [\mathbf{B}^\top]_{ij}.$$

Jestliže je $\mathbf{A}$ matice typu (m,p) a $\mathbf{B}$ je matice typu (p,n), pak platí:

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top \qquad (!) \tag{7.24}$$

Na první pohled překvapivá identita plyne z toho, že transponováním se vymění řádky se sloupci, takže

$$\left[(\mathbf{A}\mathbf{B})^\top\right]_{ij} = [\mathbf{A}\mathbf{B}]_{ji} = \mathbf{r}_j^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_i^{\mathbf{B}} = \left(\mathbf{s}_i^{\mathbf{B}}\right)^\top\left(\mathbf{r}_j^{\mathbf{A}}\right)^\top = \left[\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top\right]_{ij}.$$

7.5. Násobení a transponování blokových matic

Již v části 6.4 jsme viděli, že blokové matice lze sčítat podle stejných pravidel po prvcích i blocích. Ještě důležitější však je, že i pravidlo pro násobení matic lze pro blokové matice s vhodnou strukturou uplatnit po blocích. Například rovnost

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + a_{13}x_3 \\ \hline (a_{21}x_1 + a_{22}x_2) + a_{23}x_3 \\ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2) + a_{33}x_3 \end{array}\right]$$

můžeme zapsat pomocí označení

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] \quad \text{a} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \end{array}\right] \tag{7.25}$$

ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{y} & + & \mathbf{C}\mathbf{z} \\ \mathbf{D}\mathbf{y} & + & \mathbf{E}\mathbf{z} \end{bmatrix}.$$

Příklad lze zobecnit na vyčíslení součinu libovolných blokových matic. Jestliže

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \dots & \mathbf{A}_{np} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \dots & \mathbf{B}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{p1} & \dots & \mathbf{B}_{pn} \end{bmatrix}$$

jsou dvě blokové matice rozdělené na bloky tak, že počet sloupců bloků $\mathbf{A}_{ik}$ je stejný jako počet řádků bloků $\mathbf{B}_{kj}$, pak se libovolný blok $\mathbf{C}_{ij}$ součinu $\mathbf{A}\mathbf{B}$ vyčíslí podle pravidla

$$\mathbf{C}_{ij} = \mathbf{A}_{i1}\mathbf{B}_{1j} + \ldots + \mathbf{A}_{ip}\mathbf{B}_{pj}. \tag{7.26}$$

Pravidlo pro transponování blokových matic lze snadno pochopit, když si prohlédneme, jak se transponují blokový vektor a bloková matice (7.25). Dostaneme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}^\top = \left[\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^\top & \mathbf{z}^\top \end{bmatrix} \tag{7.27}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ \hline a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^\top & \mathbf{D}^\top \\ \mathbf{C}^\top & \mathbf{E}^\top \end{bmatrix} \tag{7.28}$$

Obecnou blokovou matici tedy transponujeme tak, že zaměníme řádky se sloupci a každý blok navíc transponujeme.

Σ Pojmy k zapamatování

— jednotková matice,

— transponovaná matice,

— mocnina čtvercové matice.

! Příklady k procvičení

1. Nechť

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vypočtěte

$$\mathbf{MA}, \quad \mathbf{AM}, \quad \mathbf{PA}, \quad \mathbf{AP}, \quad \mathbf{AG}, \quad \mathbf{GA}.$$

Popište výsledky v termínech operací s řádky či sloupci matic.

2. Vypočtěte $\mathbf{C}^\top\mathbf{C}$ pro matice ze vztahu (7.8) a porovnejte výsledek s maticí soustavy (3.7).

Kapitola 8

Inverzní matice

Průvodce studiem

V této kapitole se vrátíme k řešení soustav lineárních rovnic, avšak elementární úpravy z oddílu 4.2 budeme zapisovat pomocí maticových operací. Získáme tak nejen nový pohled na známé algoritmy, ale postupně se seznámíme s maticí, která se chová vzhledem k násobení matic jako převrácené nenulové číslo vzhledem k násobení čísel.

Cíle

V této kapitole se naučíte:

- vypočítat inverzní matici k dané regulární matici,
- řešit soustavu rovnic s regulární maticí pomocí inverzní matice.

8.1. Maticový zápis elementárních úprav

Nejprve si ukážeme, že elementární řádkové operace, které jsme používali při úpravě matice soustavy na schodový tvar, můžeme skutečně realizovat pomocí maticových operací. Uvažujme jednotkovou matici $\mathbf{I}$ řádu 2 a proveďme na ni vždy jednu řádkovou operaci. Například:

$$\text{(r1)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} r_2 \\ r_1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_1,$$

$$\text{(r2)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \alpha r_2 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \mathbf{T}_2,$$

$$\text{(r3)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ r_2 + \alpha r_1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_3.$$

Buď nyní $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{ij}]$ libovolná matice 2. řádu a vypočítejme součiny $\mathbf{T}_1\mathbf{A}$, $\mathbf{T}_2\mathbf{A}$ a $\mathbf{T}_3\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1, \\
\mathbf{T}_2\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2 \\
\mathbf{T}_3\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{11} + a_{12} & \alpha a_{12} + a_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_3.
\end{aligned}$$

Výsledné matice $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ se rovnají maticím, které bychom obdrželi z matice $\mathbf{A}$ provedením právě těch řádkových operací, jež jsme použili na jednotkovou matici $\mathbf{I}$. Jinými slovy, příslušnou operaci z řádky matice $\mathbf{A}$ uskutečníme tak, že ji vynásobíme zleva maticí, která vznikne z jednotkové matice $\mathbf{I}$ provedením této operace. Pozorný čtenář snadno nahlédne, že podobným způsobem můžeme manipulovat i s řádky matice typu $(2, m)$. Podobně pro elementární úpravy matice typu $n \times m$ dostáváme následující tři matice řádu n :

(r1) Výměna i-tého a j-tého řádku.

$$\mathbf{I} = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} r_j \\ \\ r_i \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \mathbf{P}_{ij} \qquad (8.1)$$

(r2) Násobení i-tého řádku nenulovým číslem α.

$$\mathbf{I} = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \alpha r_i \mapsto \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \mathbf{M}_i(\alpha) \qquad (8.2)$$

(r3) Přičtení násobku i-tého řádku k j-tému řádku.

$$
\mathbf{I} = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\xmapsto{\;} _{r_j + \alpha r_i}
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & \alpha & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
= \mathbf{G}_{ij}(\alpha) \tag{8.3}
$$

Matice $\mathbf{P}_{ij}$ se nazývá *elementární permutační matice*, zatímco $\mathbf{G}_{ij}(\alpha)$ se nazývá *matice Gaussovy transformace*. V dalším textu budeme matice $\mathbf{P}_{ij}$, $\mathbf{M}_{ij}(\alpha)$ a $\mathbf{G}_{ij}(\alpha)$ nazývat všeobecně maticemi elementárních transformací, nebo stručně elementárními maticemi.

8.2. Inverzní matice

Definice 8.1. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice. Jestliže existuje matice $\mathbf{B}$ tak, že

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}, \tag{8.4}$$

pak se matice $\mathbf{B}$ nazývá *inverzní maticí* k matici $\mathbf{A}$. Čtvercová matice, ke které existuje inverzní matice, se nazývá *regulární*. V opačném případě takovou matici nazýváme *singulární*.

Věta 8.2. *Ke každé regulární matici $\mathbf{A}$ existuje právě jedna inverzní matice.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{A}$ je regulární a nechť $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ jsou inverzní matice k matici $\mathbf{A}$, takže platí

$$\mathbf{AB}_1 = \mathbf{I} \quad \text{a} \quad \mathbf{B}_2\mathbf{A} = \mathbf{I}. \tag{8.5}$$

Vynásobíme-li první rovnost zleva maticí $\mathbf{B}_2$ a druhou rovnici zprava $\mathbf{B}_1$, dostaneme

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_2\mathbf{AB}_1 = \mathbf{B}_1. \tag{8.6}$$

□

Jedinou inverzní matici k dané regulární matici $\mathbf{A}$ budeme nadále značit $\mathbf{A}^{-1}$.

V obecném případě je poměrně obtížné rozhodnout, je-li daná matice regulární nebo singulární. Jestliže však má daná matice celý řádek nulový, pak je určitě singulární, neboť má-li matice $\mathbf{A}$ nulový řádek a je-li $\mathbf{B}$ libovolná matice stejného řádu, pak platí

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} . & \dots & . \\ 0 & \dots & 0 \\ . & \dots & . \end{bmatrix} \neq \mathbf{I}. \tag{8.7}$$

8.3. Elementární úpravy a regularita

Nyní si ukážeme, že elementárními úpravami se zachovává regularita matic. Nejprve si všimneme, že jsou-li matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ regulární, potom je také matice $\mathbf{AB}$ regulární a platí

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \tag{8.8}$$

neboť

$$\mathbf{ABB}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{I}.$$

Vztah (8.8) lze pomocí matematické indukce zobecnit na

$$(\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_k)^{-1} = \mathbf{A}_k^{-1} \cdots \mathbf{A}_1^{-1}. \tag{8.9}$$

Dále si všimneme, že matice elementárních transformací jsou regulární. Příslušné inverzní matice najdeme tak, že sestrojíme elementární matice transformací, které převádí upravenou matici zpět na matici původní. Například inverzní matice k maticím $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$ z oddílu 8.1 jsou

$$\mathbf{T}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; \mathbf{T}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}, \; \mathbf{T}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

Skutečně platí

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{A}, \\
\mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{A}, \\
\mathbf{T}_3^{-1}\mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{11} + a_{21} & \alpha a_{12} + a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{A}.
\end{aligned}$$

Pro inverzní matice k elementárním maticím $\mathbf{P}_{ij}$, $\mathbf{M}_{ij}(\alpha)$, $\mathbf{G}_{ij}(\alpha)$ pak dostaneme vzorce

$$\mathbf{P}_{ij}^{-1} = \mathbf{P}_{ij}, \quad \mathbf{M}_i^{-1}(\alpha) = \mathbf{M}_i(\alpha^{-1}) \text{ pro } \alpha \neq 0, \quad \mathbf{G}_{ij}^{-1}(\alpha) = \mathbf{G}_{ij}(-\alpha). \tag{8.10}$$

K matici každé elementární transformace $\mathbf{T}$ tedy existuje inverzní matice $\mathbf{T}^{-1}$. Jestliže matice $\mathbf{A}'$ vznikne z regulární matice $\mathbf{A}$ elementárními řádkovými úpravami, jimž odpovídají elementární matice $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_k$, potom

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{A} \tag{8.11}$$

a z (8.9) dostaneme

$$\left(\mathbf{A}'\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{T}_1^{-1} \cdots \mathbf{T}_k^{-1},$$

tedy $\mathbf{A}'$ je regulární.

8.4. Výpočet inverzní matice

Věta 8.3. *Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Pak rovnice*

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I} \tag{8.12}$$

má jediné řešení $\mathbf{X}$ právě tehdy, když $\mathbf{A}$ je regulární. V tom případě platí $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$.

Důkaz. Jestliže $\mathbf{A}$ je regulární, pak přenásobením obou stran rovnice (8.12) zleva maticí $\mathbf{A}^{-1}$ dostaneme $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$.

Nechť obráceně rovnice $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}$ má jediné řešení. Rovnice $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}$ představuje vlastně n soustav lineárních rovnic o n neznámých:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & & \mathbf{x}_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & & \mathbf{e}_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

jejichž maticový zápis je $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{x}_n = \mathbf{e}_n$.

Soustavy mají stejnou matici, a tudíž je můžeme řešit pomocí jediné rozšířené matice:

$$\left[\, \mathbf{A} \,\middle|\, \mathbf{I} \,\right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right].$$

Jelikož rovnice $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}$ má podle předpokladu právě jedno řešení, můžeme matici $\mathbf{A}$ soustavy upravit Gauss-Jordanovou metodou na jednotkovou matici, t.j. rozšířenou matici $\left[\, \mathbf{A} \,\middle|\, \mathbf{I} \,\right]$ převedeme na tvar $\left[\, \mathbf{I} \,\middle|\, \mathbf{B} \,\right]$. Podle pravidel z oddílu 8.1 a 8.3 potom existují elementární matice transformací $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_k$ tak, že pro matici $\mathbf{T} = \mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1$ podle (8.11) platí

$$\mathbf{T}\left[\, \mathbf{A} \,\middle|\, \mathbf{I} \,\right] = \left[\, \mathbf{I} \,\middle|\, \mathbf{B} \,\right]. \tag{8.13}$$

Roznásobíme-li matice vlevo podle pravidla o násobení blokových matic (7.26), dostaneme porovnáním obou částí rozšířené matice

$$\mathbf{TA} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{TI} = \mathbf{B}, \text{ resp. } \mathbf{T} = \mathbf{B}, \tag{8.14}$$

a tedy

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I}. \tag{8.15}$$

Vynásobíme–li nyní rovnici $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ zleva maticí $\mathbf{B}$, obdržíme $\mathbf{B}(\mathbf{AX}) = \mathbf{BI}$, $(\mathbf{BA})\mathbf{X} = \mathbf{B}$, $\mathbf{IX} = \mathbf{B}$, takže

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}. \tag{8.16}$$

Ve vztahu (8.15) tak můžeme za matici $\mathbf{B}$ dosadit matici $\mathbf{X}$, a porovnáním s (8.12) dostaneme

$$\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{I},$$

což znamená, že $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ je inverzní matice k matici $\mathbf{A}$ a že matice $\mathbf{A}$ je regulární. □

Právě dokázaná věta dává návod k výpočtu inverzní matice k dané regulární matici. Sestavíme rozšířenou matici $[\,\mathbf{A}\,|\,\mathbf{I}\,]$ a řádkovými operacemi převedeme matici $\mathbf{A}$ na jednotkovou matici. Stejné řádkové operace pak transformují jednotkovou matici na matici inverzní $\mathbf{A}^{-1}$. Zvlášť názorně to vyplývá ze vzorců (8.14). Matice $\mathbf{B}$ je totiž vzhledem k rovnosti (8.16) inverzní maticí $\mathbf{A}^{-1}$, takže tyto vzorce můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{TA} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{TI} = \mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Příklad 8.4. Zjistěte, zda existuje inverzní matice k matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{8.17}$$

Jestliže ano, vypočtěte $\mathbf{A}^{-1}$.

Řešení. Postupnou úpravou rozšířené matice pro soustavu $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ dostaneme

$$[\,\mathbf{A}|\mathbf{I}\,] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ r_2 + \frac{1}{2}r_1 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 + \frac{2}{3}r_2 \\ \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{2}r_1 \\ \frac{2}{3}r_2 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \mapsto [\,\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}\,].$$

Matice $\mathbf{A}$ je tedy regulární a platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{8.18}$$

▲

8.5. Inverzní matice a řešení soustav

Nechť $\mathbf{A}$ je daná regulární matice. Vynásobíme-li soustavu

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

maticí $\mathbf{A}^{-1}$ zleva, dostaneme

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Odtud a z jednoznačnosti inverzní matice vyplývá důležitá věta:

Věta 8.5. *Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice a nechť $\mathbf{b}$ je sloupcový vektor stejného řádu. Pak má soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.*

Příklad 8.6. Najděte řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & = & 2 \end{array} \tag{8.19}$$

pomocí inverzní matice.

Řešení. Soustavu (8.19) lze zapsat maticově ve tvaru

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

S využitím výsledku (8.18) příkladu 8.4 dostaneme

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$\blacktriangle$

Příklad 8.7. Rozhodněte, je–li matice soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & 2z & = & -2 \\ 2x & + & 5y & - & 3z & = & -4 \\ -3x & + & 2y & - & 4z & = & 1 \end{array}$$

regulární. V kladném případě najděte její řešení užitím inverzní matice.

Řešení. Nejdříve musíme určit inverzní matici k matici soustavy, to znamená, že hledáme řešení rovnice $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Známým způsobem dostáváme:

$$[\mathbf{A}|\ \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 + 3r_1 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 10 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 + 3r_2 \\ \\ r_3 + 11r_2 \end{array} \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -19 & 11 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 - r_3 \\ r_2 - r_3 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 14 & -8 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 17 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -19 & 11 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\,r_2 \\ \\ \end{array} \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 14 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -17 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -19 & 11 & 1 \end{array}\right] = [\mathbf{I}|\ \mathbf{A}^{-1}]$$

Matice soustavy je regulární. Řešení soustavy pak je

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 14 & -8 & -1 \\ -17 & 10 & 1 \\ -19 & 11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix},$$

tedy $x = 3,\ y = -5,\ z = -5.$ ▲

8.6. Vyčíslení výrazů s inverzní maticí

Při vyčíslení výrazů s inverzní maticí je většinou výhodné vyhnout se explicitnímu vyjádření inverzní matice tím, že se vyčíslení součinu inverzní matice s vektorem či maticí převede na řešení soustavy lineárních rovnic.

Příklad 8.8. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vyčíslete $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{b}$.

Řešení. Nejprve vypočteme vektor

$$\mathbf{c} = \mathbf{B}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Vektor $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$ je jediným řešením rovnice $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}$, kterou vyřešíme Gaussovou eliminací

$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ r_1 + r_2 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 10 \end{array}\right],$$

odkud $x_1 = \frac{13}{2}, x_2 = 10$. Tedy

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{13}{2} \\ 10 \end{bmatrix}.$$

▲

Poznámka 8.9. Násobení matic je sice asociativní, takže platí

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{b}),$$

avšak pracnost vyčíslení obou výrazů je rozdílná!

8.7. Použití inverzní matice

Rozborem počtu operací zjistíme, že k výpočtu inverzní matice řádu n je třeba asi n^3 násobení. Srovnáme-li toto číslo s počtem násobení potřebným k řešení soustavy Gaussovou eliminací uvedeným v oddílu 4.7, dojdeme k závěru, že se inverzní matici *nevyplatí* používat pro řešení jedné soustavy rovnic, avšak *může se vyplatit* při řešení soustavy s větším počtem pravých stran, neboť je-li inverzní matice k dispozici, je pak k vlastnímu řešení zapotřebí pouze n^2 operací.

Pojmy k zapamatování

$\boxed{\Sigma}$

— elementární matice,
— inverzní matice,
— regulární matice,
— singulární matice.

Příklady k procvičení

$\boxed{!}$

1. Napište matice $\mathbf{P}_{23}, \mathbf{M}_2(3)$ a $\mathbf{G}_{23}(4)$ (viz oddíl 8.1) pro elementární transformace matic, které mají 3 řádky a ověřte si jejich účinek na matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

2. Vypište matice elementárních transformací, které realizují elementární úpravy v příkladu 8.4.

3. Nechť

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{U} = \mathbf{L}^\top.$$

Vypočtěte $\mathbf{L}^{-1}, \mathbf{U}^{-1}$ a rozhodněte, zda

$$(\mathbf{L}^\top)^{-1} = (\mathbf{L}^{-1})^\top.$$

4. Vypočtěte $\mathbf{A}^{-1}$ pro

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Povšimněte si zaplnění inverzní matice nenulovými prvky ve srovnání s původní maticí.

5. Dokažte, že pro libovolnou regulární matici $\mathbf{A}$ platí

$$\left(\mathbf{A}^\top\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^\top.$$

NÁPOVĚDA: Stačí ověřit, že $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^\top \mathbf{A}^\top = \mathbf{I}$.

Řešení.

1.
$$\mathbf{P}_{23}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{M}_2(3)\,\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 12 \\ 4 & 8 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{G}_{23}(4)\,\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 12 & 24 \end{bmatrix}.$$

2. Příslušné elementární matice jsou po řadě:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Tyto elementární matice jak víme, realizují transformaci matice $\mathbf{A}$ na jednotkovou matici $\mathbf{I}$. Označíme-li stejně jako v důkazu věty 8.3 $\mathbf{T} = \mathbf{T}_4\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$, potom $\mathbf{TA} = \mathbf{I}$, resp. $\mathbf{T} = \mathbf{A}^{-1}$. Skutečně platí $\mathbf{T} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, což je inverzní matice z příkladu 8.4 Doporučuji čtenáři, aby si vše řádně propočítal.

3. $\mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, a tudíž platí $\left(\mathbf{L}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{L}^{-1}\right)^T$.

4. $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$

▲

Kapitola 9

Trojúhelníkový rozklad

Průvodce studiem

Tato Kapitola je pokračováním kapitoly věnované inverzním maticím. Ukážeme si, že každou regulární matici můžeme zapsat jako součin tří speciálních matic, pomocí nichž se snadno řeší soustavy lineárních rovnic. Níže popsaný algoritmus se vyplatí při řešení soustav s větším počtem pravých stran. Vyžaduje nejméně polovičních nákladů na přípravu, než použití inverzní matice.

Cíle

V této kapitole se naučíte:

- vyjádřit regulární matici ve tvaru součinu dolní trojúhelníkové matice, horní trojúhelníkové matice a permutační matice,
- řešit soustavu rovnic s regulární maticí pomocí trojúhelníkového (LU) rozkladu.

9.1. Permutační matice

Matice $\mathbf{P}$ se nazývá *permutační matice*, je-li možno $\mathbf{P}$ získat z jednotkové matice $\mathbf{I}$ stejného typu postupnou výměnou řádků. Jelikož výměnu i-tého a j-tého řádku dané matice můžeme provést tak, že tuto matici vynásobíme zleva *elementární permutační maticí* $\mathbf{P}_{ij}$ (viz. (8.1)), je možno každou permutační matici $\mathbf{P}$ zapsat ve tvaru

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{i_k j_k} \cdots \mathbf{P}_{i_1 j_1} \mathbf{I} = \mathbf{P}_{i_k j_k} \cdots \mathbf{P}_{i_1 j_1}. \tag{9.1}$$

Například matici

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

můžeme získat z jednotkové matice výměnami

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mathrm{r}_3 \\ \\ \mathrm{r}_1 \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mathrm{r}_2 \\ \mathrm{r}_1 \\ \\ \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P},$$

takže $\mathbf{P}$ můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{12}\mathbf{P}_{13}\mathbf{I} = \mathbf{P}_{12}\mathbf{P}_{13}.$$

Z rozkladu (9.1), ze zřejmé rovnosti $\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_{ij}^\top$, dále z $\mathbf{P}_{ij}^{-1} = \mathbf{P}_{ij}$ (viz. (8.10)) a pomocí (7.24) dostaneme pro $\mathbf{P}$ ve tvaru (9.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{P}^\top &= \mathbf{P}_{i_kj_k}\cdots\mathbf{P}_{i_1j_1}(\mathbf{P}_{i_kj_k}\cdots\mathbf{P}_{i_1j_1})^\top = \mathbf{P}_{i_kj_k}\cdots\mathbf{P}_{i_1j_1}\mathbf{P}_{i_1j_1}^\top\cdots\mathbf{P}_{i_kj_k}^\top \\ &= \mathbf{P}_{i_kj_k}\cdots\mathbf{P}_{i_1j_1}\mathbf{P}_{i_1j_1}\cdots\mathbf{P}_{i_kj_k} = \mathbf{I}, \end{aligned}$$

takže

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^\top. \tag{9.2}$$

Elementární permutační matice $\mathbf{P}_{ij}$ můžeme také použít k výměně i-tého a j-tého *sloupce*. K tomu stačí násobit maticí $\mathbf{P}_{ij}$ *zprava*. Například vynásobíme-li matici $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ řádu 2 maticí $\mathbf{P}_{12}$ zprava, dostaneme

$$\mathbf{A}\mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix} = \left[\mathbf{s}_2^{\mathbf{A}}, \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}\right].$$

K odvození obecného pravidla můžeme použít transponování.

9.2. Trojúhelníkové matice

Čtvercová matice $\mathbf{L}(\mathbf{U})$ se nazývá *dolní* (*horní*) *trojúhelníková matice*, jestliže má nad (pod) diagonálou všechny prvky nulové. Pro prvky l_{ij} dané dolní trojúhelníkové matice $\mathbf{L}$ tedy platí $l_{ij} = 0$ pro $i < j$, zatímco pro prvky u_{ij} dané horní trojúhelníkové matice $\mathbf{U}$ platí $u_{ij} = 0$ pro $i > j$. Matice $\mathbf{L}$ je tedy dolní trojúhelníková, právě když $\mathbf{L}^\top$ je horní trojúhelníková matice.

Snadno se ověří, že součin dvou trojúhelníkových matic stejného typu je trojúhelníková matice téhož typu. Jsou-li například $\mathbf{L} = [l_{ij}]$ a $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ dvě dolní trojúhelníkové matice a $i < j$, pak

$$[\mathbf{LM}]_{ij} = l_{i1}m_{1j} + \ldots + l_{in}m_{nj} = l_{i1}\cdot 0 + \ldots + l_{ii}\cdot 0 + 0\cdot m_{i\,i+1} + \ldots + 0\cdot m_{in} = 0,$$

takže $\mathbf{LM}$ je také dolní trojúhelníková matice.

Budeme potřebovat ještě jedno méně zřejmé pozorování.

Věta 9.1. *Nechť* $\mathbf{L} = [l_{ij}]$ *je čtvercová dolní trojúhelníková matice s nenulovými diagonálními prvky. Pak* $\mathbf{L}$ *je regulární a* $\mathbf{L}^{-1}$ *je dolní trojúhelníková matice.*

Důkaz. Je-li $\mathbf{L}$ dolní trojúhelníková matice s nenulovými prvky na diagonále, pak existují matice elementárních operací $\mathbf{T}_p = \mathbf{G}_{i_p j_p}(\alpha_p)$ s $i_p > j_p$, případně $\mathbf{T}_p = \mathbf{M}_{i_p}(l_{i_p i_p}^{-1})$ tak, že pro matici $\mathbf{T} = \mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1$ platí

$$\mathbf{T}\,[\,\mathbf{L}\,|\,\mathbf{I}\,] = [\,\mathbf{I}\,|\,\mathbf{B}\,]\,.$$

Porovnáním levých částí příslušných matic dostaneme $\mathbf{TL} = \mathbf{I}$. Podle věty 8.3 tedy platí $\mathbf{L} = \mathbf{T}^{-1}$, odkud $\mathbf{LT} = \mathbf{I}$ a $\mathbf{T} = \mathbf{L}^{-1}$. Jelikož všechny matice $\mathbf{T}_i$ jsou dolní trojúhelníkové, je také matice

$$\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{T} = \mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1$$

dolní trojúhelníková matice. □

9.3. Trojúhelníkový (LU) rozklad

Věta 9.2. (o existenci **LU** rozkladu). *Nechť* $\mathbf{A}$ *je regulární čtvercová matice. Pak existuje dolní trojúhelníková matice* $\mathbf{L}$*, horní trojúhelníková matice* $\mathbf{U}$ *a permutační matice* $\mathbf{P}$ *tak, že*

$$\mathbf{AP} = \mathbf{LU}. \tag{9.3}$$

Matice $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ *jsou regulární.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu n. Z regulárnosti matice $\mathbf{A}$ a z (8.7) plyne, že existuje i_1 tak, že $a_{1i_1} \neq 0$, takže $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{AP}_{1i_1}$ má v levém horním rohu nenulový prvek $\bar{a}_{11} = a_{1i_1}$.

Nyní si všimněme, že první krok úpravy matice $\bar{\mathbf{A}}$, který známe z Gaussovy elimimace, můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{L}_1\mathbf{AP}_{1i_1} = \mathbf{A}_1, \tag{9.4}$$

kde

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ 0 & a^1_{22} & \dots & a^1_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a^1_{n2} & \dots & a^1_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1_{11} & a^1_{12} & \dots & a^1_{1n} \\ 0 & a^1_{22} & \dots & a^1_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a^1_{n2} & \dots & a^1_{nn} \end{bmatrix} \tag{9.5}$$

a

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{G}_{1n}(-\bar{a}_{n1}/\bar{a}_{11}) \cdots \mathbf{G}_{12}(-\bar{a}_{21}/\bar{a}_{11}) \tag{9.6}$$

je dolní trojúhelníková matice, neboť je vyjádřena jako součin dolních trojúhelníkových matic.

Matice $\mathbf{A}_1$ je zřejmě součinem regulárních matic, takže podle (8.9) je $\mathbf{A}_1$ také regulární a existuje $2 \leq i_2$ tak, že $a^1_{2i_2} \neq 0$. Matice $\bar{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{P}_{2i_2}$ má tedy nenulový prvek $\bar{a}_{22}$ a stejný první sloupec jako matice $\mathbf{A}_1$. Opakováním tohoto postupu dosáhneme toho, že

$$\widetilde{\mathbf{L}}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{U}, \tag{9.7}$$

kde

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a^{n-1}_{11} & a^{n-1}_{12} & \dots & a^{n-1}_{1n} \\ 0 & a^{n-1}_{22} & \dots & a^{n-1}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a^{n-1}_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{n-1} \tag{9.8}$$

a

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{1i_1} \cdots \mathbf{P}_{n-1\,i_{n-1}}, \quad \widetilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}_{n-1} \cdots \mathbf{L}_1. \tag{9.9}$$

Zřejmě $\mathbf{P}$ je permutační matice a $\widetilde{\mathbf{L}}$ je dolní trojúhelníková matice, neboť každá matice $\mathbf{L}_i$ je součinem dolních trojúhelníkových matic $\mathbf{G}_{ij}(-\bar{a}^{i-1}_{ji}/\bar{a}^{i-1}_{ii})$ s $i < j$. Přenásobíme-li (9.7) zleva maticí $\mathbf{L} = \widetilde{\mathbf{L}}^{-1}$, dostaneme

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{U}.$$

Matice $\mathbf{L}$ je podle věty 9.1 regulární dolní trojúhelníková matice, neboť je inverzní k dolní trojúhelníkové matici $\widetilde{\mathbf{L}}$, a matice $\mathbf{P}$ je zřejmě permutační matice. Jelikož matice $\bar{\mathbf{A}}_i$ jsou regulární, je podle (9.8) také matice $\mathbf{U}$ regulární. □

Vyjádření matice ve tvaru součinu (9.3) se nazývá **LU** rozklad podle počátečních písmen anglických slov *Lower* (dolní) a *Upper* (horní). Přenásobíme-li (9.3) zprava maticí $\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^\top$, dostaneme vyjádření $\mathbf{A}$ ve tvaru

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}\widetilde{\mathbf{P}} \tag{9.10}$$

s permutační maticí $\widetilde{\mathbf{P}}$. Matice $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ a $\mathbf{P}$ nejsou určeny jednoznačně.

9.4. Výpočet LU rozkladu

Rozbor důkazu věty o existenci trojúhelníkového rozkladu nám dává návod k instruktivnímu výpočtu tohoto rozkladu. Stačí postupně upravovat matici $\left[\,\mathbf{A} \,\middle|\, \mathbf{I}\,\right]$ na tvar $\left[\,\mathbf{U} \,\middle|\, \widetilde{\mathbf{L}}\,\right]$ obdobně, jako jsme to dělali ve 4. kapitole, avšak bez použití výměny řádků. Tím dosáhneme toho, že matice $\widetilde{\mathbf{L}}$ bude dolní trojúhelníková. Je-li to nutné, provádíme místo výměny řádků výměny sloupců, které neprovádíme jen na matici $\mathbf{A}$, ale také zvlášť na další jednotkové matici, která se postupně transformuje na $\mathbf{P}$. Dolní trojúhelníkovou matici $\mathbf{L}$ dostaneme inverzí matice $\widetilde{\mathbf{L}}$, tedy s pomocí elementárních řádkových operací, které převedou matici $\left[\,\widetilde{\mathbf{L}} \,\middle|\, \mathbf{I}\,\right]$ na $\left[\,\mathbf{I} \,\middle|\, \mathbf{L}\,\right]$.

Příklad 9.3. Najděte trojúhelníkový rozklad matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{9.11}$$

Řešení. • Sledování výměn sloupců:

$$\mathbf{I} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \;\; s_3 \qquad\; s_1 \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P} = \widetilde{\mathbf{P}}$$

• Úprava $\left[\, \mathbf{A} \,\middle|\, \mathbf{I} \,\right] \mapsto \left[\, \mathbf{U} \,\middle|\, \widetilde{\mathbf{L}} \,\right]$:

$$\left[\, \mathbf{A} \,\middle|\, \mathbf{I} \,\right] = \begin{array}{c} \quad\mathbf{A} \qquad\qquad\quad \mathbf{I} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ s_3 \qquad\qquad s_1 \qquad\qquad\quad \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 2\mathrm{r}_2 + \mathrm{r}_1 \\ \\ \end{array} \mapsto$$

$$\mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ 3\mathrm{r}_3 + \mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \mathbf{U} \qquad\qquad\quad \widetilde{\mathbf{L}} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \end{array} = \left[\, \mathbf{U} \,\middle|\, \widetilde{\mathbf{L}} \,\right]$$

• Úprava $\left[\, \widetilde{\mathbf{L}} \,\middle|\, \mathbf{I} \,\right] \mapsto \left[\, \mathbf{I} \,\middle|\, \mathbf{L} \,\right]$:

$$\left[\, \widetilde{\mathbf{L}} \,\middle|\, \mathbf{I} \,\right] = \begin{array}{c} \widetilde{\mathbf{L}} \qquad\qquad \mathbf{I} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1 \\ \mathrm{r}_3 - \mathrm{r}_1 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{r}_3 - \mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto$$

$$\mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \frac{1}{2}\mathrm{r}_2 \\ \frac{1}{3}\mathrm{r}_3 \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \mathbf{I} \qquad\qquad\qquad \mathbf{L} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \frac{1}{2}\mathrm{r}_2 \\ \frac{1}{3}\mathrm{r}_3 \end{array} = \left[\, \mathbf{I} \,\middle|\, \mathbf{L} \,\right]$$

• Odtud

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{9.12}$$

Přímým výpočtem si můžeme ověřit, že platí

$$\mathbf{AP} = \mathbf{LU} \quad \text{a} \quad \mathbf{A} = \mathbf{LUP}.$$

▲

9.5. Řešení soustav pomocí LU rozkladu

Řešení soustav pomocí trojúhelníkového rozkladu spočívá v postupném řešení soustav s maticemi $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ a $\widetilde{\mathbf{P}}$. Jestliže tedy $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}\widetilde{\mathbf{P}}$, pak místo soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ budeme řešit soustavu

$$\mathbf{L}\Big(\mathbf{U}\big(\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{x}\big)\Big) = \mathbf{b}$$

tak, že postupně vyřešíme

$$\mathbf{L}\mathbf{z} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{z}, \quad \widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{x} = \mathbf{y}. \tag{9.13}$$

Příklad 9.4. Využijte rozkladu (9.12) matice (9.11) k řešení soustavy:

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & -x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \end{array} \tag{9.14}$$

Řešení. Nejprve řešíme soustavu $\mathbf{L}\mathbf{z} = \mathbf{b}$, tedy

$$\begin{array}{rcrcrcl} z_1 & & & & & = & 1 \\ -\frac{1}{2}z_1 & + & \frac{1}{2}z_2 & & & = & 1 \\ & - & \frac{1}{3}z_2 & + & \frac{1}{3}z_3 & = & 1, \end{array} \tag{9.15}$$

odkud $z_1 = 1, z_2 = 3, z_3 = 6$. Potom vyřešíme soustavu $\mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{z}$, tedy

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2y_1 & - & y_2 & & & = & 1 \\ & & 3y_2 & - & 2y_3 & = & 3 \\ & & & & 4y_3 & = & 6. \end{array} \tag{9.16}$$

Odtud $y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = 2, y_3 = \frac{3}{2}$. Konečně určíme $\mathbf{x}$ „řešením“ $\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ nebo z $\mathbf{x} = \widetilde{\mathbf{P}}^\top\mathbf{y}$, takže $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 2, x_3 = \frac{3}{2}$. ▲

Poznámka 9.5. Pokud hodláme použít **LU** rozklad k řešení soustav, není třeba vyčíslit matici $\mathbf{L}$ explicitně. Vystačíme totiž s maticí $\widetilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}^{-1}$, s jejíž pomocí vypočítáme $\mathbf{z}$ v (9.13) ze vztahu

$$\mathbf{z} = \widetilde{\mathbf{L}}\mathbf{b}.$$

9.6. Použití LU rozkladu

Lze ukázat, že k výpočtu **LU** rozkladu čtvercové matice $\mathbf{A}$ řádu n stačí asi $\frac{1}{2}n^3$ násobení, což je asi polovina počtu násobení potřebného k výpočtu inverzní matice. Máme-li **LU** rozklad, můžeme získat řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pomocí n^2 násobení, stejně jako u inverzní matice. Použití **LU** rozkladu je tedy efektivnější nástroj pro řešení soustav lineárních rovnic s více pravými stranami než inverzní matice. Tento rozdíl se může ještě drasticky zvětšit, má-li matice $\mathbf{A}$ mnoho nulových prvků, neboť při úpravě se trojúhelníkové faktory zaplňují nenulovými prvky méně než inverzní matice. Trojúhelníkový rozklad je také důležitý nástroj teorie matic.

Příklady k procvičení

!

1. Najděte LU rozklad symetrické matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a porovnejte rozložení nul v obou trojúhelníkových faktorech a v matici **A**.

2. Využijte rozkladu z předchozího cvičení k řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2. \end{array} \tag{9.17}$$

Řešení.

1. $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$

2. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/4 \\ 5/2 \\ 9/4 \end{bmatrix}$

▲

Pojmy k zapamatování

Σ

— permutační matice,

— dolní (horní) trojúhelníková matice,

— LU rozklad

Kapitola 10

Vektorové prostory

Průvodce studiem

Vektory jsme poznali na střední škole jako veličiny, které mají velikost a směr, a znázorňovali jsme je jako orientované úsečky. Pomocí vektorů jsme někdy zobrazovali komplexní čísla. V 5. kapitole jsme se nakonec seznámili s aritmetickými vektory, které jsme si ve zvláštních případech mohli také znázornit jako orientované úsečky (šipky), takže jsme si je byli schopni představit. Pro aritmetické vektory jsme definovali skládání (sčítání) a násobení skalárem, které splňovaly pravidla (5.5a)–(5.5f), (5.8) a (5.10).

Nyní si pojem vektoru zobecníme ještě více, takže náš nový pojem vektoru bude zahrnovat nejen aritmetické vektory a tím i „staré známé šipky“, ale také jiné objekty, jako například matice, polynomy a funkce. Ukazuje se totiž, že tyto objekty vykazují při sčítání a násobení skalárem stejné vlastnosti jako aritmetické vektory a že alespoň v matematice tak není podstatné to, co konkrétně považujeme za vektory, ale jaká pravidla splňují operace s nimi.

Cíle

Cílem této kapitoly je zavedení abstraktního pojetí vektoru, což učiníme prostřednictvím vektorového prostoru, který v této kapitole vybudujeme. Po prostudování této kapitoly budete znát:

- definici vektorového prostoru,
- pojem vektorového podprostoru,
- příklady vektorových prostorů a podprostorů,
- důkazy některých úloh týkajících se vektorových prostorů a podprostorů.

10.1. Vektorový prostor

Definice 10.1. *Reálný vektorový prostor* je množina $\mathscr{V}$, jejíž prvky se nazývají *vektory*, na níž jsou definovány operace

sčítání: pro každé $u, v \in \mathscr{V}$ součet $u + v \in \mathscr{V}$

a

násobení skalárem: pro každé $u \in \mathscr{V}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ skalární násobek $\alpha u \in \mathscr{V}$,

které splňují následující pravidla (axiomy):

(V1)	$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathscr{V}:$	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$	$=$	$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	asociativní zákon
(V2)	$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathscr{V}:$	$\mathbf{u} + \mathbf{v}$	$=$	$\mathbf{v} + \mathbf{u}$	komutativní zákon
(V3)	$\exists \mathbf{o} \in \mathscr{V} : \forall \mathbf{u} \in \mathscr{V}:$	$\mathbf{u} + \mathbf{o}$	$=$	$\mathbf{u}$	nulový vektor
(V4)	$\forall \mathbf{u} \in \mathscr{V} \exists (-\mathbf{u}) \in \mathscr{V}:$	$\mathbf{u} + (-\mathbf{u})$	$=$	$\mathbf{o}$	opačný vektor
(V5)	$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathscr{V}:$	$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v})$	$=$	$\alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$	distributivní zákon
(V6)	$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in \mathscr{V}:$	$(\alpha + \beta)\mathbf{u}$	$=$	$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$	distributivní zákon
(V7)	$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in \mathscr{V}:$	$\alpha(\beta\mathbf{u})$	$=$	$(\alpha\beta)\mathbf{u}$	asociativní zákon
(V8)	$\forall \mathbf{u} \in \mathscr{V}:$	$1\mathbf{u}$	$=$	$\mathbf{u}$	zachování měřítka

V definici vektorového prostoru má znak + dva různé významy, které však vždy dokážeme rozlišit podle operandů. Reálná čísla nazýváme skaláry. Jestliže místo reálných čísel použijeme čísla komplexní, potom mluvíme o *komplexním vektorovém prostoru*. Pokud budeme dále stručně mluvit jen o *vektorovém prostoru*, budeme předpokládat, že skaláry jsou prvky jednoho z uvedených číselných oborů.

Příklad 10.2. Reálné aritmetické vektory dimenze n se sčítáním vektorů a s násobením skalárem po složkách (vzorce (5.3) a (5.1)) tvoří reálný vektorový prostor, který budeme označovat $\mathbb{R}^n$. Nulový vektor je $\mathbf{o} = [0, \ldots, 0]$, pro $\mathbf{a} = [a_1, \ldots, a_n]$ je opačným vektorem $-\mathbf{a} = [-a_1, \ldots, -a_n]$. Tímto jsou splněny axiomy (V3) a (V4). Zbývající axiomy (V1), (V2), (V5)–(V8) jsou splněny také. Jedná se vlastně o pravidla (5.5a)–(5.5f). Pro $n = 1$ je množina skalárů i vektorů stejná.

Příklad 10.3. Množina $\mathscr{F}$ všech reálných funkcí s operací + definovanou pro každé reálné x rovností

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

a s násobením skalárem, které pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $f \in \mathscr{F}$ definuje funkci $\alpha f \in \mathscr{F}$ rovností

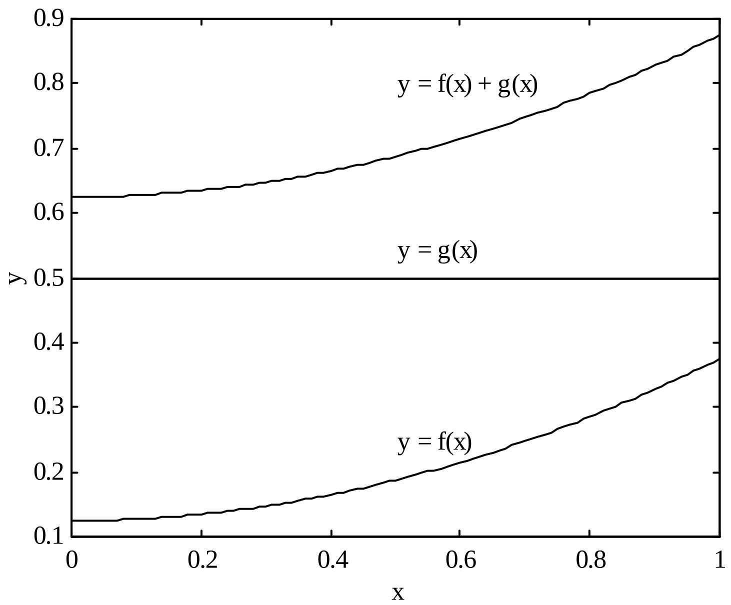
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

tvoří reálný vektorový prostor. Nulový prvek o tohoto prostoru je dán předpisem

$$o(x) = 0,$$

prvek opačný k f je definován pomocí

$$(-f)(x) = -f(x).$$



Obr. 10.1: Součet funkcí $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}$ a $g(x) = \frac{1}{2}$ definovaných na intervalu [0,1]

10.2. Rovnosti odvozené z axiomů

Axiomy vektorového prostoru jsou vybrány tak, aby pro abstraktní vektory platila všechna tvrzení, která jsou zřejmá pro šipky. Některá taková tvrzení si na ukázku dokážeme v následující větě.

Věta 10.4. *Nechť $\mathscr{V}$ je vektorový prostor s nulovým prvkem* $\mathbf{o}$, $\mathbf{u} \in \mathscr{V}$ *a nechť* α *je libovolný skalár. Pak platí následující rovnosti:*

$$(i) \qquad 0\mathbf{u} = \mathbf{o} \tag{10.1}$$

$$(ii) \qquad \alpha\mathbf{o} = \mathbf{o} \tag{10.2}$$

$$(iii) \qquad (-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u} \tag{10.3}$$

Důkaz. Příslušné axiomy vektorového prostoru vyznačíme jako odkazy nad rovnostmi.

(i)

$$0\mathbf{u} \overset{(V3)}{=} 0\mathbf{u} + \mathbf{o} \overset{(V4)}{=} 0\mathbf{u} + \Big(0\mathbf{u} + \big(-(0\mathbf{u})\big)\Big) \overset{(V1)}{=} (0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}) + \big(-(0\mathbf{u})\big) =$$

$$\overset{(V6)}{=} (0+0)\mathbf{u} + \big(-(0\mathbf{u})\big) = 0\mathbf{u} + \big(-(0\mathbf{u})\big) \overset{(V4)}{=} \mathbf{o}.$$

(ii) Použijeme-li (i) pro $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, dostaneme $0\mathbf{o} = \mathbf{o}$, takže

$$\alpha\mathbf{o} = \alpha(0\mathbf{o}) \overset{(V7)}{=} (\alpha 0)\mathbf{o} = 0\mathbf{o} = \mathbf{o}.$$

(iii) $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} \overset{(V8)}{=} 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} \overset{(V6)}{=} \big(1 + (-1)\big)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} \overset{(i)}{=} \mathbf{o}.$

□

10.3. Podprostory

Definice 10.5. Neprázdná množina $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$ je *podprostorem* vektorového prostoru $\mathscr{V}$, jestliže $\mathscr{U}$ je vektorový prostor vzhledem ke sčítání vektorů a násobení skalárem v prostoru $\mathscr{V}$.

K tomu, aby $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$ byl podprostorem vektorového prostoru $\mathscr{V}$ stačí, aby $\mathscr{U}$ byla uzavřená vzhledem ke sčítání vektorů a násobení skalárem, tedy aby pro libovolné dva prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathscr{U}$ a pro libovolný skalár α platilo $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathscr{U}$ a $\alpha\mathbf{u} \in \mathscr{U}$. Z posledního předpokladu totiž plyne $0\mathbf{u} \in \mathscr{U}$ i $(-1)\mathbf{u} \in \mathscr{U}$, takže podle (10.1) a (10.3) také nulový prvek $\mathbf{o} = 0\mathbf{u}$ i opačný prvek $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$ patří do $\mathscr{U}$, přičemž je zřejmé, že ostatní axiomy vektorového prostoru jsou splněny.

Příklad 10.6. Nechť p je pevně zvolená přímka v prostoru procházející zvoleným počátkem souřadnic. Pak množina všech polohových vektorů bodů na přímce p tvoří podprostor vektorového prostoru všech vázaných vektorů v prostoru.

Příklad 10.7. Pro dané $k \geq 1$ je množina $\mathscr{P}_k$ všech mnohočlenů stupně nejvýše k podprostorem vektorového prostoru $\mathscr{F}$ z příkladu 10.3. Mnohočleny zde považujeme za reálné funkce definované na celé reálné ose.

Příklad 10.8. Nechť $\mathscr{V}$ je libovolný prostor. Pak $\mathscr{O} = \{\mathbf{o}\}$ je podprostorem $\mathscr{V}$, neboť $\mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$ a podle (10.2) platí pro libovolný skalár α, že $\alpha\mathbf{o} = \mathbf{o}$. Vektorový prostor $\mathscr{O}$ je nejmenší podprostor daného vektorového prostoru a nazývá se *nulovým podprostorem*.

Příklad 10.9. Nechť $\mathscr{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ je konečná množina vektorů vektorového prostoru $\mathscr{V}$. Není těžké ověřit, že množina všech vektorů, které lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k, \tag{10.4}$$

je podprostorem vektorového prostoru $\mathscr{V}$, který nazýváme *lineární obal* množiny $\mathscr{S}$. Lineární obal dané množiny vektorů $\mathscr{S}$ značíme $\langle\mathscr{S}\rangle$.

Příklad 10.10. Jestliže $p_1(x) = 1$ a $p_2(x) = x$ jsou dva mnohočleny, které považujeme za prvky vektorového prostoru $\mathscr{P}$ všech reálných mnohočlenů, pak $\mathscr{P}_2 = \langle p_1, p_2\rangle$ je podprostor $\mathscr{P}$ tvořený všemi lineárními mnohočleny. Jestliže $p_3 = p_1 + p_2$, pak zřejmě $\langle p_1, p_2\rangle = \langle p_1, p_2, p_3\rangle$.

10.4. Součet a průnik podprostorů

Pro libovolné dva podprostory $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ daného vektorového prostoru $\mathscr{W}$ můžeme vytvořit *průnik podprostorů* $\mathscr{U} \cap \mathscr{V}$ a *součet podprostorů*

$$\mathscr{U} + \mathscr{V} = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} : \mathbf{u} \in \mathscr{U}, \mathbf{v} \in \mathscr{V}\}.$$

Průnik podprostorů není nikdy prázdný, neboť do něho vždy patří nulový prvek.

Věta 10.11. *Nechť $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ jsou podprostory vektorového prostoru $\mathscr{W}$. Pak $\mathscr{U} \cap \mathscr{V}$ i $\mathscr{U} + \mathscr{V}$ jsou podprostory $\mathscr{W}$.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathscr{U} \cap \mathscr{V}$, tedy $\mathbf{u} \in \mathscr{U}$, $\mathbf{u} \in \mathscr{V}$, $\mathbf{v} \in \mathscr{U}$ a $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$. Jelikož $\mathscr{U}$ a $\mathscr{V}$ jsou podprostory téhož prostoru, platí $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathscr{U}$ a $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathscr{V}$, tedy $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathscr{U} \cap \mathscr{V}$, a pro libovolný skalár α platí také $\alpha\mathbf{u} \in \mathscr{U}$ i $\alpha\mathbf{u} \in \mathscr{V}$, takže $\alpha\mathbf{u} \in \mathscr{U} \cap \mathscr{V}$. Důkaz, že $\mathscr{U} + \mathscr{V}$ je podprostorem $\mathscr{W}$ je obdobný. □

Jestliže průnik podprostorů $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ daného vektorového prostoru $\mathscr{W}$ je nulový podprostor $\mathscr{O}$, pak se součet $\mathscr{U} + \mathscr{V}$ nazývá *direktní (přímý) součet podprostorů* a značí se $\mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$. Direktní součet je tedy definován jen pro některé podprostory $\mathscr{W}$.

Důležitou vlastností direktního součtu podprostorů je to, že každý prvek $\mathbf{w} \in \mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$ lze vyjádřit jednoznačně ve tvaru $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ s $\mathbf{u} \in \mathscr{U}$ a $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$. Skutečně, nechť platí

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2.$$

Potom $\mathbf{o} = \mathbf{w} - \mathbf{w} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) - (\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2)$, tedy $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. To však znamená, že vektory $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ i $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ patří do $\mathscr{U} \cap \mathscr{V}$, takže podle definice direktního součtu jsou oba vektory nulové a platí

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2.$$

10.5. Vektory v matematice a ve fyzice

V této kapitole jsme si zavedli nový pojem vektoru, který je zobecněním pojmu vektor, tak jak se používá například ve fyzice. To, že používáme stejný název, tedy vektor, nás nesmí vést k domněnce, že se jedná v podstatě o jedno a totéž. Naše abstraktní vektory rozhodně nejsou veličiny, které mají velikost a směr. Co je velikost funkce, která je prvkem prostoru $\mathscr{F}$?

Ani veličina, která má velikost a směr, nemusí být vektorem v takovém smyslu. Představme si křižovatku, z níž lze vyjet čtyřmi směry. Známe-li průměrný počet aut, která projedou křižovatkou v každém směru v nějakém pevném časovém období, můžeme definovat v každém směru veličiny, které budou mít směr příslušného výjezdu z křižovatky a jejichž velikost bude rovna průměrnému počtu aut, které v tomto směru ve sledovaném období vyjely. Pro tyto veličiny, které mají velikost i směr, lze těžko smysluplně definovat skládání vektorů, které by splňovalo axiomy vektorového prostoru.

Ve zvláštních případech však lze dát našim novým pojmům stejný smysl, jako mají ve fyzice nebo v geometrii. Řešení úloh, ve kterých se vyskytují abstraktní vektory, například funkce, si tak někdy můžeme usnadnit tím, že si představíme řešení obdobného problému se šipkami.

Pojmy k zapamatování

— vektorový prostor a podprostor,
— průnik a součet podprostorů,
— lineární obal.

Příklady k procvičení

1. Dokažte, že lineární obal $\langle \mathscr{S} \rangle$ množiny $\mathscr{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektorů vektorového prostoru $\mathscr{V}$ z příkladu 10.9 tvoří vektorový prostor.

2. Nechť $\mathscr{F}_0$ je množina všech reálných funkcí f, které splňují $f(0) = 0$. Dokažte, že $\mathscr{F}_0$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathscr{F}$ z příkladu 10.3.

Kapitola 11

Lineární nezávislost a báze

Průvodce studiem

Pro vektory, které jsme zavedli v kapitole 10, zavedeme obdobu některých pojmů známých z analytické geometrie, jako jsou kolineárnost (rovnoběžnost) dvou vektorů nebo komplanárnost (možnost umístění ve stejné rovině) tří vektorů. Vystačíme přitom pouze s vlastnostmi vektorového prostoru, zejména se obejdeme bez úhlů. Nakonec si zavedeme pojem báze, který má pro vektorový prostor obdobný význam jako soustava souřadnic v geometrii.

Cíle

V této kapitole se naučíte řešit tyto úlohy:

- dokázat, jsou–li dané vektory lineárně závislé nebo nezávislé,
- vyjádřit daný vektor jako lineární kombinaci jiných vektorů.

11.1. Závislé a nezávislé vektory

První nový pojem, který si zde zavedeme, je obdobou vlastnosti, kterou mají dva volné vektory, lze-li je umístit na jednu přímku, nebo tři volné vektory, lze-li je umístit do společné roviny.

Definice 11.1. Neprázdná konečná množina vektorů $\mathscr{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vektorového prostoru $\mathscr{V}$ je *lineárně nezávislá*, jestliže rovnice

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{o} \tag{11.1}$$

má jediné řešení

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

Jestliže $\mathscr{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ je nezávislá, říkáme také, že vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ jsou nezávislé. Má-li rovnice (11.1) i jiné řešení, pak říkáme, že $\mathscr{S}$ je *lineárně závislá* a vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ jsou závislé.

Geometrický význam lineární závislosti pro dvourozměrné vázané vektory je na obrázku 11.1.

Příklad 11.2. Libovolná množina vektorů $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$, která obsahuje nulový vektor, je vždy lineárně závislá. Je–li například $\mathbf{v}_i = \mathbf{o}$ $(1 \le i \le k)$, stačí vzít $\alpha_i = 1$ a všechny ostatní skaláry v rovnici (11.1) položit rovny 0.

Příklad 11.3. Jestliže $\mathbf{v}_1 = [2, -1, 0], \mathbf{v}_2 = [1, 2, 5]$ a $\mathbf{v}_3 = [7, -1, 5]$, pak množina vektorů $\mathscr{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ je lineárně závislá, neboť $3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{o}$.

Sestavíme-li totiž rovnici (11.1) pro zadané vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ a $\mathbf{v}_3$, obdržíme po dosazení rovnici

$$\alpha_1 [2, -1, 0] + \alpha_2 [1, 2, 5] + \alpha_3 [7, -1, 5] = [0, 0, 0] \ ,$$

která je vlastně soustavou lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 7\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 5\alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

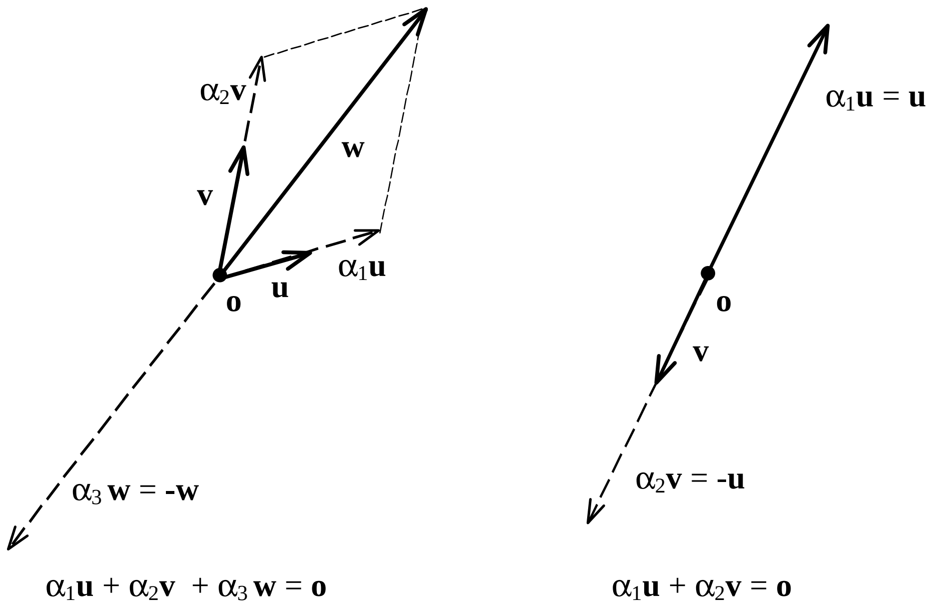
Soustava má nekonečně mnoho řešení tvaru $\alpha_1 = 3r$, $\alpha_2 = r$, $\alpha_3 = -r$, kde $r \in \mathbb{R}$ je parametr.Položíme-li $r = -1$, dostaneme uvedené řešení $3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{o}$.

Příklad 11.4. Mnohočleny $p_1(x) = 1-x, p_2(x) = 5+3x-2x^2$ a $p_3(x) = 1+3x-x^2$ tvoří lineárně závislou množinu v $\mathscr{P}_2$, neboť pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $3p_1(x) - p_2(x) + {}$ $+ 2p_3(x) = o(x)$, tj. $3p_1 - p_2 + 2p_3 = 0$.

K tomuto řešení dospějeme řešením rovnice $\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) = o(x)$. Této rovnici odpovídá po dosazení opět soustava lineárních rovnic, kterou dostaneme porovnáním koeficientů u mocnin proměnné x:

$$\begin{array}{lrl} x^0: & \alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ x^1: & -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 & = 0 \\ x^2: & -2\alpha_2 - \alpha_3 & = 0 \ . \end{array}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení. Platí $\alpha_1 = \frac{3}{2}r$, $\alpha_2 = -\frac{1}{2}r$, $\alpha_3 = r$, kde parametr r je libovolné reálné číslo. Stačí zvolit $r = 2$ a vyjde $3p_1 - p_2 + 2p_3 = 0$.



Obr. 11.1: Lineárně závislé vektory v $\mathbb{R}^2$

Příklad 11.5. Vektory $\mathbf{e}_1 = [1,0,0], \mathbf{e}_2 = [0,1,0]$ a $\mathbf{e}_3 = [0,0,1]$ tvoří lineárně nezávislou množinu reálných třírozměrných aritmetických vektorů, neboť z $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{o}$ plyne $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$.

Poznámka 11.6. Závislost či nezávislost množiny vektorů závisí na množině skalárů. Například považujeme-li $\mathscr{V} = \mathbb{C}$ za reálný vektorový prostor, pak jsou komplexní jednotka i a 1 nezávislé, neboť pro libovolná reálná čísla α_1, α_2 plyne z

$$\alpha_1 i + \alpha_2 1 = 0,$$

že $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Pokud však tutéž množinu, tedy $\mathscr{V} = \mathbb{C}$, považujme za komplexní vektorový prostor, plyne z

$$(-1)i + i1 = 0,$$

že i a 1 jsou závislé!

11.2. Lineární kombinace a závislost

Na obrázku 11.1 vlevo vidíme trojici závislých vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Současně je naznačeno, že vektor $\mathbf{w}$ lze vyjádřit jako součet násobků vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$. Součet násobků vektorů se bude v dalším výkladu vyskytovat tak často, že si pro něj zavedeme samostatný název. Vektor $\mathbf{v}$ z vektorového prostoru $\mathscr{V}$ budeme nazývat *lineární kombinací* vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathscr{V}$, jestliže existují skaláry $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tak, že

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k.$$

Například mnohočlen p_1 z vektorového prostoru $\mathscr{P}_1$ všech lineárních reálných mnohočlenů, který je definován předpisem $p_1(x) = x$, je lineární kombinací mnohočlenů $p_2(x) = x + 1$ a $p_3(x) = x + 2$, neboť pro libovolné reálné x platí

$$p_1(x) = x = 2(x+1) - (x+2) = 2p_2(x) - p_3(x),$$

takže $p_1 = 2p_2 - p_3$.

Věta 11.7. *Konečná množina nenulových vektorů $\mathscr{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ je lineárně závislá, právě když existuje $k \geq 2$ tak, že vektor $\mathbf{v}_k$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$.*

Důkaz. Nechť $\mathscr{S}$ je množina nenulových lineárně závislých vektorů. Uvažujme množiny $\mathscr{S}_1 = \{\mathbf{v}_1\}$, $\mathscr{S}_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}, \ldots, \mathscr{S}_m = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ a nechť $\mathscr{S}_k$ je nejmenší množina vektorů, které jsou lineárně závislé, takže platí

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{o} \tag{11.2}$$

a některý z koeficientů $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ je nenulový. Pak $k \geq 2$, neboť $\mathscr{S}_1$ je zřejmě nezávislá množina vektorů, a $\alpha_k \neq 0$, neboť jinak by $\mathscr{S}_{k-1}$ byla lineárně závislá. rovnici (11.2) můžeme tedy upravit pomocí axiomů vektorového prostoru na tvar

$$\mathbf{v}_k = \left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_k}\right)\mathbf{v}_1 + \ldots + \left(\frac{-\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)\mathbf{v}_{k-1}.$$

Obráceně, jestliže pro $2 \leq k \leq m$ platí

$$\mathbf{v}_k = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1},$$

pak

$$-(\alpha_1 \mathbf{v}_1) - \ldots - (\alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}) + 1\mathbf{v}_k + 0\mathbf{v}_{k+1} + \ldots + 0\mathbf{v}_m = \mathbf{o},$$

takže $\mathscr{S}_m$ je lineárně závislá, neboť koeficient 1 u $\mathbf{v}_k$ je nenulový. □

Důsledek 11.8. Dva nenulové vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je skalárním násobkem druhého, například $\mathbf{u}_2 = k\mathbf{u}_1$.

Pro zájemce:

11.3. Postačující podmínky pro nezávislost funkcí

Nechť $\mathscr{S} = \{f_1, \ldots, f_k\}$ je konečná množina reálných funkcí vektorového prostoru $\mathscr{F}$ z příkladu 10.3. Podle definice je $\mathscr{S}$ nezávislá právě tehdy, když pro libovolné koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ plyne z

$$\alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_k f_k(x) = 0 \tag{11.3}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, že $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Ověření podmínky (11.3) pro všechna $x \in \mathbb{R}$ však vyžaduje dosazení nekonečně mnoha čísel do levé strany rovnosti, což může být v obecném případě neproveditelné. Přesto lze s trochou štěstí nezávislost množiny $\mathscr{S}$ poznat.

První postup vychází z pozorování, že dosadíme-li v (11.3) za x postupně různá čísla $x_1, \ldots, x_k$, dostaneme soustavu k lineárních rovnic o k neznámých $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ve tvaru:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 f_1(x_1) & + & \ldots & + & \alpha_k f_k(x_1) & = & 0 \\ \vdots & & \ldots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 f_1(x_k) & + & \ldots & + & \alpha_k f_k(x_k) & = & 0 \end{array} \tag{11.4}$$

Pokud má tato soustava regulární matici, plyne odsud, že $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$ a $\mathscr{S}$ je nezávislá množina.

Druhý postup vychází z pozorování, že pokud platí pro nějaké $x \in \mathbb{R}$ rovnost (11.3), zůstane tato rovnost v platnosti i po derivování. Pro pevně zvolené číslo x tak dostaneme pro $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ soustavu

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 f_1^{(0)}(x) & + & \ldots & + & \alpha_k f_k^{(0)}(x) & = & 0 \\ \vdots & & \ldots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 f_1^{(k-1)}(x) & + & \ldots & + & \alpha_k f_k^{(k-1)}(x) & = & 0 \end{array} \tag{11.5}$$

Pokud má tato soustava regulární matici, plyne odsud, že $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$ a $\mathscr{S}$ je nezávislá množina. Matice této soustavy se vyskytuje ve více aplikacích a nazývá se *Wronského matice*.

Příklad 11.9. Rozhodněte, zda jsou mocniny x, x^2 a x^3 lineárně nezávislé.

Řešení 1: Zvolíme si body $x_1 = 1, x_2 = 2$ a $x_3 = 3$, které postupně dosadíme do funkcí $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3$, a vytvoříme soustavu (11.3). Dostaneme:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ 2\alpha_1 & + & 4\alpha_2 & + & 8\alpha_3 & = & 0 \\ 3\alpha_1 & + & 9\alpha_2 & + & 27\alpha_3 & = & 0 \end{array} \tag{11.6}$$

Matici této soustavy převedeme na schodový tvar. Dostaneme

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{r}_2 - 2\mathrm{r}_1 \\ \mathrm{r}_3 - 3\mathrm{r}_1 \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 24 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{r}_3 - 3\mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Matice soustavy je regulární, takže soustava (11.6) má jen nulové řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Funkce x, x^2 a x^3 jsou tedy lineárně nezávislé.

Řešení 2: Vypočteme první a druhou derivaci funkcí $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3$ v bodě 1 a vytvoříme Wronského matici, kterou převedeme na schodový tvar. Dostaneme

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1 \\ \\ \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{r}_3 - 2\mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matice je tedy regulární, z čehož opět vyplývá, že funkce x, x^2 a x^3 jsou lineárně nezávislé.

Poznámka 11.10. Pokud by nám vyšlo, že výsledná matice není regulární, nemohli bychom učinit žádný závěr. K tomu, abychom mohli prohlásit, že uvažované funkce jsou závislé, bychom museli vyzkoušet v prvním případě všechny trojice reálných čísel x_1, x_2, x_3, ve druhém případě všechna $x \in \mathbb{R}$. Singulární matici bychom dostali například při volbě $x_1 = 0$ nebo $x = 0$.

11.4. Báze vektorového prostoru

Pojem báze, který si zavedeme v tomto oddílu, nám umožní popsat vektory pomocí skalárů. Ve svých důsledcích to vede k redukci úloh, v nichž se mohou vyskytovat libovolné vektory, na úlohy, v nichž se objevují pouze vektory báze a čísla.

Definice 11.11. Konečná množina $\mathscr{E}$ vektorů vektorového prostoru $\mathscr{V}$ je *báze vektorového prostoru* $\mathscr{V}$, jestliže

i) $\mathscr{E}$ je nezávislá.
ii) Každý vektor $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathscr{E}$.

Příklad 11.12. Vektory $\mathbf{e}_1 = [1,0,0], \mathbf{e}_2 = [0,1,0], \mathbf{e}_3 = [0,0,1]$ tvoří bázi $\mathscr{V} = \mathbb{R}^3$. Jakýkoli vektor $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$ tohoto prostoru lze vyjádřit ve tvaru $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$. Báze $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ je zvláštním případem *standardní báze* $\mathbb{R}^n$, která je tvořena řádky či sloupci jednotkové matice $\mathbf{I}_n$.

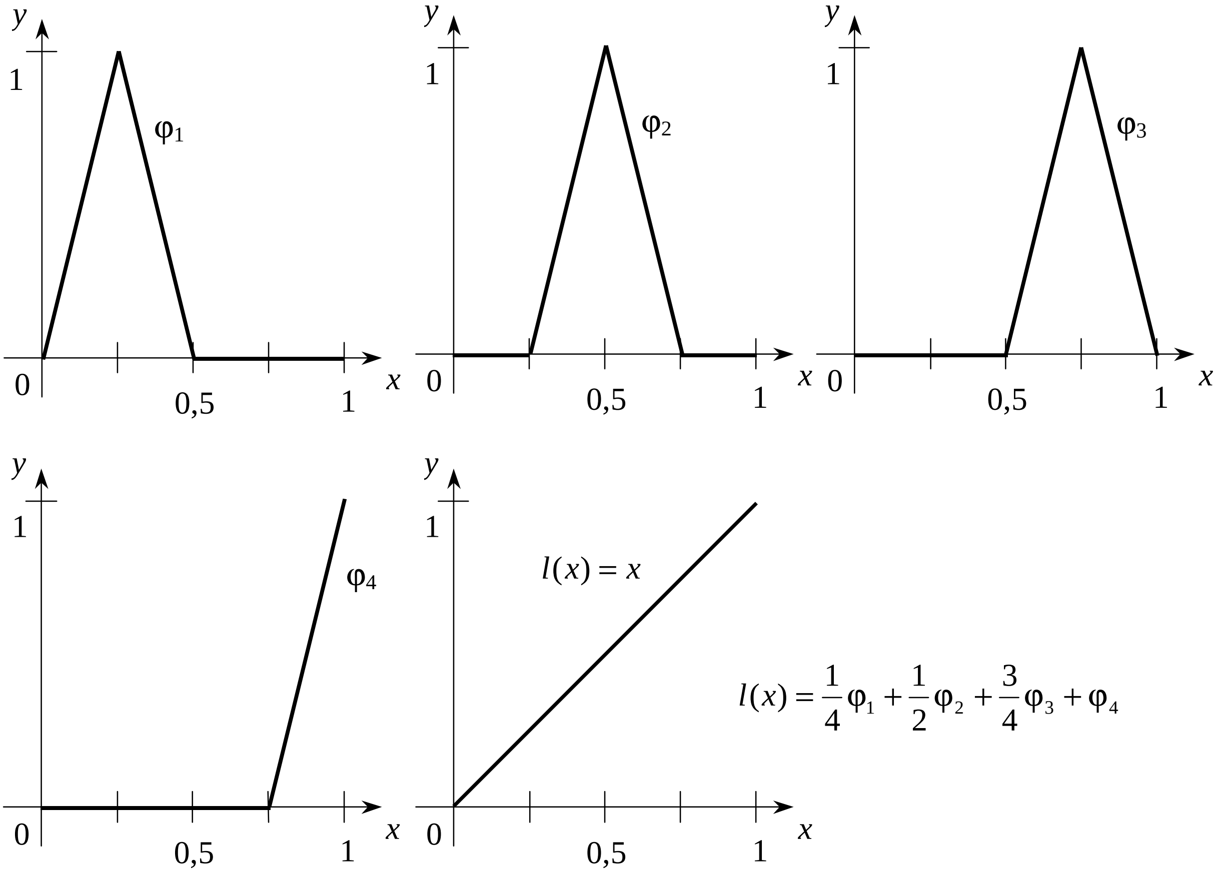
Příklad 11.13. Mnohočleny $p_1(x) = 1$ a $p_2(x) = x$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathscr{P}_1$. Každý mnohočlen $p(x) = a_0 + a_1 x$ lze zapsat ve tvaru $p = a_0 p_1 + a_1 p_2$. Nechť $a_0 p_1 + a_1 p_2 = 0$, tj. $a_0 + a_1 x = 0$ pro všechna x. Pro $x = 0$ dostáváme $a_0 + a_1 \cdot 0 = 0$, odkud $a_0 = 0$, a pro $x = 1$ pak z $a_1 \cdot 1 = 0$ dostaneme $a_1 = 0$, takže p_1 a p_2 jsou nezávislé.

Příklad 11.14. Nechť $\mathscr{L}_4$ je množina všech spojitých funkcí l na intervalu $[0,1]$, které splňují $l(0) = 0$ a které jsou lineární na intervalech $[0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], [\frac{3}{4}, 1]$. Potom funkce $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ z obrázku 11.2 tvoří bázi $\mathscr{L}_4$.

Poznámka 11.15. Ne každý vektorový prostor má bázi ve smyslu naší definice. Například neexistuje žádná konečná množina reálných funkcí, jejichž lineární kombinací by bylo možno vyjádřit libovolnou reálnou funkci.

Pojmy k zapamatování

— vektory lineárně nezávislé a závislé,
— lineární kombinace vektorů,
— báze vektorového prostoru,
— standardní báze prostoru $\mathbb{R}^n$.



Obr. 11.2: Po částech lineární funkce

Kapitola 12

Souřadnice

Průvodce studiem

V kapitole 11 jsme si zavedli pojem báze, který nyní využijeme k definování souřadnic. Pak si ukážeme, jak lze pomocí souřadnic převést úlohy s abstraktními vektory na úlohy s aritmetickými vektory, s nimiž umíme číselně počítat.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- najít souřadnice daného vektoru vzhledem k dané uspořádané bázi,
- převést některé úlohy s abstraktními vektory na úlohy s aritmetickými vektory.

12.1. Souřadnice vektoru

Definice 12.1. Nechť $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ je uspořádaná báze vektorů vektorového prostoru $\mathscr{V}$. Nechť $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$. Potom čísla $v_1, \ldots, v_n$, pro která platí

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + \ldots + v_n\mathbf{e}_n,$$

nazýváme *souřadnice vektoru* $\mathbf{v}$ v bázi $\mathscr{E}$.

Například libovolný aritmetický vektor $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$ má ve standardní bázi $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ z příkladu 11.12 souřadnice v_1, v_2, v_3, neboť

$$[v_1, v_2, v_3] = v_1[1, 0, 0] + v_2[0, 1, 0] + v_3[0, 0, 1].$$

Mnohočlen $p(x) = x + 2$ má v bázi $\mathscr{P} = (p_1, p_2)$ z příkladu 11.13, kde $p_1(x) = 1$ a $p_2(x) = x$, souřadnice $2, 1$, neboť

$$p(x) = x + 2 = 2p_1(x) + 1p_2(x).$$

Souřadnice závisí nejen na zvolené bázi, ale i na očíslování vektorů báze. Například $\mathbf{v} = [1, 2]$ má v bázi $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, kde $\mathbf{e}_1 = [1, 0]$ a $\mathbf{e}_2 = [0, 1]$, první souřadnici 1, avšak pokud $\mathbf{e}_1 = [0, 1]$ a $\mathbf{e}_2 = [1, 0]$, potom má tentýž vektor první souřadnici 2.

Následující věta říká, že souřadnice daného vektoru jsou určeny jednoznačně.

Věta 12.2. *Nechť $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ je uspořádaná báze vektorového prostoru $\mathscr{V}$ a nechť $x_1, \ldots, x_n$ a $y_1, \ldots, y_n$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$ v bázi $\mathscr{E}$. Pak $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$.*

Důkaz. Nechť $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ je báze a

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n.$$

Pak

$$\begin{aligned} \mathbf{o} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} &= x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n + (-1)(y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n) = \\ &= (x_1 - y_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (x_n - y_n)\mathbf{e}_n. \end{aligned} \tag{12.1}$$

Jelikož vektory báze jsou nezávislé, plyne odtud $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$. □

Souřadnice každého vektoru $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$ jsou v dané bázi $\mathscr{E}$ určeny jednoznačně. Budeme je zapisovat také ve tvaru sloupcového vektoru, který se nazývá *souřadnicový vektor* a značí se $[\mathbf{v}]_{\mathscr{E}}$.

Příklad 12.3. Libovolný aritmetický vektor $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$ má v bázi $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ z příkladu 11.12 souřadnicový vektor

$$[\mathbf{v}]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = [v_1, v_2, v_3]^\top.$$

Příklad 12.4. Mnohočlen $p(x) = x + 2$ má v bázi $\mathscr{P} = (p_1, p_2)$ z příkladu 11.13 souřadnicový vektor $[\mathbf{p}]_{\mathscr{P}} = [2, 1]^\top$.

Příklad 12.5. Libovolná po částech lineární funkce l vektorového prostoru $\mathscr{L}_4$ z příkladu 11.14 má v bázi $\mathscr{E} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ souřadnicový vektor

$$[l]_{\mathscr{E}} = \left[l(\tfrac{1}{4}), l(\tfrac{1}{2}), l(\tfrac{3}{4}), l(1)\right]^\top.$$

12.2. Použití souřadnic

Pomocí souřadnic můžeme převést úlohy s vektory, které lze popsat pomocí lineárních kombinací bázových vektorů daného vektorového prostoru, na úlohy s aritmetickými vektory. Použijeme toho, že zobrazení, které každému vektoru přiřazuje jeho souřadnicový vektor v dané bázi $\mathscr{E}$, převádí součet vektorů na součet souřadnicových vektorů, tedy

$$[\mathbf{u}+\mathbf{v}]_{\mathscr{E}} = [\mathbf{u}]_{\mathscr{E}} + [\mathbf{v}]_{\mathscr{E}}\,, \tag{12.2}$$

a násobení vektoru skalárem α na násobení příslušného souřadnicového vektoru, tedy

$$[\alpha\mathbf{u}]_{\mathscr{E}} = \alpha\,[\mathbf{u}]_{\mathscr{E}}\,. \tag{12.3}$$

Obě rovnosti lze ověřit přímo z definice souřadnic. Například jsou-li $u_1,\ldots,u_n$ souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ v bázi $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$, tedy

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + \ldots + u_n\mathbf{e}_n,$$

pak

$$\alpha\mathbf{u} = \alpha u_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha u_n\mathbf{e}_n,$$

odkud

$$[\alpha\mathbf{u}]_{\mathscr{E}} = \alpha\,[\mathbf{u}]_{\mathscr{E}}\,.$$

Při řešení úloh s lineárními kombinacemi vektorů, například máme-li vyjádřit nějaký vektor jako lineární kombinaci jiných vektorů nebo máme-li rozhodnout, zda je nějaká množina vektorů nezávislá, postupujeme následovně:

- Zvolíme si takovou bázi $\mathscr{E}$ daného vektorového prostoru, ve které lze všechny vektory snadno vyjádřit.
- Najdeme souřadnicové vektory všech vektorů, které se vyskytují v popisu problému.
- Řešíme úlohu, kterou dostaneme z původní úlohy záměnou všech vektorů za souřadnicové vektory.

Postup ovšem předpokládá, že máme k dispozici vhodnou bázi, což nemusí být vždycky splněno.

Příklad 12.6. Najděte souřadnice mnohočlenu $p(x) = x^2-1$ v bázi $\mathscr{P} = (p_1,p_2,p_3)$, kde $p_1(x) = 1, p_2(x) = x+1, p_3(x) = x^2+x+1$.

Řešení.

- Zvolíme si bázi $\mathscr{E} = (\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3)$, kde $\mathrm{e}_1(x) = 1, \mathrm{e}_2(x) = x, \mathrm{e}_3(x) = x^2$.
- Najdeme souřadnice vektorů p, p_1, p_2, p_3 v bázi $\mathscr{E}$. Dostaneme

$$[p]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [p_1]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [p_2]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [p_3]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Řešíme soustavu
$$[p]_{\mathscr{E}} = x_1 [p_1]_{\mathscr{E}} + x_2 [p_2]_{\mathscr{E}} + x_3 [p_3]_{\mathscr{E}} .$$
Rozepsáním této rovnice po složkách dostaneme soustavu
$$\begin{array}{rcrcrcr} -1 & = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 \\ 0 & = & & & x_2 & + & x_3 \\ 1 & = & & & & & x_3, \end{array} \tag{12.4}$$
která má řešení $x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = 1$.

Snadno ověříme, že opravdu platí $p = -p_1 - p_2 + p_3$. ▲

Příklad 12.7. Rozhodněte, zda jsou mnohočleny
$$p_1(x) = x^2 + x + 1, p_2(x) = x^2 + 2x + 1, p_3(x) = x^2 + x + 2$$
závislé nebo nezávislé.

Řešení.

- Zvolíme si stejnou bázi $\mathscr{E} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ jako v příkladu 12.6, tj. $\mathrm{e}_1(x) = 1, \mathrm{e}_2(x) = x, \mathrm{e}_3(x) = x^2$.
- Najdeme souřadnice vektorů p_1, p_2, p_3 v bázi $\mathscr{E}$. Dostaneme
$$[p_1]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [p_2]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [p_3]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
- Řešíme soustavu
$$x_1 [p_1]_{\mathscr{E}} + x_2 [p_2]_{\mathscr{E}} + x_3 [p_3]_{\mathscr{E}} = [o(x)]_{\mathscr{E}} .$$
Rozepsáním po složkách dostaneme soustavu:
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \tag{12.5}$$
Úpravou rozšířené matice soustavy dostaneme
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1 \\ \mathrm{r}_3 - \mathrm{r}_1 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$
Odtud vidíme, že soustava (12.5) má jediné řešení $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

Mnohočleny p_1, p_2, p_3 jsou tedy lineárně nezávislé. ▲

Poznámka 12.8. Povšimněme si, že řešení úlohy na lineární kombinaci, nebo nezávislost vektorů vede k soustavě rovnic, jejíž matice má jako sloupce souřadnicové vektory zadaných vektorů.

Σ

Pojmy k zapamatování

— uspořádaná báze vektorového prostoru,

— souřadnicový vektor.

Kapitola 13

Dimenze a řešení soustav

Průvodce studiem

Vektory v rovině (prostoru) považujeme za dvourozměrné (třírozměrné), neboť k určení každého vektoru je třeba dvou (tří) souřadnic. Jelikož počet souřadnic je stejný jako počet vektorů příslušné báze, nabízí se okamžité zobecnění rozměru (dimenze) na vektorové prostory. Než tak učiníme, ukážeme si, že všechny báze jednoho vektorového prostoru mají stejný počet vektorů. Potom si ukážeme souvislost mezi novým pojmem dimenze a řešitelností obecných lineárních soustav.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- stanovit dimenzi daného vektorového prostoru,
- vypočítat řádkovou, či sloupcovou hodnost matice.

13.1. Dimenze vektorového prostoru

Věta 13.1. *Nechť $\mathscr{V} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ je vektorový prostor z příkladu 10.9 a nechť $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$ jsou nezávislé vektory prostoru $\mathscr{V}$. Pak $m \leq n$.*

Důkaz. Nechť platí předpoklady věty a $m > n$. Jelikož $\mathscr{V} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ a $\mathbf{f}_1 \in \mathscr{V}$, lze $\mathbf{f}_1$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze, takže vektory $\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ jsou závislé podle věty 11.7. Podle téže věty však existuje k tak, že $\mathbf{e}_k$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1}$. Odtud snadno plyne, že každý vektor prostoru $\mathscr{V}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$. Skutečně, je–li totiž

$$\mathbf{e}_k = \alpha_0 \mathbf{f}_1 + \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_{k-1} \mathbf{e}_{k-1}$$

a

$$\mathscr{V} \ni \mathbf{x} = \beta_0\mathbf{f}_1 + \beta_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_{k-1}\mathbf{e}_{k-1} + \beta_k\mathbf{e}_k + \beta_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \cdots + \beta_n\mathbf{e}_n \ ,$$

po dosazení za $\mathbf{e}_k$ a úpravě obdržíme

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = \quad & \beta_0\mathbf{f}_1 + \beta_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_{k-1}\mathbf{e}_{k-1} + \beta_k(\alpha_0\mathbf{f}_1 + \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\mathbf{e}_{k-1}) + \\ & \beta_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \cdots + \beta_n\mathbf{e}_n = \\ = \quad & (\beta_0 + \beta_k\alpha_0)\mathbf{f}_1 + (\beta_1 + \beta_k\alpha_1)\mathbf{e}_1 + \cdots + (\beta_{k-1} + \beta_k\alpha_{k-1})\mathbf{e}_{k-1} + \\ & \beta_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \cdots + \beta_n\mathbf{e}_n \ ,\end{aligned}$$

takže vektor $\mathbf{e}_k$ můžeme z množiny $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ vyloučit a nahradit vektorem $\mathbf{f}_1$.

Jestliže tento postup zopakujeme s tím, že vezmeme v úvahu nezávislost vektorů $\mathbf{f}_1$ a $\mathbf{f}_2$, ukáže se, že každý vektor prostoru $\mathscr{V}$ lze vyjádřit jako kombinaci $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ a některých $n-2$ vektorů, které zbývají z původní množiny $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ po záměně dalšího vektoru za $\mathbf{f}_2$.

Kdyby $m > n$, dostali bychom výše uvedeným postupem po vyškrtání *všech* n vektorů množiny $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ a jejich náhradě vektory $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$, že každý vektor prostoru $\mathscr{V}$ lze vyjádřit pomocí vektorů $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$. Tak bychom však mohli vyjádřit $\mathbf{f}_{n+1}$ jako kombinaci $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$, což je ve sporu s předpokladem, že $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ jsou nezávislé. Platí tedy $m \leq n$. □

Z právě dokázané věty ihned plyne, že je-li $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ báze prostoru $\mathscr{V}$ a jsou-li $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ nezávislé, pak $m \leq n$. Má-li tedy nějaký vektorový prostor $\mathscr{V}$ bázi, pak počet vektorů této báze je maximálním počtem nezávislých vektorů prostoru $\mathscr{V}$ a *počet vektorů v různých bázích téhož vektorového prostoru je stejný*.

Definice 13.2. Maximální počet nezávislých vektorů vektorového prostoru $\mathscr{V}$ nazýváme *dimenzí* prostoru $\mathscr{V}$ a značíme ji $\dim\mathscr{V}$. Má-li vektorový prostor bázi, je jeho dimenze rovna počtu vektorů báze a mluvíme o *konečněrozměrném prostoru*. Podle naší definice platí $\dim\{\mathbf{o}\} = 0$. Nemá-li nenulový vektorový prostor bázi, mluvíme o *nekonečněrozměrném prostoru*.

Nový pojem dimenze je v souladu s pojmem dimenze, který jsme si zavedli pro aritmetické vektory, neboť vektory $\mathbf{e}_1 = [1, 0, \ldots, 0], \ldots, \mathbf{e}_n = [0, \ldots, 0, 1]$ tvoří bázi prostoru n-rozměrných aritmetických vektorů. Pojem dimenze nemusí však být plně v souladu s naší intuicí. Například komplexní prostor $\mathscr{V} = \mathbb{C}$ je jednorozměrný, neboť jeho bázi tvoří jakékoliv nenulové číslo.

Příklad 13.3. Postupným vyškrtáním vektorů, které spolu s předcházejícími tvoří lineárně závislou množinu, určete bázi a dimenzi vektorového prostoru

$$\mathscr{U} = \big\langle \mathbf{u}_1 = [-2, 3, 1], \mathbf{u}_2 = [3, -1, 2], \mathbf{u}_3 = [1, 2, 3], \mathbf{u}_4 = [-1, 5, 4] \big\rangle.$$

.

Řešení. Vektorový prostor $\mathscr{U}$ je vlastně lineární obal množiny $\mathscr{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \}$. Množiny vektorů $\mathscr{S}_1 = \{\mathbf{u}_1\}$ a $\mathscr{S}_2 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ jsou lineárně nezávislé, neboť vektor $\mathbf{u}_1$ je nenulový a rovnice $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{o}$ má pouze triviální řešení $k_1 = k_2 = 0$. Naproti tomu vektor $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, takže množina $\mathscr{S}_3 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ je lineárně závislá, a tudíž $\mathbf{u}_3$ můžeme vyškrtnout. Podobně můžeme vyškrtnout i vektor $\mathbf{u}_4$, protože $\mathbf{u}_4 = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, a tudíž $\mathscr{S}_4 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4\}$ je opět lineárně závislá.

Bázi prostoru $\mathscr{U}$ tvoří vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$. Platí $\mathscr{U} = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$, $\dim(\mathscr{U}) = 2$. ▲

13.2. Dimenze a vyjádření vektoru jako lineární kombinace

S pomocí pojmu dimenze lze popsat řešitelnost úlohy nalézt vyjádření vektoru jako lineární kombinace jiných vektorů.

Věta 13.4. *Nechť* $\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ *jsou vektory vektorového prostoru* $\mathscr{V}$*. Označme si* $\mathscr{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$*. Pak platí následující tvrzení:*

i) *Vektor* $\mathbf{b}$ *lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů* $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$*, právě když*

$$\dim \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle = \dim \langle \mathscr{A} \rangle \,. \tag{13.1}$$

ii) *Jestliže platí (13.1) a* $\mathscr{A}$ *je nezávislá množina vektorů, pak lze vektor* $\mathbf{b}$ *vyjádřit jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů* $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$*.*

iii) *Jestliže platí (13.1) a* $\mathscr{A}$ *je závislá množina vektorů, pak lze vektor* $\mathbf{b}$ *vyjádřit nekonečně mnoha způsoby jako lineární kombinaci vektorů* $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$*. V této kombinaci lze zvolit některých* $d = k - \dim \langle \mathscr{A} \rangle$ *koeficientů libovolně.*

Důkaz. i) Jestliže $\mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{a}_k = \mathbf{o}$, je tvrzení triviální. Předpokládejme tedy, že některý z vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ je různý od nuly. Pak postupným vyškrtáváním vektorů, které jsou kombinací ostatních, vybereme z $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ nějakou bázi $\mathscr{E}$ prostoru $\langle \mathscr{A} \rangle$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\mathscr{E} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$. Jestliže $\mathbf{b}$ nelze vyjádřit jako kombinaci vektorů báze $\mathscr{E}$, pak $(\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ tvoří bázi $\langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$ a platí

$$\dim \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle = s + 1 \neq s = \dim \langle \mathscr{A} \rangle \,.$$

Naopak, jestliže $\mathbf{b}$ lze vyjádřit jako kombinaci $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$, pak $\mathscr{E}$ je báze $\langle \mathscr{A} \rangle$ i $\langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$ a platí

$$\dim \langle \mathscr{A} \rangle = s = \dim \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle \,.$$

ii) Jestliže platí (13.1) a $\mathscr{A}$ je nezávislá množina vektorů, pak $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ tvoří bázi $\langle \mathscr{A} \rangle$ a podle i) lze vektor $\mathbf{b}$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$. Podle věty z oddílu 12.2 jsou koeficienty lineární kombinace určeny jednoznačně.

iii) Nechť platí (13.1). Předpokládejme opět, že $\mathscr{E} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s)$ tvoří bázi $\langle \mathscr{A} \rangle$ a $s < k$. Podle i) platí $\mathbf{b} \in \langle \mathscr{A} \rangle$, takže pro libovolné $\xi_{s+1}, \ldots, \xi_k$ platí také

$$\mathbf{b} - \xi_{s+1}\mathbf{a}_{s+1} - \ldots - \xi_k \mathbf{a}_k \in \langle \mathscr{A} \rangle \,.$$

Existuje tedy $\xi_1, \ldots, \xi_s$ tak, že

$$\mathbf{b} - \xi_{s+1}\mathbf{a}_{s+1} - \ldots - \xi_k \mathbf{a}_k = \xi_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \xi_s \mathbf{a}_s.$$

Vektor $\mathbf{b}$ lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{b} = \xi_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \xi_k \mathbf{a}_k$$

s libovolnými $\xi_{s+1}, \ldots, \xi_k$. Počet těchto koeficientů splňuje

$$d = k - s = k - \dim \langle \mathscr{A} \rangle \,.$$

□

Právě dokázaná věta obsahuje odpověď na otázku, kdy má soustava lineárních rovnic řešení, kdy má jediné řešení a kdy má nekonečně mnoho řešení, a to v termínech dimenze lineárních obalů sloupců matice soustavy a pravé strany. Stačí si za vektory $\mathbf{a}_i$ dosadit sloupce $\mathbf{s}_i^{\mathbf{A}}$ matice soustavy $\mathbf{A}$ a za $\mathbf{b}$ dosadit vektor pravé strany. Věta však nedává nijaký návod, jak dimenzi prostoru sloupců zjistit. To je předmětem následujících odstavců.

13.3. Řádkový prostor a řádková hodnost

Důležitým krokem k lepšímu pochopení otázek řešitelnosti rovnic je současné studium obalů řádků i sloupců matice soustavy. Tento postup nám umožní zejména využít známou techniku elementárních řádkových operací.

Zde se budeme zabývat lineárním obalem $\mathscr{R}(\mathbf{A}) = \left\langle \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}, \ldots, \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}} \right\rangle$ řádků $\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}$ dané matice $\mathbf{A}$ typu (m, n), který nazýváme *řádkovým prostorem matice* $\mathbf{A}$. Zejména si všimneme, že $\mathscr{R}(\mathbf{A})$ se nemění elementárními řádkovými operacemi, a proto platí následující věta.

Věta 13.5. *Nechť matice* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *jsou řádkově ekvivalentní. Pak*

$$\mathscr{R}(\mathbf{A}) = \mathscr{R}(\mathbf{B}). \tag{13.2}$$

Dimenze $\mathscr{R}(\mathbf{A})$ se nazývá též *řádková hodnost* matice $\mathbf{A}$, elementární řádkové operace ji nemění a snadno ji určíme ze schodového tvaru matice $\mathbf{A}$, neboť počet nenulových řádků matice ve schodovém či normovaném schodovém tvaru je zřejmě roven její řádkové hodnosti.

Příklad 13.6. Určete řádkovou hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{13.3}$$

Řešení. Elementárními řádkovými úpravani dostaneme postupně

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{r}_3 - \mathrm{r}_2 \mapsto$$
$$\mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_2 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13.4}$$

Řádková hodnost matice **A** je tedy rovna dvěma. ▲

Poznámka 13.7. V příkladu jsme matici upravili až na normovaný schodový tvar, aby bylo vidět zcela triviálně, že nenulové řádky jsou nezávislé. Je však zřejmé, že jsme se mohli spokojit i se schodovým tvarem matice.

13.4. Sloupcová hodnost matice

Nyní se budeme zabývat lineárním obalem $\mathscr{S}(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \dots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}} \rangle$ sloupců dané matice **A** typu (m, n), který se také nazývá *sloupcový prostor* matice **A**. Dimenze $\mathscr{S}(\mathbf{A})$ se nazývá *sloupcová hodnost* matice **A**.

Co se dá říct o sloupcové hodnosti matice, která vznikla z dané matice pomocí elementárních řádkových úprav? Odpověď je o něco komplikovanější než u řádkových prostorů. Porovnáme-li totiž například matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \tag{13.5}$$

z příkladu 13.6 s jejím normovaným schodovým tvarem

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{13.6}$$

zjistíme, že sloupcové prostory obou matic jsou různé, neboť například $\mathbf{s}_2^{\mathbf{A}} \notin \mathscr{S}(\mathbf{B})$. Přesto platí následující věta.

Věta 13.8. *Nechť matice* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *jsou řádkově ekvivalentní. Pak*

$$\dim \mathscr{S}(\mathbf{A}) = \dim \mathscr{S}(\mathbf{B}).$$

Důkaz. Jestliže matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ typu (m, n) jsou řádkově ekvivalentní, pak jsou také rozšířené matice $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{o} \end{array}\right]$ a $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{o} \end{array}\right]$ řádkově ekvivalentní. Odtud podle věty 4.2

$$x_1 \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} + \ldots + x_n \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}} = \mathbf{o},$$

právě když

$$x_1 \mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} + \ldots + x_n \mathbf{s}_n^{\mathbf{B}} = \mathbf{o}.$$

Zde vidíme, že sloupce $\mathbf{s}_{i_1}^{\mathbf{A}}, \ldots, \mathbf{s}_{i_k}^{\mathbf{A}}$ jsou nezávislé, právě když sloupce $\mathbf{s}_{i_1}^{\mathbf{B}}, \ldots, \mathbf{s}_{i_k}^{\mathbf{B}}$ jsou nezávislé. $\square$

Důkaz nám ukazuje, jak nalézt bázi sloupcového prostoru dané matice $\mathbf{A}$. U matice ve schodovém tvaru je báze zřejmě tvořena sloupci obsahujícími vedoucí prvky řádků a sloupce matice $\mathbf{A}$ s týmiž indexy tvoří pak bázi $\mathscr{S}(\mathbf{A})$.

Příklad 13.9. Báze sloupcového prostoru matice $\mathbf{B}$ z (13.6) je tvořena sloupci

$$\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

První dva sloupce

$$\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

matice $\mathbf{A}$ proto tvoří bázi $\mathscr{S}(\mathbf{A})$, neboť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou řádkově ekvivalentní.

13.5. Hodnost a řešitelnost soustav

Hlavním důsledkem vět 13.5 a 13.8 je to, že řádková hodnost matice se rovná sloupcové hodnosti matice. Věty totiž říkají, že elementární řádkové operace zachovávají obě hodnosti, a pro matice v normovaném schodovém tvaru je rovnost řádkové a sloupcové hodnosti matice zřejmá. Budeme proto mluvit stručně o *hodnosti matice*. Hodnost matice $\mathbf{A}$ budeme značit $h(\mathbf{A})$.

Nyní můžeme zformulovat hlavní výsledek o řešitelnosti lineárních soustav, který se nazývá *Frobeniova věta*.

Věta 13.10. *Nechť* $\mathbf{A}$ *je matice typu* (m, n) *a nechť* $\mathbf{b}$ *je* m*-rozměrný sloupcový vektor. Potom platí následující tvrzení:*

i) *Soustava*
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{13.7}$$
má řešení, právě když
$$h(\mathbf{A}) = h\big(\big[\ \mathbf{A} \,\big|\, \mathbf{b}\ \big]\big)\,. \tag{13.8}$$

ii) *Jestliže platí (13.8) a*
$$h(\mathbf{A}) = n,$$
potom má soustava (13.7) jediné řešení.

iii) *Jestliže platí (13.8) a*
$$h(\mathbf{A}) < n,$$
potom má soustava (13.7) nekonečně mnoho řešení. V řešení lze zvolit některých
$$d = n - h(\mathbf{A})$$
složek libovolně.

Důkaz. Věta je speciálním případem věty 13.4 pro $\mathbf{a}_i = \mathbf{s}_i^{\mathbf{A}}$. Ukázali jsme také, že dimenze sloupcových prostorů můžeme nahradit hodnostmi. □

13.6. Hodnost a regularita

Pojem hodnosti nám umožňuje zformulovat novou charakteristiku regulární matice.

Věta 13.11. *Čtvercová matice* $\mathbf{A}$ *řádu* n *je regulární, právě když*
$$h(\mathbf{A}) = n.$$

Důkaz. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Jestliže $\mathbf{A}$ má hodnost n, potom podle věty 13.10 má každá soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{s}_k^{\mathbf{I}}$ jediné řešení, takže i soustava $\mathbf{AX}{=}\mathbf{I}$ má jediné řešení. Podle věty 8.3 je proto matice $\mathbf{A}$ regulární.

Obráceně, jestliže $\mathbf{A}$ je regulární, potom pro livovolný sloupcový vektor $\mathbf{y}$ a $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$ platí
$$\mathbf{y} = \mathbf{AA}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}) = \mathbf{Ax} = x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} + \ldots + x_n\mathbf{s}_n^{\mathbf{A}},$$
takže $\mathbf{A}$ má sloupcovou hodnost n. □

13.7. Hodnost matice a počítačová aritmetika

Pojem hodnosti předpokládá přesnou aritmetiku, neboť nepatrná změna matice může způsobit změnu její hodnosti. Například matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-99} & 10^{-99} \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-98} & 10^{-99} \end{bmatrix}$$

se liší jen velmi málo, avšak $h(\mathbf{A}) = 1$ a $h(\mathbf{B}) = 2$. Pokud jsou koeficienty matice výsledkem měření, nemá proto často vůbec smysl hovořit o hodnosti matice. Pro takové aplikace, stejně jako pro počítačové řešení soustav, byla proto vypracována teorie založená na jiných pojmech, se kterou se seznámíme později. Poznamenejme ještě, že při zjišťování hodnosti na počítači je nutno vyhnout se zaokrouhlovacím chybám.

Pojmy k zapamatování

Σ

— dimenze vektorového prostoru,

— řádkový a sloupcový prostor matice,

— Frobeniova věta,

— hodnost matice a regularita.

Příklady k procvičení

!

1. Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Nalezněte libovolnou bázi sloupcového prostoru $\mathscr{S}(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A}$ z příkladu 1.

Řešení.

1. Úpravou matice $\mathbf{A}$ na schodový tvar dostaneme matici

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odtud je zřejmé, že $h(\mathbf{A}) = 2$.

2. Ze schodového tvaru matice $\mathbf{A}$ vidíme, že první dva sloupce jsou lineárně nezávislé. Bázi sloupcového prostoru $\mathscr{S}(\mathbf{A})$ tvoří tedy sloupce

$$\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

▲

Kapitola 14

Lineární zobrazení

Průvodce studiem

Řadu fyzikálních zákonů či přibližných experimentálních závislostí lze z matematického hlediska charakterizovat jako přímou úměrnost. Například Ohmův zákon říká, že proud I *je při konstantním odporu* R *přímo úměrný napětí* U*, což můžeme zapsat ve tvaru*

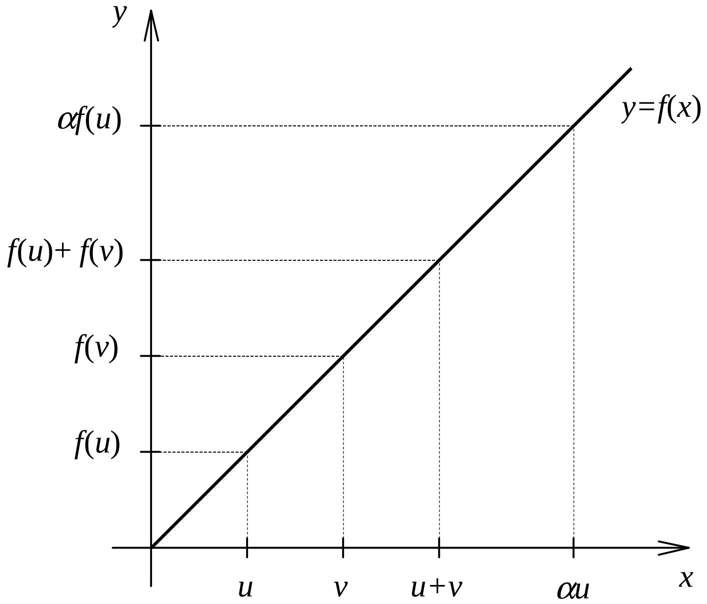
$$I(U) = \frac{1}{R}\,U.$$

Snadno si ověříme, že funkce I *zobrazuje součet argumentů na součet jejich obrazů a skalární násobek argumentu na příslušný násobek jeho obrazu, tak jako funkce* f *na 14.1. To však je vlastnost, která má smysl pro zobrazení jakéhokoliv vektorového prostoru do jiného vektorového prostoru. Zde se seznámíme se základními vlastnostmi těchto speciálních zobrazení, která mají velký význam v matematice, fyzice, inženýrství, společenských vědách i v ekonomii.*

Cíle

V této kapitole se naučíte najít:

- nulový prostor a defekt lineárního zobrazení,
- obor hodnot a hodnost lineárního zobrazení,
- obraz vektoru v lineárním zobrazení.



Obr. 14.1: Lineární zobrazení

14.1. Definice a příklady lineárních zobrazení

Definice 14.1. Nechť $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ jsou vektorové prostory. Zobrazení $A : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ se nazývá *lineární zobrazení (operátor)*, jestliže pro každé dva vektory $u, v \in \mathscr{U}$ a skalár α platí:

i) $A(u+v) = A(u) + A(v)$
ii) $A(\alpha u) = \alpha A(u)$

Lineární zobrazení $\mathscr{U} \to \mathscr{U}$ se často nazývá *lineární transformace*. Množinu všech lineárních zobrazení vektorového prostoru $\mathscr{U}$ do vektorového prostoru $\mathscr{V}$ budeme značit $\mathscr{L}(\mathscr{U}, \mathscr{V})$. Místo $\mathscr{L}(\mathscr{U}, \mathscr{U})$ budeme psát stručně $\mathscr{L}(\mathscr{U})$. V některých aplikacích jsou důležité lineární zobrazení vektorového prostoru $\mathscr{U}$ do $\mathbb{R}$, které se nazývají *lineární formy* nebo *lineární funkcionály*.

Příklad 14.2. Funkce $y = ax$ je lineární transformace $\mathbb{R}$ pro libovolné pevně zvolené $a \in \mathbb{R}$, neboť

$$a(u+v) = au + av \quad \text{a} \quad a(\alpha u) = \alpha a u$$

pro libovolná čísla u, v a α.

Příklad 14.3. Funkce $f : y = 2x + 1$ není lineární transformace $\mathbb{R}$, neboť

$$f(2+2) = f(4) = 9 \neq 10 = f(2) + f(2).$$

Příklad 14.4. Je-li $\mathbf{A}$ libovolná reálná $m \times n$ matice, $\mathbb{R}^{n,1}(\mathbb{R}^{m,1})$ prostor všech sloupcových aritmetických vektorů dimenze $n(m)$, pak je

$$A : \mathbb{R}^{n,1} \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax} \in \mathbb{R}^{m,1}$$

lineární zobrazení, neboť pro libovolné vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ platí podle (7.4)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay} \quad \text{a} \quad \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{Ax}.$$

Příklad 14.5. Zobrazení

$$D : \mathscr{P} \ni p \mapsto p' \in \mathscr{P},$$

které každému mnohočlenu p přiřadí jeho derivaci p', je lineární zobrazení prostoru všech mnohočlenů $\mathscr{P}$ do sebe, neboť pro libovolné reálné mnohočleny p, q, skalár α a reálné x platí

$$\big(p(x)+q(x)\big)' = p'(x)+q'(x) \quad \text{a} \quad \big(\alpha p(x)\big)' = \alpha p'(x).$$

14.2. Elementární vlastnosti lineárního zobrazení

Nechť $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ jsou vektorové prostory. Z definice 14.1 bezprostředně plyne, že pro libovolné lineární zobrazení $A \in \mathscr{L}(\mathscr{U},\mathscr{V})$ a $\mathbf{v} \in \mathscr{U}$ platí

$$\begin{aligned} A(\mathbf{o}) &= A(0\cdot\mathbf{o}) = 0\cdot A(\mathbf{o}) = \mathbf{o}\\ A(-\mathbf{v}) &= A\big((-1)\cdot\mathbf{v}\big) = (-1)\cdot A(\mathbf{v}) = -A(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Jestliže $A \in \mathscr{L}(\mathscr{U},\mathscr{V})$, pak pro libovolné skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ a vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ prostoru $\mathscr{U}$ platí

$$A(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1 A(\mathbf{v}_1) + \ldots + \alpha_n A(\mathbf{v}_n), \tag{14.1}$$

neboť

$$\begin{aligned} A(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n) &= A\big(\alpha_1\mathbf{v}_1 + (\alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n)\big) =\\ &= A(\alpha_1\mathbf{v}_1) + A(\alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n) =\\ &= \alpha_1 A(\mathbf{v}_1) + A(\alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \cdots =\\ &= \alpha_1 A(\mathbf{v}_1) + \ldots + \alpha_n A(\mathbf{v}_n). \end{aligned}$$

Z této rovnosti je vidět důležitou vlastnost lineárních zobrazení definovaných na prostorech konečné dimenze, a to že jsou úplně určeny obrazy vektorů libovolné báze, tedy obrazy konečného počtu vektorů.

14.3. Nulový prostor a obor hodnot

Definice 14.6. Nechť $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ jsou vektorové prostory a nechť $A \in \mathscr{L}(\mathscr{U}, \mathscr{V})$. Pak *nulový prostor (jádro)* $\mathscr{N}(A)$ zobrazení A je množina vzorů $\mathbf{o}$, t.j.

$$\mathscr{N}(A) = \{\mathbf{u} \in \mathscr{U} : A(\mathbf{u}) = \mathbf{o}\}.$$

Jestliže $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathscr{N}(A)$, t.j. $A(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$, $A(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$, a je-li α je libovolný skalár, pak platí

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}) + A(\mathbf{v}) = \mathbf{o} \quad \text{a} \quad A(\alpha\mathbf{u}) = \alpha A(\mathbf{u}) = \mathbf{o},$$

takže $\mathscr{N}(A)$ je podprostorem $\mathscr{U}$.

Obdobnou vlastnost má i obor hodnot $\mathscr{H}(A)$ lineárního zobrazení A. Jestliže $\mathbf{u} = A(\mathbf{x})$, $\mathbf{v} = A(\mathbf{y})$ a α je skalár, pak

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}) = A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \quad \text{a} \quad \alpha\mathbf{u} = \alpha A(\mathbf{x}) = A(\alpha\mathbf{x}),$$

takže $\mathscr{H}(A)$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathscr{V}$.

Pomocí nulového prostoru můžeme popsat strukturu řešení abstraktní operátorové rovnice.

Věta 14.7. *Nechť $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ jsou vektorové prostory, nechť $A \in \mathscr{L}(\mathscr{U}, \mathscr{V})$ a nechť $A(\mathbf{x}_0) = \mathbf{b}$. Potom libovolné řešení $\mathbf{x}$ rovnice*

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

lze zapsat ve tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{n}$, kde $\mathbf{n} \in \mathscr{N}(A)$.

Důkaz. Nechť $A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Potom platí

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x}_0) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{o},$$

takže vektor $\mathbf{n} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ patří do jádra $\mathscr{N}(A)$ a $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{n}$. □

Důsledek 14.8. Lineární zobrazení A je prosté, právě když $\mathscr{N}(A) = \{\mathbf{o}\}$.

Máme-li tedy rozhodnout, zda je dané lineární zobrazení prosté, stačí vyšetřit vzor nulového vektoru. Je to zvláštní vlastnost lineárního zobrazení, neboť u obecného zobrazení by bylo nutno vyšetřit vzory všech vektorů v oboru hodnot.

14.4. Hodnost a defekt zobrazení

Definice 14.9. Nechť $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ jsou vektorové prostory konečné dimenze a nechť $A \in \mathscr{L}(\mathscr{U}, \mathscr{V})$. Pak *hodnost* $h(A)$ *zobrazení* A definujeme jako dimenzi $\mathscr{H}(A)$ a *defekt* $d(A)$ *zobrazení* A definujeme jako dimenzi $\mathscr{N}(A)$.

Věta 14.10. *Nechť $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ jsou vektorové prostory konečné dimenze a nechť $A \in \mathscr{L}(\mathscr{U}, \mathscr{V})$. Potom*

$$h(A) + d(A) = \dim(\mathscr{U}). \tag{14.2}$$

Důkaz. V důkazu se musíme především vypořádat se skutečností, že $\mathscr{N}(A)$ a $\mathscr{H}(A)$ mohou být podprostory různých prostorů.

Nechť $(\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_m)$ je báze $\mathscr{H}(A)$ a nechť $(\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k)$ je báze $\mathscr{N}(A)$. Označme si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ libovolné vzory $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_m$, takže platí

$$A(\mathbf{v}_1) = \mathbf{h}_1, \ldots, A(\mathbf{v}_m) = \mathbf{h}_m.$$

Ukážeme, že vektory $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k)$ tvoří bázi $\mathscr{U}$.

Nechť platí

$$\xi_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \xi_m\mathbf{v}_m + \eta_1\mathbf{n}_1 + \ldots + \eta_k\mathbf{n}_k = \mathbf{o} \tag{14.3}$$

Pak také

$$A(\xi_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \xi_m\mathbf{v}_m + \eta_1\mathbf{n}_1 + \ldots + \eta_k\mathbf{n}_k) = \mathbf{o},$$

takže s využitím linearity A a definice vektorů $\mathbf{v}_i$ a $\mathbf{n}_i$ dostaneme

$$\xi_1\mathbf{h}_1 + \ldots + \xi_m\mathbf{h}_m = \mathbf{o}.$$

Jelikož vektory $(\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_m)$ tvoří podle předpokladu bázi $\mathscr{H}(A)$, jsou nezávislé, takže $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_m = 0$. Po dosazení do (14.3) tedy platí

$$\eta_1\mathbf{n}_1 + \ldots + \eta_k\mathbf{n}_k = \mathbf{o}.$$

Poněvadž jsou vektory $\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k$ také nezávislé, plyne odtud $\eta_1 = \ldots = \eta_k = 0$. Vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k$ jsou tedy nezávislé.

Nechť nyní $\mathbf{x} \in \mathscr{U}$ je libovolný vektor. Pak $A(\mathbf{x}) \in \mathscr{H}(A)$ a existuje $\xi_1, \ldots, \xi_m$ tak, že platí

$$A(\mathbf{x}) = \xi_1\mathbf{h}_1 + \ldots + \xi_m\mathbf{h}_m.$$

Označme si

$$\mathbf{y} = \xi_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \xi_m\mathbf{v}_m,$$

takže $A(y) = A(x)$, a zapišme si $\mathbf{x}$ ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + (\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Jelikož
$$A(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{y}) = \mathbf{o},$$
platí $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in \mathscr{N}(A)$ a tedy
$$\mathbf{x}-\mathbf{y} = \eta_1\mathbf{n}_1 + \ldots + \eta_k\mathbf{n}_k.$$
Vektor $\mathbf{x}$ lze potom vyjádřit ve tvaru
$$\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \xi_m\mathbf{v}_m + \eta_1\mathbf{n}_1 + \ldots + \eta_k\mathbf{n}_k.$$
Vektory $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k)$ tedy tvoří bázi $\mathscr{U}$, takže platí $m + k = \dim(\mathscr{U})$, t.j. $h(A) + d(A) = \dim(\mathscr{U})$. □

Důsledek 14.11. Lineární transformace $A : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ definovaná na vektorovém prostoru konečné dimenze $\mathscr{V}$ je zobrazení na $\mathscr{V}$, právě když A je prosté zobrazení.

14.5. Součet zobrazení a násobení skalárem

Definice 14.12. Nechť $\mathscr{U}$ a $\mathscr{V}$ jsou libovolné vektorové prostory. Pro libovolná zobrazení $A, B \in \mathscr{L}(\mathscr{U}, \mathscr{V})$ a skalár α můžeme definovat *součet zobrazení* $A + B$ předpisem
$$(A+B)(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u}) + B(\mathbf{u})$$
a *součin skaláru a zobrazení* αA předpisem
$$(\alpha A)(\mathbf{u}) = \alpha\big(A(\mathbf{u})\big).$$

Snadno se ověří, že $A + B$ i αA jsou lineární zobrazení. Například
$$\begin{aligned}(A+B)(\alpha\mathbf{u}) &= A(\alpha\mathbf{u}) + B(\alpha\mathbf{u}) = \alpha\big(A(\mathbf{u})\big) + \alpha\big(B(\mathbf{u})\big) = \alpha\big(A(\mathbf{u}) + B(\mathbf{u})\big) = \\ &= \alpha\big((A+B)(\mathbf{u})\big).\end{aligned}$$

Také *nulové zobrazení* $O \in \mathscr{L}(\mathscr{U}, \mathscr{V})$, které každému $u \in \mathscr{U}$ přiřazuje nulový prvek $\mathbf{o}$ prostoru $\mathscr{V}$, je lineární, neboť například
$$O(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{o} = O(\mathbf{u}) + O(\mathbf{v}).$$

Snadno lze ukázat, že $\mathscr{L}(\mathscr{U}, \mathscr{V})$ tvoří vzhledem k právě definovanému sčítání zobrazení a násobení zobrazení skalárem vektorový prostor, jehož nulový prvek je právě definované nulové zobrazení.

14.6. Skládání lineárních zobrazení

Definice 14.13. Nechť $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ a $\mathscr{W}$ jsou vektorové prostory a nechť $A : \mathscr{U} \mapsto \mathscr{V}$ a $B : \mathscr{V} \mapsto \mathscr{W}$ jsou zadaná lineární zobrazení. Pak lze definovat *složené zobrazení (součin zobrazení)* $BA : \mathscr{U} \mapsto \mathscr{W}$ předpisem

$$(BA)(\mathbf{u}) = B\big(A(\mathbf{u})\big).$$

Pořadí, ve kterém se zapisují faktory složeného zobrazení, je důležité a opačné k pořadí, ve kterém se definiční výraz vyhodnocuje. To naznačuje určitou nevhodnost zvyku psát argument do závorky za označení zobrazení.

Složené zobrazení je také lineární, neboť:

$$\begin{aligned}
(BA)(\alpha\mathbf{u}) &= B\big(A(\alpha\mathbf{u})\big) = B\Big(\alpha\big(A(\mathbf{u})\big)\Big) = \alpha\Big(B\big(A(\mathbf{u})\big)\Big) = \alpha\big((BA)(\mathbf{u})\big)\\
(BA)(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= B\big(A(\mathbf{u}+\mathbf{v})\big) = B\big(A(\mathbf{u}) + A(\mathbf{v})\big) = B\big(A(\mathbf{u})\big) + B\big(A(\mathbf{v})\big) =\\
&= (BA)(\mathbf{u}) + (BA)(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

Pro skládání zobrazení lze odvodit obdobné vztahy jako rovnosti (7.15a) – (7.15c) a (7.16) pro násobení matic. Je-li α libovolný skalár a jsou-li A, B, C libovolná lineární zobrazení, pro která mají následující výrazy smysl, potom

$$A(\alpha B) = \alpha(AB) = (\alpha A)B \tag{14.4a}$$
$$A(B + C) = AB + AC \tag{14.4b}$$
$$(A + B)C = AC + BC \tag{14.4c}$$
$$A(BC) = (AB)C \tag{14.4d}$$

14.7. Mnohočleny v lineárních transformacích

Jelikož skládání zobrazení je podle (14.4d) asociativní, můžeme při skládání zobrazení vynechat závorky. Pro libovolnou lineární transformaci $A : \mathscr{U} \to \mathscr{U}$ a kladné celé číslo m tak můžeme definovat *mocninu lineární transformace* předpisem

$$A^m = \underbrace{AA\cdots A}_{m},$$

přičemž platí

$$A^{m+n} = A^m A^n.$$

Poznamenejme, že pro dvě lineární transformace A a B vektorového prostoru $\mathscr{U}$ do sebe nemusí platit $(AB)^m = A^m B^m$.

Snadno se ověří, že identita I definovaná na prostoru $\mathscr{U}$ je lineární a pro libovolné $A \in \mathscr{L}(\mathscr{U})$ splňuje

$$AI = IA = A.$$

Jestliže p je libovolný mnohočlen definovaný vztahem

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

pak můžeme pro každé $A \in \mathscr{L}(\mathscr{U})$ definovat

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_n A^n.$$

Jestliže D je například derivace na prostoru $\mathscr{P}$ všech mnohočlenů a $p(x) = x^2 - 1$, pak

$$p(D) = D^2 - I,$$

takže pro každý mnohočlen $q \in \mathscr{P}$ platí

$$p(D)(q) = q'' - q.$$

Všechna pravidla pro úpravu mnohočlenů jedné proměnné platí i pro mnohočleny jedné lineární transformace, neboť jsou odvozeny ze vztahů, které platí pro čísla i pro lineární transformace. Tak například z rovnosti

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

dostaneme po dosazení D za x rovnost

$$D^2 - I = (D - I)(D + I),$$

kterou si můžeme ověřit rozepsáním

$$\begin{aligned}(D - I)(D + I)(p) &= (D - I)\big((D + I)p\big) = (D - I)(p' + p) = \\ &= (p' + p)' - (p' + p) = p'' - p = (D^2 - I)(p).\end{aligned}$$

14.8. Princip superpozice a inverze lineárních zobrazení

Mnoho technických problémů lze zformulovat jako úlohu najít pro dané lineární zobrazení $A : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ a pro $\mathbf{b} \in \mathscr{V}$ vektor $\mathbf{x} \in \mathscr{U}$ tak, aby platilo

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}. \tag{14.5}$$

Například úlohu najít neznámé potenciály v 3. kapitole můžeme zapsat ve tvaru

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{b},$$

kde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Obdobně lze zapsat podmínky pro průhyb y struny zatížené silou s jednotkovou hustotou, nataženou jednotkovou silou a uchycenou v bodech o souřadnicích 0 a 1 jako úlohu najít mnohočlen y tak, aby platilo:

$$-y''(x) = 1 \quad \forall x \in (0,1) \tag{14.6a}$$
$$y(0) = y(1) = 0 \tag{14.6b}$$

Označíme-li si $\mathscr{P}$ prostor všech reálných mnohočlenů, $\mathscr{P}_0$ jeho podprostor, do kterého patří všechny mnohočleny p, které splňují $p(0) = p(1) = 0$, a položíme-li $b(x) = 1$, pak $b \in \mathscr{P}$ a zobrazení definované předpisem

$$A(p) = -p''$$

je lineární zobrazení patřící do $\mathscr{L}(\mathscr{P}_0, \mathscr{P})$. Úloha najít mnohočlen y tak, aby platilo (14.6a) a (14.6b) je tedy ekvivalentní úloze najít $y \in \mathscr{P}_0$ tak, aby

$$A(y) = b.$$

Předpokládejme nyní, že známe například řešení $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ rovnice (14.5) pro dvě pravé strany $\mathbf{b}_1$ a $\mathbf{b}_2$, tedy že platí

$$A(\mathbf{x}_1) = \mathbf{b}_1 \quad \text{a} \quad A(\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_2,$$

a že navíc platí $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$. Pak můžeme určit řešení $\mathbf{x}$ rovnice (14.5) pouhým sečtením $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$, neboť pro $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ platí

$$A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A(\mathbf{x}_1) + A(\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}.$$

Tomuto jednoduchému důsledku vlastností lineárních zobrazení se říká *princip superpozice*.

V našich příkladech lze najít fyzikální interpretaci principu superpozice pro obě úlohy. Stačí si uvědomit, že například u první úlohy je v pravé straně uchována informace o zdroji proudu a že neznámé jsou potenciály. Princip superpozice vyjadřuje také následující tvrzení.

Věta 14.14. *Nechť $A : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ je vzájemně jednoznačné lineární zobrazení vektorového prostoru $\mathscr{U}$ na vektorový prostor $\mathscr{V}$. Pak existuje A^{-1}, které je rovněž lineární zobrazení.*

Důkaz. Inverzní zobrazení A^{-1} existuje pro každé vzájemně jednoznačné zobrazení. Nechť $\mathbf{u} = A(\mathbf{x})$, $\mathbf{v} = A(\mathbf{y})$, tedy $\mathbf{x} = A^{-1}(\mathbf{u})$ a $\mathbf{y} = A^{-1}(\mathbf{v})$, a nechť α je libovolný skalár. Potom

$$\begin{aligned} A^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= A^{-1}\big(A(\mathbf{x})+A(\mathbf{y})\big) = A^{-1}\big(A(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big) = \mathbf{x}+\mathbf{y} = \\ &= A^{-1}(\mathbf{u}) + A^{-1}(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

$$A^{-1}(\alpha\mathbf{u}) = A^{-1}\big(\alpha A(\mathbf{x})\big) = A^{-1}\big(A(\alpha\mathbf{x})\big) = \alpha\mathbf{x} = \alpha A^{-1}(\mathbf{u}).$$

□

Pojmy k zapamatování

Σ

— nulový prostor (jádro), defekt lineárního zobrazení,

— obor hodnot, hodnost lineárního zobrazení,

— princip superpozice.

Příklady k procvičení

!

1. Nechť $\mathscr{F}$ je vektorový prostor všech reálných funkcí z příkladu 10.3. Ověřte, že zobrazení, které každé funkci $f \in \mathscr{F}$ přiřazuje $f(0) \in \mathbb{R}$, je lineární funkcionál.

2. Nechť $\mathscr{V}$ je vektorový prostor dimenze n. Dokažte s pomocí věty 14.10, že defekt jakéhokoliv lineárního funkcionálu definovaného na $\mathscr{V}$ je roven $n - 1$.

3. Ověřte rovnosti (14.4a) – (14.4d).

Kapitola 15

Lineární zobrazení a matice

Průvodce studiem

V této kapitole se budeme věnovat lineárním zobrazením prostorů aritmetických vektorů, která jsou definována pomocí součinu matice a vektoru tak jako v příkladu 14.4. Ukážeme si, že tak lze představit nejen každé lineární zobrazení prostoru aritmetických vektorů, ale s pomocí souřadnic dokonce každé lineární zobrazení vektorových prostorů konečné dimenze. Nové pojmy také využijeme k alternativní prezentaci teorie řešitelnosti soustav lineárních rovnic.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- sestavit matici lineárního zobrazení vzhledem k zadaným bázím,
- sestavit matici přechodu od zadané báze k jiné bázi,
- najít souřadnice obrazu vektoru pomocí matice lineárního zobrazení.

15.1. Maticový zápis lineárních zobrazení $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$

Jak lze popsat všechna lineární zobrazení $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$? Nechť $\mathscr{S} = (\mathbf{s^I}_1, \dots, \mathbf{s^I}_m)$ je standardní báze prostoru $\mathbb{R}^{m,1}$ všech sloupcových aritmetických vektorů dimenze m, která je tvořena sloupci jednotkové matice $\mathbf{I}_m$. Nechť $A : \mathbb{R}^{m,1} \to \mathbb{R}^{n,1}$ je libovolné lineární zobrazení a nechť obrazy sloupcových vektorů $\mathbf{s^I}_1, \dots, \mathbf{s^I}_m$ jsou sloupcové vektory

$$A(\mathbf{s}^\mathbf{I}_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \dots, A(\mathbf{s}^\mathbf{I}_m) = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Jelikož libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m,1}$ lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{s^I}_1 + \dots + x_m\mathbf{s^I}_m,$$

lze $A(\mathbf{x})$ zapsat pomocí

$$A(\mathbf{x}) = A(x_1\mathbf{s^I}_1 + \ldots + x_m\mathbf{s^I}_m) = x_1 A(\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}) + \ldots + x_m A(\mathbf{s}_m^{\mathbf{I}}) = \mathbf{Ax},$$

kde

$$\mathbf{A} = \left[A(\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}), \ldots, A(\mathbf{s}_m^{\mathbf{I}})\right] = [a_{ij}]\,.$$

Platí tedy následující věta.

Věta 15.1. *Nechť $A : \mathbb{R}^{m,1} \mapsto \mathbb{R}^{n,1}$ je libovolné lineární zobrazení. Pak existuje matice $\mathbf{A}$ typu (n, m) tak, že pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m,1}$ platí*

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}.$$

Lineární zobrazení

$$A : \mathbb{R}^{m,1} \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax} \in \mathbb{R}^{n,1}$$

se často ztotožňuje s maticí $\mathbf{A}$ a o matici $\mathbf{A}$ se mluví jako o lineárním zobrazení. V tomto smyslu budeme i my používat pojmy *obor hodnot matice* $\mathbf{A}$, *nulový prostor matice* $\mathbf{A}$, nebo *defekt matice* $\mathbf{A}$. Pojmy, které jsme si doposud zavedli jsou v souladu s touto konvencí. Například obor hodnot $\mathscr{H}(\mathbf{A})$ každé matice $\mathbf{A}$ je totožný s jejím sloupcovým prostorem $\mathscr{S}(\mathbf{A})$, takže pro hodnosti matice a zobrazení platí

$$h(\mathbf{A}) = h(A).$$

15.2. Určení báze nulového prostoru matice

Bázi nulového prostoru matice tvoří jakákoliv maximální množina nezávislých řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$, kterou najdeme tak, že matici $\mathbf{A}$ převedeme na schodový tvar a za neznámé, které nejsou ve sloupcích s vedoucími prvky, budeme postupně dosazovat například řádky jednotkové matice. Získaná řešení pak zapíšeme do sloupců. Postup je v podstatě totožný s postupem řešení soustav rovnic s nekonečnou množinou řešení, který byl popsán v článku 4.4, avšak s pomocí nových pojmů můžeme lépe pochopit strukturu řešení.

Příklad 15.2. Určete bázi nulového prostoru matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Řešení. Nejprve upravíme matici $\mathbf{A}$ pomocí řádkových úprav na schodový tvar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1 \\ \mathrm{r}_3 - 2\mathrm{r}_1 \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{r}_3 - 2\mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odtud $h(\mathbf{A}) = 2$ (počet nenulových řádků) a $d(\mathbf{A}) = 4 - 2 = 2$. Bázi $\mathscr{N}(A)$ tedy tvoří jakékoliv dva nezávislé vektory, jejichž složky řeší soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & & - & x_3 & & & = & 0. \end{array} \tag{15.1}$$

Vypočteme je tak, že za x_2 a x_4 dosadíme postupně například složky $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ a vypočteme $x_1 = -1, x_3 = 0$ a $x_1 = -3, x_3 = 0$. Bázi nulového prostoru tedy tvoří vektory

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

▲

Jestliže lze matici $\mathbf{A}$ typu $(m,n), m < n$ rozdělit na bloky tak, že

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

a $\mathbf{B}$ je regulární, lze najít vzorec pro matici $\mathbf{N}$ typu $(n, n-m)$, jejíž sloupce tvoří bázi $\mathscr{N}(A)$. V souladu s výše uvedeným výkladem budeme hledat $\mathbf{N}$ ve tvaru:

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c c} n-m & \\ \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} m \\ n-m \end{array} \end{array}$$

Po rozepsání levé strany rovnice

$$\mathbf{A}\mathbf{N} = \mathbf{O}$$

s využitím blokové struktury a po vynásobení zleva maticí $\mathbf{B}^{-1}$ dostaneme

$$\mathbf{B}^{-1} \left[\ \mathbf{B} \mid \mathbf{C} \ \right] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{O},$$

odkud

$$\mathbf{X} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{O}.$$

Odtud $\mathbf{X} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}$ a

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

15.3. Matice jako lineární zobrazení a soustavy rovnic

Díváme-li se na matici $\mathbf{A}$ jako na lineární zobrazení $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$, můžeme využít dosavadních výsledků o lineárních zobrazeních k alternativnímu výkladu teorie řešitelnosti lineárních soustav z článku 13.5. Například přeložíme-li tvrzení i) do termínů zobrazení, zjistíme, že vyjadřuje zřejmou skutečnost, že soustava lineárních rovnic má řešení, právě když pravá strana patří do oboru hodnot matice soustavy. Tvrzení ii) zase vyplývá z důsledku 14.8 , podle něhož je řešení jediné, jestliže $\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{o}\}$, tedy defekt $d(A) = 0$, což je podle (14.2) ekvivalentní $h(A) = n$, kde n je počet neznámých. Tvrzení iii) lze dokonce prohloubit.

Věta 15.3. *Nechť* $\mathbf{A}$ *je matice typu* (m, n) *pro kterou platí* $d(\mathbf{A}) > 0$*, nechť* $\mathbf{b}$ *je* m*-rozměrný sloupcový vektor, nechť* $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ *a nechť* $(\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_d)$ *je báze* $\mathcal{N}(\mathbf{A})$*. Potom libovolné řešení soustavy* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *může být zapsáno ve tvaru*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \alpha_1 \mathbf{n}_1 + \ldots + \alpha_d \mathbf{n}_d. \tag{15.2}$$

Důkaz. Podle věty 14.7 lze libovolné řešení soustavy (14.5) zapsat ve tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{n}$, kde $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(A)$. Jelikož vektory $\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_d$ tvoří bázi $\mathcal{N}(A)$, lze $\mathbf{n}$ zapsat ve tvaru (15.2). □

Příklad 15.4. Najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & = & 2 \end{array} \tag{15.3}$$

ve tvaru (15.2).

Řešení. Rozšířenou matici soustavy nejprve upravíme na schodový tvar

$$\left[\,\mathbf{A}\,\middle|\,\mathbf{b}\,\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1 \\ \mathrm{r}_3 - 2\mathrm{r}_1 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right] \mathrm{r}_3 - 2\mathrm{r}_2 \mapsto$$

$$\mapsto \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Z něho dostaneme částečné řešení $\mathbf{x}_0$ soustavy (15.3) řešením soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & & - & x_3 & & & = & 1 \end{array} \tag{15.4}$$

tak, že položíme například $x_2 = 0$ a $x_4 = 0$. Dostaneme $x_1 = 2, x_3 = -1$. Jelikož matice soustavy je stejná jako matice $\mathbf{A}$ v příkladu 15.2, můžeme pomocí řešení tohoto příkladu napsat libovolné řešení soustavy (15.3) pomocí parametrů α_1, α_2 ve tvaru

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

▲

15.4. Definice matice lineárního zobrazení

V článku 15.1 jsme si ukázali, že libovolné lineární zobrazení $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$ lze popsat pomocí vhodné matice. Nyní si ukážeme, že pomocí matic můžeme popsat libovolné zobrazení prostorů konečné dimenze. Použijeme k tomu báze definičního oboru a oboru hodnot. Pro stručnost budeme v celém článku předpokládat, že $\mathscr{U}$ a $\mathscr{V}$ jsou dva vektorové prostory konečné dimenze s bázemi $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$ a $\mathscr{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$.

Definice 15.5. Nechť $A : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ je lineární zobrazení. Pak můžeme vektory $A(\mathbf{e}_1), \ldots, A(\mathbf{e}_m)$ vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ ve tvaru:

$$\begin{array}{ccccc} A(\mathbf{e}_1) & = & a_{11}\mathbf{f}_1 & + \cdots + & a_{n1}\mathbf{f}_n \\ \vdots & & \vdots & \ldots & \vdots \\ A(\mathbf{e}_m) & = & a_{1m}\mathbf{f}_1 & + \cdots + & a_{nm}\mathbf{f}_n \end{array}$$

Matici

$$[A]_{\mathscr{E},\mathscr{F}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

nazýváme *maticí lineárního zobrazení A vzhledem k bázím* $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$. Jestliže $\mathscr{U} = \mathscr{V}$ a $\mathscr{E} = \mathscr{F}$, pak budeme mluvit o *matici lineární transformace vzhledem k bázi* $\mathscr{E}$ a místo $[A]_{\mathscr{E},\mathscr{E}}$ budeme psát stručně $[A]_{\mathscr{E}}$.

Indexy prvků a_{ij} jsou zvoleny tak, aby pro každé lineární zobrazení $A : \mathscr{U} \mapsto \mathscr{V}$ platilo

$$[A]_{\mathscr{E},\mathscr{F}} = \big[[A(\mathbf{e}_1)]_{\mathscr{F}}, \ldots, [A(\mathbf{e}_m)]_{\mathscr{F}}\big], \tag{15.5}$$

obdobně jako v článku 15.1, kde byly $\mathscr{E}$ i $\mathscr{F}$ standardní báze. Z této rovnosti a z vlastností souřadnic (12.2) a (12.3) plyne pro libovolný skalár α, případně pro libovolné další lineární zobrazení $B : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$, že

$$[\alpha A]_{\mathscr{E},\mathscr{F}} = \alpha\, [A]_{\mathscr{E},\mathscr{F}}\,, \tag{15.6}$$

$$[A + B]_{\mathscr{E},\mathscr{F}} = [A]_{\mathscr{E},\mathscr{F}} + [B]_{\mathscr{E},\mathscr{F}}\,. \tag{15.7}$$

Příklad 15.6. Nechť $\mathscr{P}_2$ je vektorový prostor všech mnohočlenů nejvýše druhého stupně s bází $\mathscr{E} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$, kde $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$ jsou mnohočleny $\mathrm{e}_1(x) = 1, \mathrm{e}_2(x) = x$ a $\mathrm{e}_3(x) = x^2$. Najděte matici derivace

$$D : \mathscr{P}_3 \ni p \mapsto p' \in \mathscr{P}_3.$$

Řešení. Nejdříve najdeme souřadnice $D(\mathrm{e}_1), D(\mathrm{e}_2)$ a $D(\mathrm{e}_3)$ v bázi $\mathscr{E}$. Jelikož $D(\mathrm{e}_1)(x) = 0$, $D(\mathrm{e}_2)(x) = 1$ a $D(\mathrm{e}_3)(x) = 2x$, můžeme napsat přímo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & = & 0 \cdot 1 & + & 0 \cdot x & + & 0 \cdot x^2 \\ 1 & = & 1 \cdot 1 & + & 0 \cdot x & + & 0 \cdot x^2 \\ 2x & = & 0 \cdot 1 & + & 2 \cdot x & + & 0 \cdot x^2 \end{array}$$

Souřadnice $D(\mathrm{e}_1)$, $D(\mathrm{e}_2)$ a $D(\mathrm{e}_3)$ tvoří zřejmě koeficienty na řádcích, které zapíšeme do sloupců a dostaneme

$$[D]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

▲

15.5. Souřadnice obrazu vektoru

Předpokládejme nyní, že $\mathscr{U}$ a $\mathscr{V}$ jsou dva vektorové prostory konečné dimenze s bázemi $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$ a $\mathscr{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$, že $A : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ je lineární zobrazení, $\mathbf{x} \in \mathscr{U}$ a

$$[\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Potom s pomocí definice lineárního zobrazení, vztahů (12.2), (12.3) a definice součinu matice a vektoru odvodíme postupně

$$\begin{aligned}
[A(\mathbf{x})]_{\mathscr{F}} &= [A(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_m\mathbf{e}_m)]_{\mathscr{F}} = [x_1 A(\mathbf{e}_1) + \ldots + x_m A(\mathbf{e}_m)]_{\mathscr{F}} = \\
&= x_1 [A(\mathbf{e}_1)]_{\mathscr{F}} + \ldots + x_m [A(\mathbf{e}_m)]_{\mathscr{F}} = \big[[A(\mathbf{e}_1)]_{\mathscr{F}}, \ldots, [A(\mathbf{e}_m)]_{\mathscr{F}}\big] [\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} = \\
&= [A]_{\mathscr{E},\mathscr{F}} [\mathbf{x}]_{\mathscr{E}},
\end{aligned}$$

tedy

$$[A(\mathbf{x})]_{\mathscr{F}} = [A]_{\mathscr{E},\mathscr{F}} [\mathbf{x}]_{\mathscr{E}}. \tag{15.8}$$

Poznámka 15.7. Je-li $\mathscr{U} = \mathscr{V}$ a $\mathscr{E} = \mathscr{F}$, má (15.8) tvar

$$[A(\mathbf{x})]_{\mathscr{E}} = [A]_{\mathscr{E}} [\mathbf{x}]_{\mathscr{E}}. \tag{15.9}$$

Příklad 15.8. S využitím řešení příkladu 15.6 vypočtěte souřadnice derivace libovolného mnohočlenu p nejvýše druhého stupně pomocí souřadnic p v bázi $\mathscr{E} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$, $\mathrm{e}_1(x) = 1, \mathrm{e}_2(x) = x, \mathrm{e}_3(x) = x^2$.

Řešení. Mnohočlen $p(x) = ax^2 + bx + c$ má v bázi $\mathscr{E}$ souřadnice

$$[p]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix}.$$

Jelikož jsme si v příkladu 15.6 ukázali, že derivace D má v bázi $\mathscr{E}$ matici

$$[D]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

platí

$$[p']_{\mathscr{E}} = [Dp]_{\mathscr{E}} = [D]_{\mathscr{E}}\,[p]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

▲

15.6. Matice složeného zobrazení

Nechť $\mathscr{U}$ je vektorový prostor konečné dimenze s bází $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ a nechť $A : \mathscr{U} \to \mathscr{U}$ a $B : \mathscr{U} \to \mathscr{U}$ jsou lineární transformace. Pak s použitím vztahu (15.8) a definice součinu matic (7.11) odvodíme

$$\begin{aligned} [AB]_{\mathscr{E}} &= \left[[(AB)(\mathbf{e}_1)]_{\mathscr{E}}, \ldots, [(AB)(\mathbf{e}_n)]_{\mathscr{E}}\right] = \Big[\big[A\big(B(\mathbf{e}_1)\big)\big]_{\mathscr{E}}, \ldots, \big[A\big(B(\mathbf{e}_n)\big)\big]_{\mathscr{E}}\Big] = \\ &= \left[[A]_{\mathscr{E}}\,[B(\mathbf{e}_1)]_{\mathscr{E}}, \ldots, [A]_{\mathscr{E}}\,[B(\mathbf{e}_n)]_{\mathscr{E}}\right] = [A]_{\mathscr{E}} \left[[B(\mathbf{e}_1)]_{\mathscr{E}}, \ldots, [B(\mathbf{e}_n)]_{\mathscr{E}}\right] = \\ &= [A]_{\mathscr{E}} \left[[B]_{\mathscr{E}}\,[\mathbf{e}_1]_{\mathscr{E}}, \ldots, [B]_{\mathscr{E}}\,[\mathbf{e}_n]_{\mathscr{E}}\right] = [A]_{\mathscr{E}}\,[B]_{\mathscr{E}} \left[\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}, \ldots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{I}}\right] = \\ &= [A]_{\mathscr{E}}\,[B]_{\mathscr{E}}\,\mathbf{I} = [A]_{\mathscr{E}}\,[B]_{\mathscr{E}}\,. \end{aligned}$$

Platí tedy

$$[AB]_{\mathscr{E}} = [A]_{\mathscr{E}}\,[B]_{\mathscr{E}}\,. \tag{15.10}$$

Při odvození jsme použili toho, že souřadnice jednotlivých vektorů báze v téže bázi jsou prvky příslušného sloupce jednotkové matice.

Příklad 15.9. S využitím řešení příkladu 15.6 vypočtěte matici druhé derivace $D^2 = DD$ na prostoru P_3 všech mnohočlenů nejvýše druhého stupně v bázi $\mathscr{E} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$, $\mathrm{e}_1(x) = 1$, $\mathrm{e}_2(x) = x$, $\mathrm{e}_3(x) = x^2$.

Řešení. V příkladu 15.6 jsme si ukázali, že derivace D má v bázi $\mathscr{E} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ matici

$$[D]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podle (15.10) tedy

$$\begin{aligned} \left[D^2\right]_{\mathscr{E}} &= [DD]_{\mathscr{E}} = [D]_{\mathscr{E}}\,[D]_{\mathscr{E}} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

▲

15.7. Změna báze

Nyní se budeme zabývat otázkou, jak se změní souřadnice vektoru a matice lineárního zobrazení při změně báze.

Nechť $\mathscr{U}$ je vektorový prostor konečné dimenze a nechť $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ a $\mathscr{F} = (\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n)$ jsou dvě báze $\mathscr{U}$. Nechť $A : \mathscr{U} \to \mathscr{U}$ je libovolné lineární zobrazení a nechť $C : \mathscr{U} \to \mathscr{U}$ je lineární zobrazení, které každému vektoru $\mathbf{e}_i$ báze $\mathscr{E}$ přiřazuje vektor $C(\mathbf{e}_i) = \mathbf{f}_i$. Zobrazení C tedy zobrazuje bázi $\mathscr{E}$ na bázi $\mathscr{F}$, takže podle důsledku 14.11 je C prosté a existuje C^{-1}.

Nejprve si ukážeme, jak se změní souřadnice x_i libovolného vektoru $\mathbf{x}$ při přechodu od báze $\mathscr{E}$ k bázi $\mathscr{F}$ a obráceně. K tomu si stačí všimnout, že z

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$$

plyne

$$C(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{f}_1 + \ldots + x_n\mathbf{f}_n,$$

takže

$$[C(\mathbf{x})]_{\mathscr{F}} = [\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} \ . \tag{15.11}$$

Pomocí (15.9) odtud dostaneme

$$[C]_{\mathscr{F}}\,[\mathbf{x}]_{\mathscr{F}} = [\mathbf{x}]_{\mathscr{E}}\,,$$

kde $[C]_{\mathscr{F}}$ je matice lineárního zobrazení C vzhledem k bázi $\mathscr{F}$. U této matice se na chvíli zastavíme. V souladu s (15.5) a (15.11) platí

$$[C]_{\mathscr{F}} = \left[[C(\mathbf{f}_1)]_{\mathscr{F}}, \ldots, [C(\mathbf{f}_n)]_{\mathscr{F}}\right] = \left[[\mathbf{f}_1]_{\mathscr{E}}, \ldots, [\mathbf{f}_n]_{\mathscr{E}}\right] = \left[[C(\mathbf{e}_1)]_{\mathscr{E}}, \ldots, [C(\mathbf{e}_n)]_{\mathscr{E}}\right] = [C]_{\mathscr{E}}.$$

Matice lineárního zobrazení C je tedy vzhledem k oběma bázím stejná, přičemž *její sloupce tvoří souřadnicové vektory vektorů báze* $\mathscr{F}$ *vzhledem k bázi* $\mathscr{E}$. Tato matice je v literatuře označována jako *matice přechodu* od uspořádané báze $\mathscr{E}$ k uspořádané bázi $\mathscr{F}$. Označíme-li ji pro jednoduchost $\mathbf{P}$, můžeme vztah mezi souřadnicovými vektory vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k původní a nové bázi vyjádřit vzorci

$$[\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} = \mathbf{P}[\mathbf{x}]_{\mathscr{F}}, \qquad [\mathbf{x}]_{\mathscr{F}} = \mathbf{P}^{-1}[\mathbf{x}]_{\mathscr{E}}. \tag{15.12}$$

Nyní už můžeme hledat vztah mezi $[A]_{\mathscr{E}}$ a $[A]_{\mathscr{F}}$. Platí

$$\begin{aligned}
[A]_{\mathscr{F}} &= \left[[A(\mathbf{f}_1)]_{\mathscr{F}}, \ldots, [A(\mathbf{f}_n)]_{\mathscr{F}}\right] = \left[\mathbf{P}^{-1}[A(\mathbf{f}_1)]_{\mathscr{E}}, \ldots, \mathbf{P}^{-1}[A(\mathbf{f}_n)]_{\mathscr{E}}\right] = \\
&= \mathbf{P}^{-1}\left[[A(\mathbf{f}_1)]_{\mathscr{E}}, \ldots, [A(\mathbf{f}_n)]_{\mathscr{E}}\right] = \mathbf{P}^{-1}\left[[A]_{\mathscr{E}}[\mathbf{f}_1]_{\mathscr{E}}, \ldots, [A]_{\mathscr{E}}[\mathbf{f}_n]_{\mathscr{E}}\right] = \\
&= \mathbf{P}^{-1}[A]_{\mathscr{E}}\left[\mathbf{P}[\mathbf{f}_1]_{\mathscr{F}}, \ldots, \mathbf{P}[\mathbf{f}_n]_{\mathscr{F}}\right] = \mathbf{P}^{-1}[A]_{\mathscr{E}}\mathbf{P}\left[[\mathbf{f}_1]_{\mathscr{F}}, \ldots, [\mathbf{f}_n]_{\mathscr{F}}\right] = \\
&= \mathbf{P}^{-1}[A]_{\mathscr{E}}\mathbf{P}\left[\mathbf{s^I}_1, \ldots, \mathbf{s^I}_n\right] = \mathbf{P}^{-1}[A]_{\mathscr{E}}\mathbf{P}\,\mathbf{I} = \mathbf{P}^{-1}[A]_{\mathscr{E}}\mathbf{P}.
\end{aligned}$$

Platí tedy

$$[A]_{\mathscr{F}} = \mathbf{P}^{-1}[A]_{\mathscr{E}}\mathbf{P}. \tag{15.13}$$

Místo matice $\mathbf{P}$ se někdy pracuje s maticí $\mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1}$ zpětného přechodu od nové báze $\mathscr{F}$ k původní bázi $\mathscr{E}$. Změna matice lineárního zobrazení při změně báze je pak vyjádřena vzorcem

$$[A]_{\mathscr{F}} = \mathbf{T}[A]_{\mathscr{E}}\mathbf{T}^{-1} \ . \tag{15.14}$$

Povšimněme si, že názvy matice přechodu a matice zpětného přechodu se vztahují k popisu změny báze, *nikoliv k popisu změny souřadnic*.

15.8. Podobnost matic

Výše uvedené rovnosti (15.13), (15.14) jsou motivací pro nový pojem.

Definice 15.10. Čtvercové matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ stejného řádu jsou *podobné*, jestliže existuje regulární matice $\mathbf{T}$ tak, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}.$$

Úvahy článku 15.7 můžeme shrnout pomocí nového pojmu do stručné věty.

Věta 15.11. *Matice dané lineární transformace v různých bázích jsou podobné.*

Dá se dokázat i tvrzení, že jsou-li matice podobné, pak jsou maticemi nějaké lineární transformace v různých bázích. Jelikož podstatné charakteristiky lineárních transformací (například hodnost nebo defekt) nezávisí na bázi prostoru, dá se očekávat, že podobné matice budou mít podstatné charakteristiky shodné. Připomeňme, že o vektoru se ze souřadnic nedovíme obecně více než to, je-li nulový nebo nenulový.

Snadno lze dokázat, že každá matice je podobná sama sobě, že je-li $\mathbf{A}$ podobná $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}$ podobná $\mathbf{C}$, pak $\mathbf{A}$ je také podobná $\mathbf{C}$, a konečně je-li $\mathbf{A}$ podobná $\mathbf{B}$, pak je i $\mathbf{B}$ podobná $\mathbf{A}$. Například poslední tvrzení vyplývá z ekvivalence rovností $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}$ a $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$.

Σ Pojmy k zapamatování

— matice lineárního zobrazení,

— matice přechodu,

— podobnost matic.

Kapitola 16

Bilineární formy

Průvodce studiem

Ve 3 kapitole jsme si sestavili soustavu rovnic (3.8) pro neznámé potenciály x_1, x_2 obvodu z 3.1. Soustava lineárních rovnic však není jedinou možností, jak popsat elektrický obvod nebo jiný lineární problém. Ukazuje se, že někdy je výhodné přejít k jiné formulaci, která v našem případě spočívá v sečtení obou rovnic soustavy vynásobených postupně „virtuálními" (myšlenými) potenciály y_1, y_2 tak, že dostaneme

$$-2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_2y_2 = -10y_2. \tag{16.1}$$

Úloha najít řešení x_1, x_2 soustavy (3.8) je pak ekvivalentní úloze najít x_1, x_2 tak, aby rovnost (16.1) platila pro všechna y_1, y_2.

Výraz na levé straně rovnice (16.1) můžeme považovat za funkci dvou proměnných aritmetických vektorů $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ a $\mathbf{y} = [y_1, y_2]$, která je při jednom zafixovaném argumentu lineární ve druhém argumentu. To však je vlastnost, která má smysl pro každou funkci dvou argumentů z vektorového prostoru. Ukazuje se, že takové funkce jsou nepostradatelným nástrojem pro vyjádření fyzikálních zákonů ve formě vhodné pro numerické řešení technických problémů pomocí takzvaných variačních metod. V tomto textu je využijeme ke studiu geometrie vektorového prostoru.

Cíle

V průběhu této kapitoly se naučíte řešit tyto úlohy:

- sestavit matici bilineární formy vzhledem k zadané bázi,
- určit symetrickou a antisymetrickou část bilineární formy,
- rozhodnout, je–li zadané zobrazení bilineární formou.

16.1. Definice a příklady

Definice 16.1. Nechť $\mathscr{V}$ je reálný vektorový prostor. Zobrazení $B : \mathscr{V} \times \mathscr{V} \mapsto \mathbb{R}$ se nazývá *bilineární forma*, jestliže pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathscr{V}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ B(\alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \alpha B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ B(\mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{w}) &= B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ B(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}) &= \alpha B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Bilineární funkce je tedy při zvolené hodnotě jedné proměnné lineární funkcí druhé proměnné. Můžeme ji považovat za zobecnění funkce $z = axy$ dvou proměnných x a y na vektorové prostory.

Příklad 16.2. Na prostoru $\mathscr{V} = \mathbb{R}^3$ sloupcových vektorů dimenze 3 si definujeme formu B předpisem, který každé dvojici vektorů $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^\top$ a $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^\top$ přiřazuje

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3. \tag{16.2}$$

Interpretujeme-li $\mathbf{x}$ jako sílu a $\mathbf{y}$ jako dráhu, pak $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je práce konaná silou $\mathbf{x}$ po dráze $\mathbf{y}$. Snadno se ověří, že B je bilineární forma.

Příklad 16.3. Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je daná reálná čtvercová matice řádu 2. Pak zobrazení, které každé dvojici sloupcových vektorů $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\top$ a $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^\top$ dimenze 2 přiřazuje

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y} = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2, \tag{16.3}$$

je bilineární forma.

Příklad 16.4. Nechť $\mathscr{F}$ je vektorový prostor všech reálných funkcí. Pak předpis, který každé dvojici funkcí $f \in \mathscr{F}$ a $g \in \mathscr{F}$ přiřazuje

$$B(f, g) = f(1)g(1) + f(2)g(2), \tag{16.4}$$

definuje bilineární formu.

16.2. Klasifikace bilineárních forem

Nechť $\mathscr{V}$ je libovolný vektorový prostor. Bilineární forma B se nazývá *symetrická*, jestliže pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathscr{V}$ platí

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -B(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \tag{16.5}$$

a *antisymetrická*, jestliže

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -B(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \tag{16.6}$$

Antisymetrické formy lze ekvivalentně charakterizovat též rovností

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \quad 0 \tag{16.7}$$

pro libovolné $\mathbf{u} \in \mathscr{V}$. Skutečně, platí-li (16.7), pak

$$B(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0,$$

odkud dostaneme (16.6). Obráceně z (16.6) plyne

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -B(\mathbf{u}, \mathbf{u}),$$

tedy platí (16.7).

Bilineární formy (16.2) a (16.4) jsou zřejmě symetrické, zatímco forma (16.3) je symetrická, právě když $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\top}$. Bilineární forma (16.3) bude antisymetrická, právě když $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\top}$, což splňuje například matice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bilineární forma (16.3) s touto maticí splňuje

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = -(y_1 x_2 - y_2 x_1) = -B(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Každou bilineární formu můžeme vyjádřit ve tvaru součtu symetrické a antisymetrické formy, neboť

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\big(B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{u})\big) + \frac{1}{2}\big(B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - B(\mathbf{v}, \mathbf{u})\big).$$

Bilineární formy

$$B^{\mathrm{S}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\big(B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{u})\big) \quad \text{a} \quad B^{\mathrm{A}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\big(B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - B(\mathbf{v}, \mathbf{u})\big) \tag{16.8}$$

splňují

$$B^{\mathrm{S}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B^{\mathrm{S}}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad \text{a} \quad B^{\mathrm{A}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -B^{\mathrm{A}}(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

Formy B^{S} a B^{A} se nazývají po řadě *symetrická část* a *antisymetrická část* bilineární formy B.

16.3. Matice bilineární formy

Nechť $\mathscr{V}$ je vektorový prostor s bází $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ a nechť B je bilineární forma na $\mathscr{V}$. Nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{V}$ jsou dva vektory, které lze zapsat pomocí souřadnic ve tvaru

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_v\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \dots + y_n\mathbf{e}_n.$$

Pak

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= B(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n, \mathbf{y}) = x_1 B(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) + \dots + x_n B(\mathbf{e}_n, \mathbf{y}) = \\
&= [x_1, \dots, x_n] \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ B(\mathbf{e}_n, \mathbf{y}) \end{bmatrix} = [x_1, \dots, x_n] \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, y_1\mathbf{e}_1 + \dots + y_n\mathbf{e}_n) \\ \vdots \\ B(\mathbf{e}_n, y_1\mathbf{e}_1 + \dots + y_n\mathbf{e}_n) \end{bmatrix} = \\
&= [x_1, \dots, x_n] \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)y_1 + \dots + B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n)y_n \\ \vdots \\ B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1)y_1 + \dots + B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n)y_n \end{bmatrix} = \\
&= [x_1, \dots, x_n] \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \dots B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \vdots \\ B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) \dots B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

což můžeme pomocí označení $[B]_{\mathscr{E}} = [B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)]$ zapsat stručně ve tvaru

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_{\mathscr{E}}^{\top} [B]_{\mathscr{E}} [\mathbf{y}]_{\mathscr{E}}. \tag{16.9}$$

Matici $[B]_{\mathscr{E}}$ nazýváme *maticí bilineární formy* B v bázi $\mathscr{E}$. Její prvky jsou určeny hodnotami formy na vektorech báze.

Příklad 16.5. Najděte matici bilineární formy (16.4) definované na prostoru P_2 všech mnohočlenů nejvýše druhého stupně v bázi $\mathscr{E} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$, kde $\mathrm{e}_1(x) = 1, \mathrm{e}_2(x) = x, \mathrm{e}_3(x) = x^2$. Výsledek využijte k vyčíslení $B(p, q)$ pro $p(x) = 1 - x$ a $q(x) = x^2 - x$.

Řešení. Podle vztahu (16.4) vypočteme postupně:

$$\begin{aligned}
b_{11} = B(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_1) &= \mathrm{e}_1(1)\mathrm{e}_1(1) + \mathrm{e}_1(2)\mathrm{e}_1(2) &&= 1\cdot 1 + 1\cdot 1 &&= 2 \\
b_{12} = B(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2) &= \mathrm{e}_1(1)\mathrm{e}_2(1) + \mathrm{e}_1(2)\mathrm{e}_2(2) &&= 1\cdot 1 + 1\cdot 2 &&= 3 \\
b_{13} = B(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_3) &= \mathrm{e}_1(1)\mathrm{e}_3(1) + \mathrm{e}_1(2)\mathrm{e}_3(2) &&= 1\cdot 1 + 1\cdot 4 &&= 5 \\
b_{22} = B(\mathrm{e}_2, \mathrm{e}_2) &= \mathrm{e}_2(1)\mathrm{e}_2(1) + \mathrm{e}_2(2)\mathrm{e}_2(2) &&= 1\cdot 1 + 2\cdot 2 &&= 5 \\
b_{23} = B(\mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3) &= \mathrm{e}_2(1)\mathrm{e}_3(1) + \mathrm{e}_2(2)\mathrm{e}_3(2) &&= 1\cdot 1 + 2\cdot 4 &&= 9 \\
b_{33} = B(\mathrm{e}_3, \mathrm{e}_3) &= \mathrm{e}_3(1)\mathrm{e}_3(1) + \mathrm{e}_3(2)\mathrm{e}_3(2) &&= 1\cdot 1 + 4\cdot 4 &&= 17
\end{aligned}$$

K výpočtu ostatních prvků můžeme využít toho, že zadaná bilineární forma je symetrická. Platí tedy

$$b_{ij} = B(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j) = \mathrm{e}_i(1)\mathrm{e}_j(1) + \mathrm{e}_i(2)\mathrm{e}_j(2) = \mathrm{e}_j(1)\mathrm{e}_i(1) + \mathrm{e}_j(2)\mathrm{e}_i(2) = B(\mathrm{e}_j, \mathrm{e}_i) = b_{ji},$$

takže

$$[B]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{bmatrix}.$$

Jelikož

$$[p]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad [q]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

platí

$$B(p,q) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = -2.$$

▲

16.4. Matice symetrické a antisymetrické formy

Věta 16.6. *Nechť B je bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathscr{V}$ konečné dimenze. Pak B je symetrická, právě když matice B v libovolné bázi $\mathscr{E}$ prostoru $\mathscr{V}$ splňuje*

$$[B]_{\mathscr{E}} = [B]_{\mathscr{E}}^{\top}. \tag{16.10}$$

Důkaz. Je-li B symetrická bilineární forma, pak $B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = B(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$ a vztah (16.10) platí.

Obráceně, nechť platí (16.10). Pak podle (16.9) pro libovolné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{V}$ platí

$$B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_{\mathscr{E}}^{\top} [B]_{\mathscr{E}} [\mathbf{y}]_{\mathscr{E}} = \left([\mathbf{x}]_{\mathscr{E}}^{\top} [B]_{\mathscr{E}} [\mathbf{y}]_{\mathscr{E}}\right)^{\top} = [\mathbf{y}]_{\mathscr{E}}^{\top} [B]_{\mathscr{E}}^{\top} [\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} = [\mathbf{y}]_{\mathscr{E}}^{\top} [B]_{\mathscr{E}} [\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} = \\ = B(\mathbf{y},\mathbf{x}),$$

takže forma B je symetrická. □

Matice $\mathbf{A}$, která splňuje $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\top}$, se nazývá *symetrická matice*, takže větu lze zformulovat stručně také tak, že bilineární forma na prostoru konečné dimenze je symetrická, právě když má v libovolné bázi symetrickou matici.

Matice $\mathbf{A}$, pro kterou platí $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\top}$, se nazývá *antisymetrická matice*. Podobně bilineární forma na prostoru konečné dimenze je antisymetrická, právě když má v libovolné bázi antisymetrickou matici.

Známe–li matici $[B]_{\mathscr{E}}$ bilineární formy B vzhledem k určité bázi $\mathscr{E}$ prostoru $\mathscr{V}$, můžeme snadno určit i matici její symetrické (respektive antisymetrické) části.

Je–li totiž $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ nějaká uspořádaná báze prostoru $\mathscr{V}$, potom pro každé $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ je podle (16.8)

$$B^S(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \frac{1}{2}\big(B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) + B(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)\big) \quad , \quad B^A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \frac{1}{2}\big(B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) - B(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)\big) \; .$$

Odtud pro příslušné matice symetrické a antisymetrické části plyne, že

$$\left[B^S\right]_{\mathscr{E}} = \frac{1}{2}\left([B]_{\mathscr{E}} + [B]_{\mathscr{E}}^\top\right) \quad , \quad \left[B^A\right]_{\mathscr{E}} = \frac{1}{2}\left([B]_{\mathscr{E}} - [B]_{\mathscr{E}}^\top\right) \; . \tag{16.11}$$

Vzorce (16.11) jsou vlastně maticovou obdobou vzorců (16.8), které definovaly symetrickou a antisymetrickou část bilineární formy.

Podobně jako u bilineárních forem můžeme tedy hovořit o symetrické a antisymetrické části libovolné čtvercové matice $\mathbf{B}$. Pro tyto části pak platí předpisy podobné vzorcům (16.11)

$$\mathbf{B}^S = \frac{1}{2}\left(\mathbf{B} + \mathbf{B}^\top\right) \quad , \quad \mathbf{B}^A = \frac{1}{2}\left(\mathbf{B} - \mathbf{B}^\top\right) \; .$$

16.5. Změna matice bilineární formy při změně báze

Nechť $\mathscr{V}$ je vektorový prostor konečné dimenze a nechť $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ a $\mathscr{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ jsou dvě báze $\mathscr{V}$. Nechť $\mathbf{P}$ je matice přechodu od báze $\mathscr{E}$ k nové bázi $\mathscr{F}$, takže pro libovolný vektor $x \in \mathscr{V}$ platí podle (15.12)

$$[\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} = \mathbf{P}\,[\mathbf{x}]_{\mathscr{F}} \; .$$

S použitím (16.9) dostaneme pro libovolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{U}$ a bilineární formu B na $\mathscr{V}$

$$[\mathbf{x}]_{\mathscr{F}}^\top [B]_{\mathscr{F}} [\mathbf{y}]_{\mathscr{F}} = B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_{\mathscr{E}}^\top [B]_{\mathscr{E}} [\mathbf{y}]_{\mathscr{E}} = [\mathbf{x}]_{\mathscr{F}}^\top \mathbf{P}^\top [B]_{\mathscr{E}} \mathbf{P}\,[\mathbf{y}]_{\mathscr{F}} \; .$$

Zvolíme–li $\mathbf{x} = \mathbf{f}_i$ a $\mathbf{y} = \mathbf{f}_j$, snadno si ověříme, že prvky v i-tém řádku a j-tém sloupci matic $[B]_{\mathscr{F}}$ a $\mathbf{P}^\top [B]_{\mathscr{E}} \mathbf{P}$ jsou stejné, tedy

$$[B]_{\mathscr{F}} = \mathbf{P}^\top [B]_{\mathscr{E}} \mathbf{P}. \tag{16.12}$$

Odtud dostaneme s použitím matice zpětného přechodu $\mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1}$ od báze $\mathscr{F}$ k bázi $\mathscr{E}$

$$[B]_{\mathscr{E}} = \mathbf{T}^\top [B]_{\mathscr{F}} \mathbf{T}. \tag{16.13}$$

16.6. Kongruentní matice

Výše uvedená rovnost (16.12) je motivací pro nový pojem.

Definice 16.7. Čtvercová matice $\mathbf{A}$ je *kongruentní* s maticí $\mathbf{B}$, jestliže existuje regulární matice $\mathbf{T}$ tak, že
$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^\top \mathbf{B}\mathbf{T}.$$

Úvahy předchozího článku můžeme shrnout pomocí nového pojmu do následující věty.

Věta 16.8. *Matice dané bilineární formy v různých bázích jsou kongruentní.*

Je možno dokázat i tvrzení, že jsou-li matice kongruentní, pak jsou maticemi nějaké bilineární formy v různých bázích. Jelikož podstatné vlastnosti bilineárních forem (například symetrie) nezávisí na bázi prostoru, dá se očekávat, že kongruentní matice budou mít podstatné charakteristiky shodné.

Snadno lze také dokázat, že každá matice je kongruentní sama se sebou, že je-li $\mathbf{A}$ kongruentní s $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}$ kongruentní s $\mathbf{C}$, pak $\mathbf{A}$ je také kongruentní s $\mathbf{C}$, a konečně je-li $\mathbf{A}$ kongruentní s $\mathbf{B}$, pak je i $\mathbf{B}$ kongruentní s $\mathbf{A}$.

Například je-li $\mathbf{A}$ kongruentní s $\mathbf{B}$, pak po přenásobení rovnosti $\mathbf{A} = \mathbf{T}^\top\mathbf{B}\mathbf{T}$ zleva $(\mathbf{T}^\top)^{-1} = (\mathbf{T}^{-1})^\top$ a zprava $\mathbf{T}^{-1}$ dostaneme $\mathbf{B} = (\mathbf{T}^{-1})^\top\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$. Matice $\mathbf{B}$ je tedy kongruentní s $\mathbf{A}$. Skutečně, označíme–li $\mathbf{M} = \mathbf{T}^{-1}$, pak $\mathbf{M}$ je regulární matice, a platí $\mathbf{B} = \mathbf{M}^\top\mathbf{A}\mathbf{M}$.

Pojmy k zapamatování

Σ

— matice bilineární formy a její změna při změně báze,

— symetrické a antisymetrické bilineární formy,

— kongruentní matice.

Kapitola 17

Kvadratické formy

Průvodce studiem

Dosadíme-li do bilineární formy za oba argumenty tentýž vektor, dostaneme speciální funkci jedné vektorové proměnné. Například pro $y_1 = x_1$ a $y_2 = x_2$ dostaneme na levé straně rovnice (16.1) funkci jedné vektorové proměnné $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ ve tvaru

$$Q(\mathbf{x}) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2. \tag{17.1}$$

Ukazuje se, že takové speciální funkce mohou v některých důležitých případech nahradit původní bilineární formu. Přechod ke skalární funkci jedné vektorové proměnné je základem takzvaných energetických metod řešení technických problémů a usnadňuje řešení některých dalších úloh.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- sestavit matici kvadratické formy,
- vyjádřit kvadratickou formu ve tvaru lineární kombinace čtverců,
- určit typ kvadratické formy.

17.1. Definice a příklady

Definice 17.1. Nechť $\mathscr{V}$ je vektorový prostor a nechť B je bilineární forma na $\mathscr{V}$. Zobrazení Q_B definované pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathscr{V}$ předpisem

$$Q_B(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \tag{17.2}$$

se nazývá *kvadratická forma* příslušná bilineární formě B. Kvadratickou formou budeme stručně nazývat zobrazení Q definované na $\mathscr{V}$, pro které existuje bilineární forma B na $\mathscr{V}$ tak, že $Q = Q_B$. Kvadratickou formu můžeme považovat za zobecnění funkce $y = ax^2$ na vektorové prostory.

Příklad 17.2. Na prostoru $\mathscr{V} = \mathbb{R}^3$ sloupcových vektorů dimenze 3 je definováno zobrazení Q, které každému vektoru $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^\top$ přiřazuje

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \tag{17.3}$$

což je kvadratická forma příslušná bilineární formě definované rovností (16.2). Interpretujeme-li $\mathbf{x}$ jako polohový vektor, pak $Q(\mathbf{x})$ je druhá mocnina jeho délky.

Příklad 17.3. Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je daná reálná čtvercová matice řádu 2. Pak zobrazení, které každému sloupcovému vektoru $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\top$ přiřazuje

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \tag{17.4}$$

je kvadratická forma příslušná bilineární formě definované rovností (16.3).

Příklad 17.4. Nechť $\mathscr{F}$ je prostor všech reálných funkcí. Pak předpis, který každé funkci $f \in \mathscr{F}$ přiřazuje

$$Q(f) = f(1)^2 + f(2)^2, \tag{17.5}$$

definuje kvadratickou formu příslušnou bilineární formě definované rovností (16.4).

17.2. Základní vlastnosti

Nechť $\mathscr{V}$ je reálný vektorový prostor. Jelikož pro každou bilineární formu B na $\mathscr{V}$, $\mathbf{x} \in \mathscr{V}$ a reálné α platí $B(\alpha\mathbf{x}, \alpha\mathbf{x}) = \alpha^2 B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, platí pro každou kvadratickou formu Q na $\mathscr{V}$, $\mathbf{x} \in \mathscr{V}$ a reálné α rovnost

$$Q(\alpha\mathbf{x}) = \alpha^2 Q(\mathbf{x}). \tag{17.6}$$

Odtud bezprostředně plyne, že

$$Q(\mathbf{o}) = Q(0 \cdot \mathbf{o}) = 0$$

a že obor hodnot $\mathscr{H}(Q)$ každé kvadratické formy Q obsahuje s každým číslem i jeho nezáporné násobky. Obor hodnot *nulové kvadratické formy* definované předpisem $Q(\mathbf{x}) = 0$ obsahuje pouze číslo 0.

Existuje více bilineárních forem, které podle (17.2) určují danou kvadratickou formu. Tak například kvadratická forma (17.1), která přísluší bilineární formě z (16.1), odpovídá také bilineární formě

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -2x_1y_1 + 4x_1y_2 - 2x_2y_1 - 3x_2y_2 \; . \tag{17.7}$$

Jestliže položíme $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ ($y_1 = x_1$ a $y_2 = x_2$) obdržíme stejnou kvadratickou formu

$$Q_C(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 \; .$$

Nabízí se otázka, mají–li bilineární formy z (16.1) a (17.7) něco společné. Odpověď dává následující věta.

Věta 17.5. *Nechť B a C jsou dvě bilineární formy na vektorovém prostoru $\mathscr{V}$. Potom*

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = C(\mathbf{x}, \mathbf{x}), \text{ tedy } Q_B(\mathbf{x}) = Q_C(\mathbf{x})$$

pro všechny vektory $\mathbf{x} \in \mathscr{V}$ právě tehdy, když

$$B^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C^S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

pro každé $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathscr{V}$. Navíc platí

$$Q_B(\mathbf{x}) = B^S(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \; . \tag{17.8}$$

Důkaz. Nechť bilineární formy B a C vytváří stejnou kvadratickou formu, tj.

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = C(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \; .$$

Pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{V}$ podle (16.8) s přihlédnutím k vlastnostem bilineární formy platí

$$\begin{aligned} B^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2}\big(B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{x})\big) = \frac{1}{2}\big(B(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) - B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - B(\mathbf{y}, \mathbf{y})\big) = \\ &= \frac{1}{2}\big(C(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) - C(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - C(\mathbf{y}, \mathbf{y})\big) = \frac{1}{2}\big(C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + C(\mathbf{y}, \mathbf{x})\big) = \\ &= C^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \; , \end{aligned}$$

takže

$$B^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \; .$$

Předpokládejme naopak, že pro bilineární formy B a C je

$$B^S(\mathbf{x},\mathbf{y}) = C^S(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ .$$

Potom $\frac{1}{2}\big(B(\mathbf{x},\mathbf{y}) + B(\mathbf{y},\mathbf{x})\big) = \frac{1}{2}\big(C(\mathbf{x},\mathbf{y}) + C(\mathbf{y},\mathbf{x})\big)$, odkud pak plyne, že

$$B(\mathbf{x},\mathbf{x}) = C(\mathbf{x},\mathbf{x}) \ ,$$

je–li $\mathbf{y} = \mathbf{x}$.

Rovnost (17.8) vyplývá bezprostředně z první rovnosti v (16.8), jestliže dosadíme za $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{x}$. □

Poznámka 17.6. Na základě této věty všechny bilineární formy, které určují vztahem (17.2) tutéž kvadratickou formu, mají stejnou symetrickou část. Na druhé straně však existuje právě jedna symetrická bilineární forma, která danou kvadratickou formu vytváří. Jinými slovy, kvadratické a symetrické bilineární formy si vzájemně jednoznačně odpovídají.

17.3. Matice kvadratické formy

Nechť $\mathscr{V}$ je vektorový prostor konečné dimenze s bází $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ a nechť Q je daná kvadratická forma příslušná bilineární formě B. Pak můžeme pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathscr{V}$ vyčíslit hodnotu $Q(\mathbf{x})$ pomocí jeho souřadnic a matice bilineární formy B vzhledem k bázi $\mathscr{E}$ ze vztahu

$$Q(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x},\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_{\mathscr{E}}^{\top} [B]_{\mathscr{E}} [\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} \,,$$

který dostaneme z (16.9). Je proto přirozené považovat matici $[B]_{\mathscr{E}}$ za matici kvadratické formy Q příslušné bilineární formě B v bázi $\mathscr{E}$. Podle (17.8) však kvadratická forma příslušná B přísluší též symetrické části B^{S} bilineární formy B. Jelikož matice libovolné symetrické formy v dané bázi je symetrická, je výhodné definovat *matici kvadratické formy* Q_B příslušné k bilineární formě B jako symetrickou matici

$$[Q_B]_{\mathscr{E}} = \left[B^{\mathrm{S}}\right]_{\mathscr{E}} . \tag{17.9}$$

Při studiu matic kvadratických forem se tedy můžeme omezit na symetrické matice.

Příklad 17.7. Bilineární forma (17.7) má vzhledem ke standardní bázi matici

$$[C]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} .$$

Její symetrické části odpovídá podle (16.11) matice

$$[C]_{\mathscr{E}}^S = \frac{1}{2}\big([C]_{\mathscr{E}} + [C]_{\mathscr{E}}^{\top}\big) = \frac{1}{2}\Big(\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \Big) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} ,$$

kterou v souladu s (17.9) nazýváme maticí kvadratické formy Q_C.

17.4. Diagonální tvar matice kvadratické formy

Jedním z důležitých problémů při studiu kvadratických forem je určit, jakých hodnot může nabývat daná kvadratická forma. Na tuto otázku můžeme snadno odpovědět, máme-li matici kvadratické formy v diagonálním tvaru, neboť pak se hodnota kvadratické formy v daném vektoru vypočte jako součet druhých mocnin souřadnic tohoto vektoru, tedy kladných čísel, násobených diagonálními prvky. Tak například hned vidíme, že kvadratická forma

$$Q(\mathbf{x}) = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 3x_2^2$$

nabývá kladné hodnoty pro libovolný vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$.

Není-li matice kvadratické formy v diagonálním tvaru, nemůžeme obvykle najít její obor hodnot bezprostředně, avšak můžeme se pokusit upravit formu na tvar, ze kterého lze obor hodnot poznat. Například *doplňováním čtverců* formy Q definované rovností (17.1) dostaneme pro $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 = -2\big(x_1^2 - 2x_1(\frac{1}{2}x_2) + (\frac{1}{2}x_2)^2\big) + \frac{1}{2}x_2^2 - 3x_2^2 = \\ &= -2(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 - \frac{5}{2}x_2^2, \end{aligned}$$

takže $Q(\mathbf{x}) < 0$ pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$.

Úpravu, kterou jsme použili při redukci Q na lineární kombinaci čtverců, můžeme popsat jako změnu báze. Položíme nejprve $y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2$, $y_2 = x_2$, odtud pak dostáváme substituci $x_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_2$, $x_2 = y_2$, která převádí formu Q na tvar

$$Q(x) = -2y_1^2 - \frac{5}{2}y_2^2$$

s diagonální maticí

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Substituci $x_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_2$, $x_2 = y_2$ můžeme vyjádřit v maticové podobě

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Vektor $[x_1, x_2]^\top$ je vlastně souřadnicový vektor $[\mathbf{x}]_{\mathscr{E}}$ vektoru $\mathbf{x}$ ve standardní bázi $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ prostoru $\mathbb{R}^2$. Vektor $[y_1, y_2]^\top$ můžeme zase považovat za souřadnicový vektor $[x]_{\mathscr{F}}$ vektoru $\mathbf{x}$ v nové bázi $\mathscr{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, která je určena maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

od báze $\mathscr{E}$ k bázi $\mathscr{F}$. Změnou báze jsme se zabývali v kapitole (15.7). Odtud víme, že vektory báze $\mathscr{F}$ jsou určeny sloupci matice přechodu $\mathbf{P}$, tj.

$$\mathbf{f}_1 = [1, 0] \quad , \quad \mathbf{f}_2 = [\frac{1}{2}, 1] \ ,$$

a že příslušnou substituci lze vyjádřit ve tvaru

$$[\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} = \mathbf{P}[\mathbf{x}]_{\mathscr{F}} \ .$$

Označíme–li ještě matice kvadratické formy Q v bázi $\mathscr{E}$ a $\mathscr{F}$ po řadě $[Q]_{\mathscr{E}}$ a $[Q]_{\mathscr{F}}$, potom podle (16.12) platí

$$[Q]_{\mathscr{F}} = \mathbf{P}^{\top}[Q]_{\mathscr{E}}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} ,$$

což je naše diagonální matice $\mathbf{D}$.

Naše pozorování nyní využijeme ke studiu kvadratických forem v $\mathbb{R}^2$.

17.5. Kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$

Libovolnou kvadratickou formu na $\mathbb{R}^2$ můžeme zapsat buďto pomocí složek ve tvaru

$$Q(\mathbf{x}) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2, \tag{17.10}$$

nebo maticově ve tvaru

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Matici $\mathbf{A}$ přitom můžeme považovat za matici Q ve standardní bázi $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Budeme se zabývat otázkou, na jaký tvar lze redukovat matici $\mathbf{A}$ přechodem ke vhodné nové bázi. Pro zjednodušení výkladu se omezíme na hledání redukovaného tvaru vhodného násobku formy Q, takže pro nenulovou formu můžeme předpokládat, že některý nenulový koeficient formy Q je roven jedné.

Předpokládejme nejprve, že $a = 1$, takže doplněním čtverců můžeme upravit (17.10) na tvar

$$Q(\mathbf{x}) = \left(x_1^2 + 2x_1(bx_2) + (bx_2)^2\right) + (c - b^2)x_2^2 = (x_1 + bx_2)^2 + (c - b^2)x_2^2. \tag{17.11}$$

Budeme rozlišovat dva případy. Jestliže $c - b^2 \neq 0$, položíme

$$y_1 = x_1 + bx_2, \quad y_2 = \sqrt{|c - b^2|}x_2 \ .$$

Pomocí substituce

$$x_1 = y_1 - \frac{b}{\sqrt{|c - b^2|}}y_2 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{|c - b^2|}}y_2 \tag{17.12}$$

pak dostaneme jeden z tvarů

$$Q(\mathbf{x}) = y_1^2 + y_2^2, \quad Q(\mathbf{x}) = y_1^2 - y_2^2\,.$$

Zapíšeme-li si substituci (17.12) v maticové podobě $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$, kde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-b}{\sqrt{|c-b^2|}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{|c-b^2|}} \end{bmatrix},$$

můžeme provedenou úpravu zapsat též v maticovém tvaru

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{P}^\top \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D}\mathbf{y}, \tag{17.13}$$

kde $\mathbf{D}$ je jedna z matic

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{17.14}$$

Matici $\mathbf{P}$ přitom můžeme považovat za matici přechodu od standardní báze $\mathscr{E}$ k nové bázi $\mathscr{F}$, takže platí

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} = \mathbf{P}\,[\mathbf{x}]_{\mathscr{F}} = \mathbf{P}\mathbf{y}, \quad [Q]_{\mathscr{F}} = \mathbf{D}, \quad Q(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_{\mathscr{F}}^\top\,[Q]_{\mathscr{F}}\,[\mathbf{x}]_{\mathscr{F}} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D}\mathbf{y}.$$

Jestliže $c - b^2 = 0$, pak pomocí substituce $x_1 = y_1 - by_2$, $x_2 = y_2$ dostaneme $Q(\mathbf{x}) = y_1^2$. Zapíšeme-li si tuto substituci opět v maticovém tvaru s maticí

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

můžeme provedenou úpravu zapsat též v maticovém tvaru (17.13), kde

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{17.15}$$

Ukazuje se, že každá nenulová kvadratická forma (nebo její násobek) má ve vhodné bázi jednu z matic (17.14) nebo (17.15).

Pro $a = 0$ a $c \neq 0$ stačí zopakovat předchozí úvahy s tím, že zaměníme a s c a x_1 s x_2. Pokud $a = c = 0$, pak pro vhodný násobek Q bude $b = 1/2$. Položíme-li

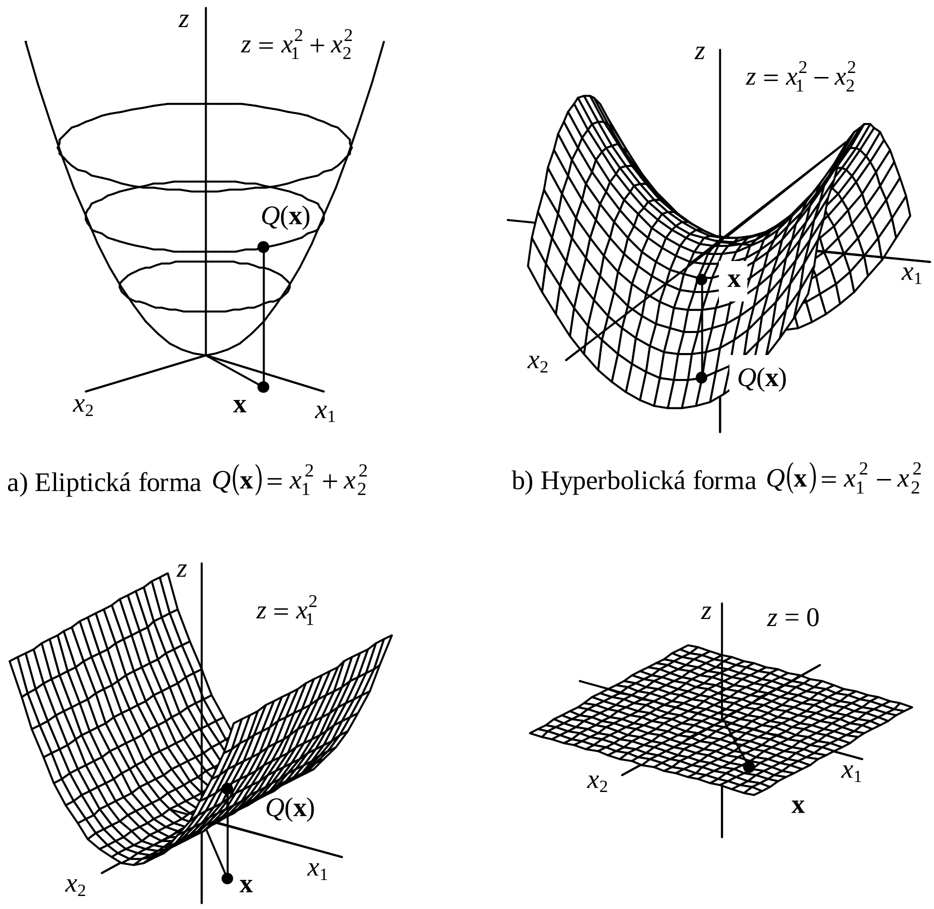
$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 - y_2, \tag{17.16}$$

dostaneme

$$Q(\mathbf{x}) = y_1^2 - y_2^2.$$

Transformaci (17.16) můžeme opět považovat za přechod k souřadnicím v nové bázi s maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$



a) Eliptická forma $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ b) Hyperbolická forma $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$

c) Parabolická forma $Q(\mathbf{x}) = x_1^2$ d) Nulová forma $Q(\mathbf{x}) = 0$

Obr. 17.1: Kvadratické formy na $\mathbb{R}^2$

Přímým výpočtem si lze ověřit, že platí (17.13) s maticí $\mathbf{D} = \mathbf{D}_2$ z (17.14).

Zahrneme-li do našich úvah i nulovou kvadratickou formu, dojdeme k závěru, že každou kvadratickou formu na $\mathbb{R}^2$ můžeme redukovat vhodnou substitucí či přechodem k jiné bázi na jeden z tvarů

$$Q_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2, \quad Q_2(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2, \quad Q_3(\mathbf{x}) = x_1^2, \quad Q_4(\mathbf{x}) = 0,$$

který lze identifikovat z hodnot, jichž může nabývat forma Q na množině $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{o}\}$. Každý z těchto tvarů má charakteristický název, který je uveden na obr. 17.1 spolu se znázorněním grafu $z = Q(\mathbf{x})$.

17.6. Pozitivně definitní kvadratické formy

Mimořádný význam v aplikacích mají kvadratické formy, jejichž obor hodnot tvoří nezáporná čísla, takže je lze považovat za zobecnění eliptické a parabolické formy z obr. 17.1.

Definice 17.8. Kvadratická forma Q na vektorovém prostoru $\mathscr{V}$ se nazývá *pozitivně definitní*, jestliže pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathscr{V}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ platí $Q(\mathbf{x}) > 0$. Jestliže pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathscr{V}$ platí $Q(\mathbf{x}) \geq 0$, pak se Q nazývá *pozitivně semidefinitní*.

Příklad 17.9. Kvadratická forma (17.3) je pozitivně definitní.

Příklad 17.10. Kvadratická forma $q = -Q$, kde Q je definována rovností (17.1), je pozitivně definitní. Vyplývá to z úpravy formy Q na tvar $Q(\mathbf{x}) = -2(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 - - \frac{5}{2}x_2^2$, odtud $q(\mathbf{x}) = +2(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{5}{2}x_2^2$.

Příklad 17.11. Kvadratická forma (17.5) také nabývá pouze nezáporných hodnot, avšak $Q(f) = 0$ například pro nenulovou funkci $f(x) = (x-1)(x-2)$. Kvadratická forma (17.5) je proto pouze pozitivně semidefinitní.

Je-li $\mathscr{V}$ vektorový prostor konečné dimenze s bází $\mathscr{E}$ a je-li Q je pozitivně definitní kvadratická forma, pak pro libovolné $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ platí $[\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} \neq \mathbf{o}$ a

$$Q(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_{\mathscr{E}}^{\top} [Q]_{\mathscr{E}} [\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} > 0. \tag{17.17}$$

Nerovnost (17.17), kterou splňuje matice pozitivně definitní kvadratické formy, má smysl pro každou symetrickou matici $\mathbf{A}$, kterou budeme nazývat *pozitivně definitní*, jestliže pro každý sloupcový vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ platí $\mathbf{x}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, a *pozitivně semidefinitní*, jestliže $\mathbf{x}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ pro libovolný sloupcový vektor $\mathbf{x}$. Kvadratická forma je tedy pozitivně definitní (semidefinitní), právě když je její matice v libovolné bázi pozitivně definitní (semidefinitní).

Každá pozitivně definitní matice má kladnou diagonálu. Skutečně, je-li $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ pozitivně definitní matice, pak pro libovolný sloupec $\mathbf{s} = \mathbf{s}_i^{\mathbf{I}}$ jednotkové matice platí

$$0 < \mathbf{s}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{s} = a_{ii}.$$

Je-li $\mathbf{D}$ diagonální matice s diagonálními prvky $d_1, \dots, d_n$ a $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^{\top}$, pak

$$\mathbf{x}^{\top}\mathbf{D}\mathbf{x} = d_1 x_1^2 + \dots + d_n x_n^2.$$

Matice $\mathbf{D}$ je tedy pozitivně definitní, právě když $d_1 > 0, \dots, d_n > 0$. Jelikož pozitivní definitnost je vlastnost kvadratické formy, která se přenáší na matice kvadratické formy, plyne odtud, že *symetrická matice kongruentní s diagonální maticí je pozitivně definitní, právě když tato diagonální matice má kladné diagonální prvky.* Obdobné tvrzení platí i pro pozitivně semidefinitní matice.

Σ Pojmy k zapamatování

— matice kvadratické formy,

— metoda doplňování na čtverec,

— pozitivně definitní kvadratické formy.

Kapitola 18

Kongruence symetrických a diagonálních matic

Průvodce studiem

V článku 16.6 jsme si zavedli pro symetrické matice relaci kongruence a ukázali jsme si, že jakékoliv kongruentní matice můžeme považovat za souřadnice téže kvadratické formy v různých bázích. Pro kvadratické formy na prostoru dimenze dvě jsme si dokonce dokázali, že mezi symetrickými maticemi dané kvadratické formy v různých bázích je vždy diagonální matice, přičemž počet jejích kladných či záporných prvků nezávisí na volbě báze. V této kapitole si tyto výsledky zobecníme a ukážeme si efektivní výpočetní postupy pro nalezení diagonální matice, která je kongruentní s danou symetrickou maticí.

Cíle

V této kapitole se naučíte:

- pomocí kongruencí redukovat pozitivně definitní matici na diagonální tvar,
- využít kongruence i pro symetrické matice,
- klasifikovat kvadratické formy pomocí kongruencí.

18.1. Diagonální redukce pozitivně definitní matice

Pro další studium kongruencí použijeme elementární řádkové operace a jejich maticový zápis. Novinkou však bude to, že ke každé elementární operaci budeme následně uvažovat její sloupcovou variantu a místo o elementárních operacích budeme mluvit o *elementárních kongruencích*. Je-li tedy $\mathbf{T}$ matice některé elementární operace s řádky čtvercové matice $\mathbf{A}$ (viz článek 8.1), pak matici upravenou příslušnou elementární kongruencí lze zapsat ve tvaru $\mathbf{TAT}^\top$. Spojíme-li toto pozorování s postupy, které jsme používali při studiu **LU** rozkladů, snadno dokážeme následující tvrzení, které lze použít k ověření pozitivní definitnosti matice nebo k řešení soustav s pozitivně definitní maticí.

Věta 18.1. *Nechť* $\mathbf{A}$ *je pozitivně definitní matice. Pak existuje regulární dolní trojúhelníková matice* $\mathbf{L}$ *a diagonální matice* $\mathbf{D}$ *s kladnou diagonálou tak, že*

$$\mathbf{L}\mathbf{A}\mathbf{L}^\top = \mathbf{D}. \tag{18.1}$$

Důkaz. Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je daná pozitivně definitní matice řádu n. V článku 17.6 jsme si ukázali, že každá pozitivně definitní matice má kladné diagonální prvky, takže $a_{11} > 0$.

S pomocí maticového zápisu elementárních operací najdeme, stejně jako v důkazu věty 9.2, dolní trojúhelníkovou matici $\mathbf{L}_1$, pro kterou platí

$$\mathbf{L}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a^1_{22} & \dots & a^1_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a^1_{n2} & \dots & a^1_{nn} \end{bmatrix}. \tag{18.2}$$

Jelikož $\mathbf{A}$ je symetrická, plyne odtud, že matice $(\mathbf{L}_1\mathbf{A})^\top = \mathbf{A}\mathbf{L}_1^\top$ má stejný první sloupec jako $\mathbf{A}$, takže

$$\mathbf{L}_1\mathbf{A}\mathbf{L}_1^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \tag{18.3}$$

kde

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a^1_{22} & \dots & a^1_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^1_{n2} & \dots & a^1_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matice $\mathbf{A}_1$ je však nejen symetrická, jak je patrné z (18.3), nýbrž i pozitivně definitní, neboť pro každý vektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix},$$

kde $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$, platí

$$0 < \mathbf{x}^\top\mathbf{L}_1\mathbf{A}\mathbf{L}_1^\top\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top\mathbf{A}_1\mathbf{y}.$$

Opakováním tohoto postupu najdeme dolní trojúhelníkové matice $\mathbf{L}_2, \dots \mathbf{L}_{n-1}$ tak, že pro

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{n-1} \cdots \mathbf{L}_1$$

platí (18.1). Jelikož $\mathbf{L}$ je součin regulárních dolních trojúhelníkových matic, je $\mathbf{L}$, podle článku 9.2, také dolní trojúhelníková matice. □

Důkaz je založen na mírné modifikaci postupu uvedeného v článku 9.4 a dává nám současně návod, jak $\mathbf{L}$ a $\mathbf{D}$ nalézt.

Příklad 18.2. Najděte diagonální matici $\mathbf{D}$, která je kongruentní s pozitivně definitní maticí

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{18.4}$$

Řešení. Matici $\mathbf{A}$ upravíme spolu s jednotkovou maticí na horní trojúhelníkovou matici. Dostaneme:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mathrm{r}_2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{r}_1 \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mathrm{r}_3 + \tfrac{2}{3}\mathrm{r}_2 \mapsto$$

$$\mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right]$$

Snadno si ověříme, že pro

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \tag{18.5}$$

platí

$$\mathbf{LAL}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{D}$$

▲

18.2. LDL$^\top$ rozklad a řešení soustav s pozitivně definitní maticí

Rozklad (18.1) je základem efektivních algoritmů pro řešení soustav s pozitivně definitními maticemi, neboť je ekvivalentní rozkladům

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{L}^\top\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L} \quad \text{nebo} \quad \mathbf{A} = \bar{\mathbf{L}}\mathbf{D}\bar{\mathbf{L}}^\top, \quad \bar{\mathbf{L}} = \mathbf{L}^{-1}. \tag{18.6}$$

Příklad 18.3. Využijte řešení příkladu 18.2 k řešení soustavy:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & -x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array} \tag{18.7}$$

Řešení. Matice soustavy $\mathbf{A}$ je dána rovností (18.4), takže pro $\mathbf{L}$ a $\mathbf{D}$ definované rovností (18.5) platí $\mathbf{L}\mathbf{A}\mathbf{L}^\top = \mathbf{D}$ a $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{L}^{-\top}$. Označíme-li si $\mathbf{b}$ pravou stranu soustavy (18.7), můžeme si vyjádřit její řešení ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{L}^\top\left(\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}\mathbf{b})\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Soustava (18.7) má tedy řešení $x = 1_1, x = 1_2, x = 1_3$. ▲

18.3. Kongruence symetrické a diagonální matice

Doplněním důkazu věty 18.1 můžeme dokázat, že každá symetrická matice je kongruentní s diagonální maticí.

Věta 18.4. *Nechť* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *je symetrická matice. Pak existuje regulární matice* $\mathbf{T}$ *a diagonální matice* $\mathbf{D}$ *tak, že*

$$\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^\top = \mathbf{D}. \tag{18.8}$$

Důkaz. Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je symetrická matice řádu n. Jestliže $a_{11} = 0$ a některý mimodiagonální prvek $a_{i1} = a_{1i}$ je nenulový, pak přičtením nebo odečtením i-tého řádku k prvnímu řádku a následným provedením obdobné operace se sloupci můžeme dostat do levého horního rohu nenulový prvek. Můžeme se o tom přesvědčit úpravou

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & i \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ i \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & a_{1i} \\ a_{i1} & a_{ii} \end{bmatrix} \end{array} \; \mathrm{r}_1 + \alpha \mathrm{r}_i \;\mapsto\; \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & i \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ i \end{array} & \begin{bmatrix} \alpha a_{i1} & a_{1i} + \alpha a_{ii} \\ a_{i1} & a_{ii} \end{bmatrix} \\ & \mathrm{s}_1 + \alpha \mathrm{s}_i \end{array} \;\mapsto\; \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & i \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ i \end{array} & \begin{bmatrix} 2\alpha a_{i1} + \alpha^2 a_{ii} & a_{1i} + \alpha a_{ii} \\ a_{i1} + \alpha a_{ii} & a_{ii} \end{bmatrix} \end{array},$$

kde jsme pro přehlednost vynechali řádky a sloupce matice $\mathbf{A}$, které neovlivní prvek v levém horním rohu upravené matice, a dosazením $\alpha = 1$ nebo $\alpha = -1$. Maticový zápis takové úpravy má tvar

$$\bar{\mathbf{A}} = [\bar{a}_{ij}] = \mathbf{G}_1\mathbf{A}\mathbf{G}_1^\top,$$

kde $\bar{a}_{11} \neq 0$ a $\mathbf{G}_1$ je matice tvaru (8.3), která při násobení zleva realizuje přičtení prvního řádku k i-tému řádku nebo odečtení prvního řádku od i-tého řádku, tedy $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_{i1}(1)$ nebo $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_{i1}(-1)$. Pokud $a_{11} \neq 0$, pak položíme $\mathbf{G}_1 = \mathbf{I}$ a

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} = \mathbf{G}_1\mathbf{A}\mathbf{G}_1^\top.$$

Jelikož $\bar{a}_{11} \neq 0$, pak najdeme, stejně jako v článku 18.1, dolní trojúhelníkovou matici $\mathbf{L}_1$ tak, že

$$\mathbf{L}_1\bar{\mathbf{A}}\mathbf{L}_1^\top = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}.$$

Pro
$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{L}_1\mathbf{G}_1$$
tedy platí
$$\mathbf{T}_1\mathbf{A}\mathbf{T}_1^\top = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}.$$
Celý postup můžeme opakovat, nejprve s maticí $\mathbf{A}_1$, k postupné eliminaci mimodiagonálních prvků, až po $n-1$ krocích dostaneme pro
$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{n-1}\cdots\mathbf{T}_1$$
rovnost (18.8). □

Důkaz věty ukazuje, jak lze najít diagonální matici, která je kongruentní s danou symetrickou maticí.

Příklad 18.5. Najděte regulární matici $\mathbf{T}$ a diagonální matici $\mathbf{D}$ tak, aby pro matici
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
platilo
$$\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^\top = \mathbf{D}.$$

Řešení. Matici $\mathbf{A}$ nejprve upravíme na diagonální tvar pomocí elementárních kongruencí. Dostaneme postupně:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathrm{r}_1+\mathrm{r}_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \mapsto \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathrm{s}_1+\mathrm{s}_2 \quad\quad\quad\quad \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{r}_2-\frac{1}{2}\mathrm{r}_1 \\ \mathrm{r}_3-\frac{1}{2}\mathrm{r}_1 \end{matrix} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \quad \mathrm{s}_2-\frac{1}{2}\mathrm{s}_1 \quad \mathrm{s}_3-\frac{1}{2}\mathrm{s}_1 \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{r}_3+\mathrm{r}_2 \end{matrix} \mapsto \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \quad\quad\quad \mathrm{s}_2+\mathrm{s}_3 \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matici $\mathbf{T}$ najdeme tak, že řádkové operace, které jsme použili k úpravě $\mathbf{A}$, postupně provedeme na jednotkové matici. Dostaneme tak
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathrm{r}_1+\mathrm{r}_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{r}_2-\frac{1}{2}\mathrm{r}_1 \\ \mathrm{r}_3-\frac{1}{2}\mathrm{r}_1 \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{r}_3+\mathrm{r}_2 \end{matrix} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}\,.$$

Snadno si ověříme, že platí

$$\mathbf{TAT}^\top = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{D}\ .$$

▲

Důsledek 18.6. Nechť Q je libovolná kvadratická forma na vektorovém prostoru konečné dimenze. Pak existuje báze $\mathscr{F}$ prostoru $\mathscr{V}$ tak, že $[Q]_{\mathscr{F}}$ je diagonální.

Důkaz. Nechť $\mathscr{E}$ je libovolná báze prostoru $\mathscr{V}$. Jelikož $[Q]_{\mathscr{E}}$ je symetrická matice, existuje podle věty 18.4 regulární matice $\bar{\mathbf{S}}$ tak, že $\bar{\mathbf{S}}\,[Q]_{\mathscr{E}}\,\bar{\mathbf{S}}^\top = \mathbf{D}$, kde $\mathbf{D}$ je diagonální matice. To však je pro $\mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}}^\top$ ekvivalentní vztahu $\mathbf{S}^\top[Q]_{\mathscr{E}}\,\mathbf{S} = \mathbf{D}$. Je-li $\mathscr{F}$ báze $\mathscr{V}$ definovaná maticí přechodu $\mathbf{S}$, pak podle (16.13) platí $[Q]_{\mathscr{F}} = \mathbf{S}^\top[Q]_{\mathscr{E}}\,\mathbf{S} = \mathbf{D}$. □

18.4. Zákon setrvačnosti kvadratických forem

Následující věta nám říká, že kongruence zachovává i počet kladných, záporných a nulových prvků na diagonále. Poznamenejme, že toto tvrzení jsme si už ukázali pro pozitivně definitní matice a symetrické matice řádu dvě.

Věta 18.7. *Nechť* $\mathbf{D}$ *a* $\mathbf{E}$ *jsou diagonální matice řádu* n *s diagonálami* $d_1, \dots, d_n$ *a* $\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n$. *Nechť* $\mathbf{T}$ *je regulární a* $\mathbf{D} = \mathbf{T}^\top\mathbf{ET}$. *Pak počet kladných, záporných i nulových prvků na diagonálách obou matic je shodný.*

Důkaz. Jelikož násobení regulární maticí zachovává hodnost matice, můžeme předpokládat, že obě matice mají stejný počet h nenulových prvků. Budeme také předpokládat, že diagonály jsou uspořádány tak, že

$$d_1 > 0, \dots, d_p > 0\ , \quad d_{p+1} < 0, \dots, d_h < 0\ ,$$
$$\mathrm{e}_1 > 0, \dots, \mathrm{e}_q > 0\ , \quad \mathrm{e}_{q+1} < 0, \dots, \mathrm{e}_h < 0$$

V opačném případě je přeuspořádáme pomocí elementárních kongruencí odvozených z výměny řádků. Dále budeme předpokládat, že $\mathbf{T}$ je regulární matice taková, že

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^\top\mathbf{ET}. \tag{18.9}$$

Kdyby $p < q$, pak by existovalo řešení $\mathbf{x}$ soustavy rovnic

$$x_1 = 0, \dots, x_p\ , \quad \mathbf{r}_{q+1}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} = 0, \dots, \mathbf{r}_h^{\mathbf{T}}\mathbf{x} = 0\ ,$$

které má některou z prvních h složek nenulovou, neboť podle předpokladu je rovnic méně než h. Musí to být zřejmě některá ze složek $x_{p+1}, \dots, x_h$ takže platí

$$\mathbf{x}^\top\mathbf{D}\mathbf{x} < 0, \quad \mathbf{x}^\top\mathbf{T}^\top\mathbf{ETx} \geq 0,$$

což je spor s (18.9). □

$\sum$

Pojmy k zapamatování

— elementární kongruence,

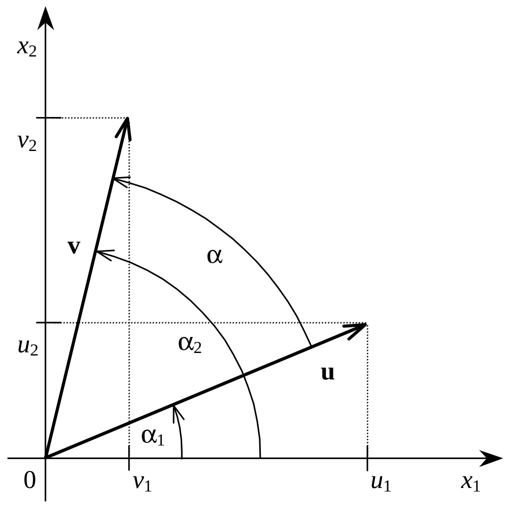
— kongruence symetrické a diagonální matice,

— zákon setrvačnosti kvadratických forem.

Kapitola 19

Skalární součin a ortogonalita

Až doposud jsme se v souvislosti s vektorovými prostory nezabývali velikostí vektorů ani úhly mezi vektory. Napravíme to v této kapitole, kde si zavedeme kosinus úhlu i délku vektorů pomocí bilineární formy a naznačíme možnosti jejich využití.



Obr. 19.1: Úhel vektorů

19.1. Definice skalárního součinu

Jak rozšířit pojem úhlu (či spíše kosinu úhlu) vektorů a délky vektoru na obecný vektorový prostor nám napoví 19.1. Pro kosinus úhlu α vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ platí

$$\cos\alpha = \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 =$$
$$= \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} \cdot \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} + \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} \cdot \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \ ,$$

zatímco pro délky $\|\mathbf{u}\|, \|\mathbf{v}\|$ vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ platí

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad \text{a} \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Prohlédneme-li si oba vzorce, můžeme si všimnout, že obě veličiny, které chceme zobecnit, tedy délka vektoru i kosinus úhlu vektorů, můžeme vyjádřit pomocí jediné symetrické pozitivně definitní bilineární formy

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2, \tag{19.1}$$

které budeme dále říkat *euklidovský skalární součin*. S jeho pomocí můžeme vyjádřit jak kosinus úhlu α vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ v $\mathbb{R}^2$, tak délku $\|\mathbf{u}\|$ pomocí vzorců

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}\sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}}, \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}. \tag{19.2}$$

Vzorce (19.2) mají po zadání bilineární formy smysl pro vektory libovolného vektorového prostoru. To vede k následující definici.

Definice 19.1. *Skalární součin* na reálném vektorovém prostoru $\mathscr{V}$ je bilineární symetrická pozitivně definitní forma na $\mathscr{V}$. Označíme-li si $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ skalární součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, platí tedy pro jakékoliv vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \tag{S1}$$

$$(\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \tag{S2}$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \tag{S3}$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0 \qquad \text{pro} \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{o} \tag{S4}$$

Příklady skalárních součinů na různých vektorových prostorech jsou v článku 17.6.

19.2. Norma vektoru

Pokud použijeme vzorec (19.2) pro zavedení délky vektoru pomocí skalárního součinu, bude podle axiomu (S4) zřejmé, že délka vyjde kladná pro nenulový vektor, avšak nebude hned jasné, zda je taková definice v souladu s dalšími vlastnostmi, které obvykle připisujeme délce vektoru. Ukazuje se, že pro aplikace jsou hlavní vlastnosti, které si zformulujeme v následující definici normy vektoru, kterou můžeme považovat za rozšíření délky vektoru z $\mathbb{R}^2$ na obecný vektorový prostor. Normu můžeme považovat také za zobecnění absolutní hodnoty reálného nebo komplexního čísla.

Definice 19.2. Nechť $\mathscr{V}$ je vektorový prostor. Zobrazení, které každému vektoru $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$ přiřazuje nezáporné reálné číslo $\|\mathbf{v}\|$, se nazývá *norma*, jestliže pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathscr{V}$ a libovolný skalár α platí:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \tag{N1}$$

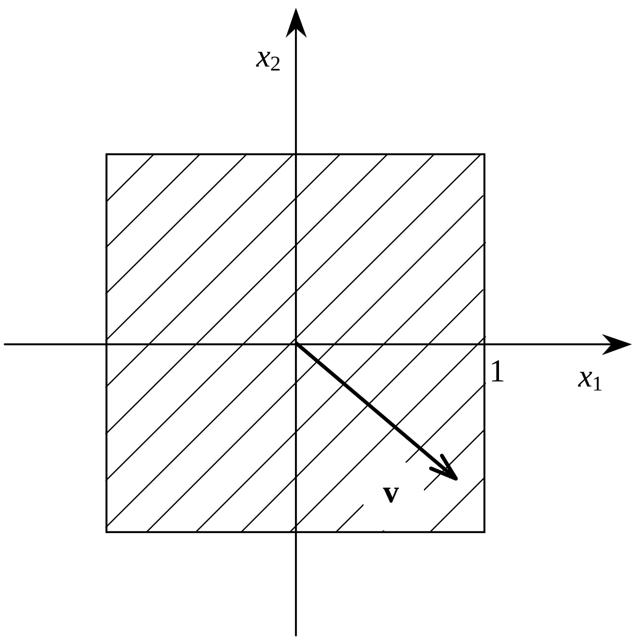
$$\|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha|\, \|\mathbf{u}\| \tag{N2}$$

$$\|\mathbf{u}\| = 0, \qquad \text{právě když} \quad \mathbf{u} = \mathbf{o} \tag{N3}$$

Příklad 19.3. Předpis

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \max\{|u_1|, |u_2|\}$$

definuje normu na $\mathbb{R}^2$. Množina vektorů s normou menší nebo rovnou 1 je na obr 19.2.



Obr. 19.2: Množina vektorů $\|\mathbf{v}\|_\infty \leq 1$

19.3. Norma indukovaná skalárním součinem

V tomto článku si ukážeme, že předpis (19.2) definuje normu ve smyslu odstavce 19.2. Použijeme při tom následující nerovnost.

Věta 19.4. (Schwarzova nerovnost). *Nechť $\mathscr{V}$ je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Pak pro každé dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathscr{V}$ platí*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 \leq (\mathbf{u}, \mathbf{u})(\mathbf{v}, \mathbf{v}). \tag{19.3}$$

Rovnost nastane, právě když jsou $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ závislé.

Důkaz. Tvrzení je zřejmé, je-li některý z vektorů nulový. Předpokládejme proto, že $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, a všimněme si, že pro každé dva vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ platí

$$0 \leq (\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}, \mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \alpha^2(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Zvolíme-li si

$$\alpha = -\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{(\mathbf{v}, \mathbf{v})},$$

dostaneme po úpravě

$$0 \leq (\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2}{(\mathbf{v}, \mathbf{v})},$$

odkud po vynásobení obou stran nerovnosti $(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ a jednoduché úpravě dostaneme (19.3). Rovnost nastane, jen když $(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}, \mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) = 0$, t.j. $1 \cdot \mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} = \mathbf{o}$. □

Z (19.3) plyne, že ani ve vektorovém prostoru nepřevýší absolutní hodnota kosinu úhlu hodnotu 1.

Důsledek 19.5. Nechť $\mathscr{V}$ je vektorový prostor se skalárním součinem a nechť je pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$ definováno $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$. Pak pro každé dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathscr{V}$ platí

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \tag{19.4}$$

a zobrazení $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$ je norma na $\mathscr{V}$.

Důkaz. S použitím axiomů skalárního součinu s Schwarzovy nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2, \end{aligned}$$

takže platí (19.4). Platnost zbývajících dvou axiomů normy je bezprostředním důsledkem axiomů skalárního součinu. □

Norma definovaná předpisem $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$ se nazývá *eukleidovská norma*.

19.4. Ortogonální množiny vektorů

Definice ortogonality vektorů je motivována známou skutečností, že dva polohové vektory v rovině či prostoru jsou ortogonální, právě když je kosinus jejich úhlu roven nule.

Definice 19.6. Nechť $\mathscr{V}$ je vektorový prostor se skalárním součinem. Množina vektorů $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ je *ortogonální*, právě když $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ pro $i \neq j$. Jestliže navíc $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 1$ pro všechna $i = 1, \ldots, k$, pak je $\mathscr{E}$ *ortonormální*. Množina všech vektorů $\mathbf{x} \in \mathscr{V}$, které jsou ortogonální k dané množině vektorů $\mathscr{U}$, se nazývá *ortogonální doplněk* $\mathscr{U}$ (vzhledem k množině $\mathscr{V}$) a značí se $\mathscr{U}^{\perp}$.

Je-li $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ ortogonální množina nenulových vektorů, pak je $\mathscr{E}$ nezávislá, neboť po skalárním vynásobení rovnosti

$$x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_k\mathbf{e}_k = \mathbf{o}$$

vektorem $\mathbf{e}_i \in \mathscr{E}$ dostaneme

$$(\mathbf{e}_i, x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_k\mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{o}),$$

odkud pomocí axiomů skalárního součinu získáme

$$x_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 0,$$

tedy $x_i = 0$.

Obdobným způsobem můžeme vypočítat souřadnice libovolného vektoru $\mathbf{x}$ daného vektorového prostoru $\mathscr{V}$ v ortogonální bázi $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, neboť z rovnosti

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_k\mathbf{e}_k$$

dostaneme po skalárním vynásobení obou stran vektorem $\mathbf{e}_i \in \mathscr{E}$ a úpravě, že

$$x_i = \frac{(\mathbf{e}_i, \mathbf{x})}{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)}. \tag{19.5}$$

Nemusíme tedy řešit žádnou soustavu rovnic.

Neméně snadné je vypočítat eukleidovskou normu $\mathbf{x}$ ze souřadnic $[\mathbf{x}]_{\mathscr{E}}$, neboť

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) = x^2{}_1 + \ldots + x^2{}_n. \tag{19.6}$$

Ortogonální soustavy vektorů mají rozsáhlé uplatnění například při analýze signálů, při ekonomickém uchovávání rozsáhlých dat i v matematice. Následující věta popisuje doplněk oboru hodnot matice.

Věta 19.7. *Nechť* $\mathbf{A}$ *je libovolná matice. Pak* $\mathscr{N}(\mathbf{A}^\top)$ *je ortogonální doplněk* $\mathscr{H}(\mathbf{A})$.

Důkaz. Nechť $\mathbf{x} \in \mathscr{H}(\mathbf{A})$ a $\mathbf{y} \in \mathscr{N}(\mathbf{A}^\top)$. Pak $\mathbf{A}^\top\mathbf{y} = \mathbf{o}$ a $\mathbf{x}$ lze vyjádřit ve tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{z}$. Platí tedy

$$\mathbf{x}^\top\mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{z})^\top\mathbf{y} = \mathbf{z}^\top\mathbf{A}^\top\mathbf{y} = 0,$$

takže množiny $\mathscr{N}(\mathbf{A}^\top)$ a $\mathscr{H}(\mathbf{A})$ jsou ortogonální. Pro matici $\mathbf{A}$ typu (m, n) odtud snadno plyne $h(\mathbf{A}) + d(\mathbf{A}^\top) \leq m$, takže podle (14.2) platí $h(\mathbf{A}) \leq h(\mathbf{A}^\top)$. Poslední nerovnost však platí i když nahradíme matici $\mathbf{A}$ maticí k ní transponovanou, takže $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^\top)$ a $h(\mathbf{A}) + d(\mathbf{A}^\top) = h(\mathbf{A}^\top) + d(\mathbf{A}^\top) = m$, takže $\mathscr{N}(\mathbf{A}^\top)$ je ortogonální doplněk $\mathscr{H}(\mathbf{A})$. □

Příklad 19.8. Nechť $\mathrm{e}_1(x) = x$ a $\mathrm{e}_2(x) = 1 - x$ jsou dvě lineární funkce vektorového prostoru P_2 všech lineárních funkcí se skalárním součinem definovaným rovností

$$(p, q) = p(0)q(0) + p(1)q(1). \tag{19.7}$$

Snadno se ověří, že předpis (19.7) skutečně definuje skalární součin na P_2 a že $\mathscr{E} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2)$ tvoří ortonormální bázi P_2, neboť

$$(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2) = 0(1 - 0) + 1(1 - 1) = 0, \quad (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_1) = 1, \quad (\mathrm{e}_2, \mathrm{e}_2) = 1.$$

Pak libovolnou lineární funkci $\mathrm{e}(x) = a + bx$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathrm{e} = \alpha_1\mathrm{e}_1 + \alpha_2\mathrm{e}_2,$$

kde

$$\begin{array}{lllllllll} \alpha_1 & = & (\mathrm{e}, \mathrm{e}_1) & = & \mathrm{e}(0)\cdot\mathrm{e}_1(0) + \mathrm{e}(1)\cdot\mathrm{e}_1(1) & = & \mathrm{e}(1) & = & a + b \\ \alpha_2 & = & (\mathrm{e}, \mathrm{e}_2) & = & \mathrm{e}(0)\cdot\mathrm{e}_2(0) + \mathrm{e}(1)\cdot\mathrm{e}_2(1) & = & \mathrm{e}(0) & = & a. \end{array}$$

Snadno si ověříme, že skutečně platí

$$a + bx = (a + b)x + a(1 - x).$$

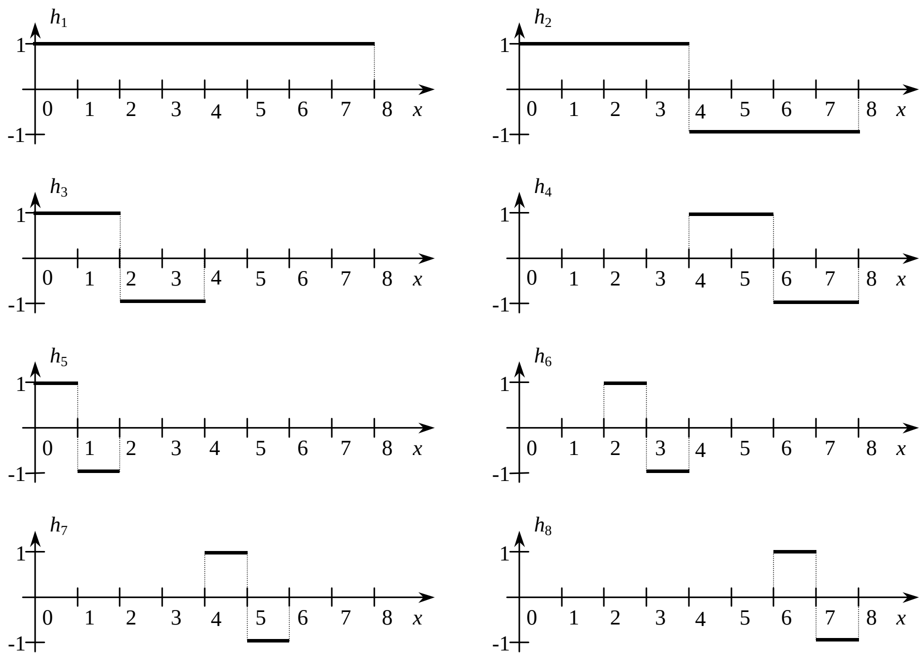
Příklad 19.9. Nechť $\mathscr{V}$ je vektorový prostor všech po částech konstantních funkcí na intervalu $(0, 8]$, které mají skoky v celých číslech, v nichž jsou spojité zleva. Na tomto prostoru definujeme skalární součin předpisem

$$(f, g) = \int_0^8 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(1)g(1) + f(2)g(2) + \ldots + f(8)g(8).$$

Snadno se ukáže, že vektory Haarovy báze $\mathscr{H} = (h_1, \ldots, h_8)$, viz 19.3, jsou ortogonální. Vektory jsou uspořádány podle délky intervalu, na kterém jsou nenulové. Takto zvolená báze nám umožňuje analyzovat frekvenci změn funkce. Například podle (19.5) je

$$[[f]_{\mathscr{H}}]_8 = \frac{(h_8, f)}{(h_8, h_8)} = \frac{f(8) - f(7)}{2},$$

odkud lze usoudit, že velké poslední souřadnice charakterizují častou změnu funkce.



Obr. 19.3: Haarova báze

19.5. Schmidtův ortogonalizační proces

Kde vzít ortogonální bázi? V tomto článku si ukážeme, že z každé báze $\mathscr{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ prostoru $\mathscr{V}$ lze sestavit ortogonální bázi $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, která má tu vlastnost, že každý vektor $\mathbf{e}_i$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_i$.

Na začátku si všimneme, že $\mathbf{f}_1 \neq \mathbf{o}$, a položíme

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1.$$

Předpokládejme, že máme ortogonální vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ takové, že pro každé $i \in \{1, \ldots, k\}$ je vektor $\mathbf{e}_i$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_i$. Najdeme koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tak, aby

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{f}_{k+1} - \alpha_1 \mathbf{e}_1 - \ldots - \alpha_k \mathbf{e}_k$$

byl ortogonální k $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$. Jelikož pro $i \in \{1, \ldots, k\}$ by mělo platit

$$0 = (\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{f}_{k+1} - \alpha_1 \mathbf{e}_1 - \ldots - \alpha_k \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{e}_i) - \alpha_i \|\mathbf{e}_i\|^2,$$

stačí položit $\alpha_i = (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{e}_i)/\|\mathbf{e}_i\|^2$. Vektor $\mathbf{e}_{k+1}$ je zřejmě nenulový, neboť jej můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{k+1}$ s koeficientem 1 u $\mathbf{f}_{k+1}$. Právě popsaný algoritmus se nazývá *Schmidtův ortogonalizační proces*. Normalizací vektorů báze $\mathscr{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ dostaneme ortonormální bázi $\mathscr{G} = (\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n)$ s vektory

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{e}_1\|}, \ \ldots, \ \mathbf{g}_n = \frac{\mathbf{e}_n}{\|\mathbf{e}_n\|}.$$

Příklad 19.10. Nechť
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$
Najděte ortogonální bázi $\mathbb{R}^3$ vzhledem ke skalárnímu součinu
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbf{A}} = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y}.$$

Řešení. Bázi sestavíme Schmidtovým ortonormalizačním procesem ze standardní báze $\mathscr{S} = (\mathbf{s^I}_1, \mathbf{s^I}_2, \mathbf{s^I}_3)$.

- $$\mathbf{e}_1 = \mathbf{s}^{\mathbf{I}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Položíme $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}^{\mathbf{I}}_2 - \alpha \mathbf{e}_1$ a určíme α aby platilo
$$0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)_{\mathbf{A}} = \mathbf{e}_1^\top \mathbf{A} \mathbf{s}^{\mathbf{I}}_2 - \alpha \mathbf{e}_1^\top \mathbf{A} \mathbf{e}_1 = -1 - 2\alpha,$$
odkud $\alpha = -\frac{1}{2}$ a
$$\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Položíme $\mathbf{e}_3 = \mathbf{s}^{\mathbf{I}}_3 - \alpha_1 \mathbf{e}_1 - \alpha_2 \mathbf{e}_2$ a určíme α_1, α_2 aby platilo
$$\begin{array}{ccccccc} 0 & = & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)_{\mathbf{A}} & = & \mathbf{e}_1^\top \mathbf{A} \mathbf{s}^{\mathbf{I}}_3 - \alpha_1 \mathbf{e}_1^\top \mathbf{A} \mathbf{e}_1 & = & -2\alpha_1, \\ 0 & = & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)_{\mathbf{A}} & = & \mathbf{e}_2^\top \mathbf{A} \mathbf{s}^{\mathbf{I}}_3 - \alpha_2 \mathbf{e}_2^\top \mathbf{A} \mathbf{e}_2 & = & -1 - \frac{3}{2}\alpha_2. \end{array}$$
Řešením této soustavy dostaneme $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -\frac{2}{3}$ a
$$\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

▲

19.6. Ortogonální matice

Čtvercová matice $\mathbf{U}$, která splňuje $\mathbf{U}^\top \mathbf{U} = \mathbf{I}$, se nazývá *ortogonální matice*. Ortogonální matice má tedy ortonormální sloupce a splňuje $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\top$. Následující věta nám říká, že násobení ortogonální maticí zachovává délky i úhly vektorů.

Věta 19.11. *Nechť* $\mathbf{U}$ *je čtvercová matice řádu* n*. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

$$\mathbf{U}^\top\mathbf{U} = \mathbf{I}. \tag{i}$$

Pro všechny sloupcové vektory $\mathbf{x}$ *řádu* n *platí*

$$(\mathbf{U}\mathbf{x})^\top(\mathbf{U}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top\mathbf{x}. \tag{ii}$$

Pro všechmy sloupcové vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *řádu* n *platí*

$$(\mathbf{U}\mathbf{x})^\top(\mathbf{U}\mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top\mathbf{y}. \tag{iii}$$

Důkaz. Z i plyne ii. Z $\mathbf{U}^\top\mathbf{U} = \mathbf{I}$ plyne

$$(\mathbf{U}\mathbf{x})^\top(\mathbf{U}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top\mathbf{U}^\top\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top\mathbf{x}.$$

Z ii plyne iii. Ověří se použitím (**??**) a předpokladu.

Z iii plyne i. Z předpokladu dostaneme pro sloupce $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j$ jednotkové matice

$$\left[\mathbf{U}^\top\mathbf{U}\right]_{ij} = \mathbf{s}_i^\top\mathbf{U}^\top\mathbf{U}\mathbf{s}_j = (\mathbf{U}\mathbf{s}_i)^\top\mathbf{U}\mathbf{s}_j = \mathbf{s}_i^\top\mathbf{s}_j = \mathbf{s}_i^\top\mathbf{I}\mathbf{s}_j = [\mathbf{I}]_{ij}\,.$$

□

Ortogonální matice se uplatní v numerických metodách, neboť jejich inverzní matice lze získat transponováním a jejich násobením se nezesilují zaokrouhlovací chyby.

Příklady k procvičení

!

1. Určete pomocí Schmidtova ortogonalizačního procesu ortonormální bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ lineárního obalu vektorů $\mathbf{v}_1 = [1, 1, 1, 1]$, $\mathbf{v}_2 = [0, 1, 1, 1]$, $\mathbf{v}_3 = [1, 0, 1, 1]$ a najděte souřadnice vektorů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ v bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

2. Ověřte, že matice

$$\mathbf{U}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

je ortogonální. Popište geometricky účinek násobení maticí $\mathbf{U}(\alpha)$.

3. Využijte báze $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ z příkladu 19.10 k řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

Řešení hledejte ve tvaru lineární kombinace vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Kapitola 20

Induktivní definice determinantu

Průvodce studiem

Snaha o nalezení vzorce pro řešení soustav lineárních rovnic vedla k zavedení funkce jejich koeficientů, která se nazývá determinant. Determinant má mnoho vlastností, které se uplatní v teorii a při číselném řešení některých problémů formulovaných pomocí malých matic. Pomocí determinantů lze například zformulovat kritéria pro testování pozitivní definitnosti nebo regulárnosti matic. S použitím determinantů se budeme seznamovat postupně. Mnoho problémů, jejichž řešení lze explicitně popsat pomocí determinantů, však lze řešit efektivněji bez jejich použití.

Cíle

Naučíte se:

- vypočítat determinant čtvercové matice podle definice.

20.1. Explicitní řešení malých soustav

Abychom získali představu o struktuře vzorců pro řešení soustavy n lineárních rovnic o n neznámých, odvodíme si tyto vzorce pro $n = 1, 2, 3$.

Pro $n = 1$ dostaneme pro $a_{11} \neq 0$ elementárně

$$a_{11}x_1 = b_1, \quad x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \ . \tag{20.1}$$

Pro $n = 2$ budeme řešit soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \ . \end{aligned} \tag{20.2}$$

Úpravami, které nepoužívají dělení, dostaneme

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \; a_{22}r_1 - a_{12}r_2 \quad \mapsto \quad \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 & b_1a_{22} - a_{12}b_2 \end{array}\right] \tag{20.3}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \; a_{11}r_2 - a_{21}r_1 \quad \mapsto \quad \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & b_2a_{11} - a_{21}b_1 \end{array}\right] \tag{20.4}$$

odkud pro $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ dostaneme

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\,, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\,. \tag{20.5}$$

Obdobně, avšak pracněji, bychom mohli odvodit řešení soustavy

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3. \end{array} \tag{20.6}$$

Dostali bychom například vzorec

$$x_1 = \frac{(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})b_1 + (a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33})b_2 + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})b_3}{a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})}, \tag{20.7}$$

který má také smysl pouze pro nenulový jmenovatel.

Nyní si všimněme, že ve všech třech případech lze čitatele i jmenovatele vyjádřit pomocí jedné funkce matice. Nejjednodušší je to pro $n = 1$, kdy stačí označit si formálně

$$\det\,[a] = |a| = a, \tag{20.8}$$

takže řešení (20.1) lze zapsat ve tvaru

$$x_1 = \frac{|b_1|}{|a_{11}|}\,. \tag{20.9}$$

Pro $n = 2$ si označme

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = a|d| - b|c|. \tag{20.10}$$

Řešení soustavy (20.5) lze zapsat za pomocí tohoto označení ve tvaru

$$x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} / d\,, \quad x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} / d\,, \tag{20.11}$$

kde

$$d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{20.12}$$

Konečně pro $n = 3$ si zaveďme označení

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$
$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \qquad (20.13)$$
$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Řešení x_1 lze pak zapsat ve tvaru

$$x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} / d, \quad d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (20.14)$$

Vzorce (20.8), (20.10) a (20.13) nám tedy definují funkce matic, s jejichž pomocí můžeme napsat *vzorce* pro řešení soustav (20.1), (20.2) a (20.6). Tyto vzorce nám dávají i určité vodítko k obecné definici determinantu, který zde chápeme jako funkci matice, s jejíž pomocí můžeme zapsat vzorec pro řešení soustavy lineárních rovnic.

20.2. Induktivní definice determinantu

Pro každou čtvercovou matici $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, nechť $\mathbf{M}_{ij}^{\mathbf{A}}$ značí matici, která vznikne vyškrtnutím jejího i-tého řádku a j-tého sloupce. Matice $\mathbf{M}_{ij}^{\mathbf{A}}$ se nazývá *minor* matice $\mathbf{A}$ příslušný k dvojici indexů (i, j). Například

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{12}^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Definice 20.1. Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu n s reálnými nebo komplexními prvky. *Determinant matice* $\mathbf{A}$ je číslo, které značíme $\det \mathbf{A}$ nebo $|\mathbf{A}|$ a vypočteme jej podle následujících pravidel:

- (D1) Je-li $n = 1$, pak $\det \mathbf{A} = \det [a_{11}] = a_{11}$.
- (D2) Předpokládejme, že $n > 1$ a že umíme určit determinant libovolné čtvercové matice řádu $n - 1$. Pak

$$\det \mathbf{A} = a_{11}|\mathbf{M}_{11}^{\mathbf{A}}| - a_{12}|\mathbf{M}_{12}^{\mathbf{A}}| + a_{13}|\mathbf{M}_{13}^{\mathbf{A}}| - \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}|\mathbf{M}_{1n}^{\mathbf{A}}| \qquad (20.15)$$

Determinant matice je tedy funkce *prvků* matice, která je definovámа explicitně pro $n = 1$ a pro $n > 1$ je definována pomocí pravidla, které definuje determinant matice řádu n pomocí determinantů řádu $n-1$. Výpočet determinantu matice n-tého řádu se tedy pomocí pravidla (D2) redukuje napřed na výpočty determinantů matice řádu $n-1$, pak se výpočet determinantu každé matice řádu $n-1$ redukuje pomocí téhož pravidla na výpočty determinantů matic řádu $n-2$, až se problém redukuje na výpočty determinantů matic prvního řádu, které se určí podle pravidla (D1). Například

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -8.$$

Pro obecnou dolní trojúhelníkovou matici $\mathbf{L} = [l_{ij}]$ ($l_{ij} = 0$, je–li $i < j$) si můžeme odvodit, že determinant $\mathbf{L}$ je roven součinu diagonálních prvků matice $\mathbf{L}$, neboť

$$\begin{vmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{vmatrix} = l_{11}\begin{vmatrix} l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{vmatrix} = \dots = l_{11}\cdots l_{nn}. \qquad (20.16)$$

Odtud speciálně plyne

$$\det \mathbf{I} = 1. \qquad (20.17)$$

Pro mírné zpřehlednění zápisu vzorce (20.15) si definujme *algebraický doplněk* matice $\mathbf{A}$ příslušný k dvojici indexů (i, j) předpisem

$$\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\left|\mathbf{M}_{ij}^{\mathbf{A}}\right|.$$

Vzorec (20.15) lze pak přepsat ve tvaru

$$\det \mathbf{A} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + \dots + a_{1n}\mathbf{A}_{1n}. \qquad (20.18)$$

20.3. Výpočetní náročnost

Determinant matice n-tého řádu počítaný podle pravidla (D2) vyžaduje vyčíslení součtu n součinů čísel a determinantů matic řádu $n-1$. Použijeme-li pravidlo (D2) na determinanty řádu $n-1$, dostaneme, že vyčíslení determinantu matice n-tého řádu vyžaduje vyčíslení součtu $n(n-1)$ součinů dvou čísel a determinantů řádu $n-2$. Opakováním tohoto postupu zjistíme, že vyčíslení determinantu matice n-tého řádu vyžaduje $n!$ sčítanců tvořených součiny n čísel, tj. celkem $(n-1)n!$ součinů. To je číslo tak obrovské, že vyčíslení determinantů řádu 30 podle induktivní definice by na počítači s bilionem (10^{12}) operací za vteřinu trvalo biliony let! Naštěstí se sotva vyskytne potřeba počítat determinanty tak velkých matic (na rozdíl od řešení soustav). Navíc existují efektivnější postupy výpočtu determinantů, s nimiž se postupně seznámíme.

Kapitola 21

Determinant a antisymetrické formy

Průvodce studiem

V této kapitole se seznámíme s vlastnostmi determinantu, které nám umožní pochopit souvislosti s některými známými pojmy, zejména s lineárními funkcionály a bilineárními formami. Budou nás přitom zajímat zejména ty vlastnosti determinantu, které se objeví, když se na determinant budeme dívat jako na funkci celých řádků matice. Abychom se vyhnuli nepřehledným zápisům manipulací s řádky matice $\mathbf{A}$*, budeme označovat hvězdičkou * submatice* $\mathbf{A}$*, které se manipulací nezúčastní.*

21.1. Linearita v prvním řádku

Věta 21.1. *Nechť* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *a* $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ *jsou čtvercové matice, které se liší nanejvýš v prvním řádku, a* α *je libovolný skalár. Pak*

$$\begin{vmatrix} \alpha \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} = \alpha \det \mathbf{A} \quad a \quad \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} + \mathbf{r}_1^{\mathbf{B}} \\ * \end{vmatrix} = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}\ . \tag{21.1}$$

Důkaz. Podle definice determinantu platí

$$\begin{vmatrix} \alpha \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha a_{11}\mathbf{A}_{11} + \dots + \alpha a_{1n}\mathbf{A}_{1n} = \alpha \det \mathbf{A}$$

a

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} + \mathbf{r}_1^{\mathbf{B}} \\ * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (a_{11}+b_{11})\mathbf{A}_{11} + \dots + (a_{1n}+b_{1n})\mathbf{A}_{1n} =$$
$$= (a_{11}\mathbf{A}_{11} + \dots + a_{1n}\mathbf{A}_{1n}) + (b_{11}\mathbf{A}_{11} + \dots + b_{1n}\mathbf{A}_{1n}) = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}.$$

□

21.2. Antisymetrie v prvních dvou řádcích

Věta 21.2. *Nechť* $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ *je čtvercová matice řádu* $n \geq 2$. *Pak*

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix}. \tag{21.2}$$

Důkaz. Pro $n = 2$ platí

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -(a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11}) = - \begin{vmatrix} \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \end{vmatrix}.$$

Důkaz pro obecnější případ se provede rozepsáním determinantů minorů v (20.15) a vhodnou úpravou. Úplný důkaz je však komplikovaný. □

21.3. Antisymetrie v libovolné dvojici řádků

Věta 21.3. *Nechť* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *je čtvercová matice řádu* $n \geq 2$, *nechť* $i < j$ *a nechť* $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ *je matice, která vznikla z matice* $\mathbf{A}$ *vzájemnou výměnou* i*-tého a* j*-tého řádku. Pak*

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} * \\ \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \\ * \\ \mathbf{r}_j^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} * \\ \mathbf{r}_j^{\mathbf{A}} \\ * \\ \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} = -\det \mathbf{B}. \tag{21.3}$$

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí. Pro $n = 2$ tvrzení platí podle věty 21.2. Abychom tvrzení dokázali pro $n > 2$, předpokládejme, že (21.3) platí pro matice řádu 2,. . . ,n-1 a že $1 \le i < j \le n$. Rozepišme si det $\mathbf{A}$ podle definice na tvar

$$\det \mathbf{A} = a_{11}|\mathbf{M}^{\mathbf{A}}_{11}| - a_{12}|\mathbf{M}^{\mathbf{A}}_{12}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}|\mathbf{M}^{\mathbf{A}}_{1n}|.$$

Budeme rozlišovat dva případy:

1. Pro $1 < i$ tvrzení platí, neboť každá submatice $\mathbf{M}^{\mathbf{B}}_{1k}$ vznikne podle předpokladu z $\mathbf{M}^{\mathbf{A}}_{1k}$ výměnou příslušných řádků, takže pomocí indukčního předpokladu a $a_{11} = b_{11}, \dots, a_{1n} = b_{1n}$ dostaneme

$$\begin{aligned} \det \mathbf{B} &= b_{11}|\mathbf{M}^{\mathbf{B}}_{11}| - b_{12}|\mathbf{M}^{\mathbf{B}}_{12}| + \cdots + (-1)^{n+1}b_{1n}|\mathbf{M}^{\mathbf{B}}_{1n}| = \\ &= a_{11}\left(-|\mathbf{M}^{\mathbf{A}}_{11}|\right) - a_{12}\left(-|\mathbf{M}^{\mathbf{A}}_{12}|\right) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\left(-|\mathbf{M}^{\mathbf{A}}_{1n}|\right) = -\det \mathbf{A}. \end{aligned}$$

2. Jestliže $i = 1$, pak pomocí dokázaného tvrzení a věty 21.2 dostaneme postupně

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_j \\ \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_2 \\ * \\ \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_1 \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_j \\ \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_1 \\ * \\ \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_2 \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_1 \\ \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_j \\ * \\ \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_2 \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_1 \\ \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_2 \\ * \\ \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_j \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} = -\det \mathbf{A}.$$

□

21.4. Linearita v libovolném řádku

Věta 21.4. *Nechť* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *jsou čtvercové matice, které mají stejné řádky s výjimkou* k*-tého. Pak pro libovolné* α *platí*

$$\begin{matrix} \\ k \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} * \\ \alpha\mathbf{r}^{\mathbf{A}}_k \\ * \end{vmatrix} = \alpha \det \mathbf{A} \quad a \quad \begin{matrix} \\ k \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} * \\ \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_k + \mathbf{r}^{\mathbf{B}}_k \\ * \end{vmatrix} = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}. \tag{21.4}$$

Důkaz. Pro $k = 1$ jsme tvrzení dokázali větou 21.1.

Pro $k > 1$ dostaneme postupným použitím věty 21.3 a 21.1

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_1 \\ * \\ \alpha\mathbf{r}^{\mathbf{A}}_k \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ k \\ \\ \end{matrix} = - \begin{vmatrix} \alpha\mathbf{r}^{\mathbf{A}}_k \\ * \\ \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_1 \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ k \\ \\ \end{matrix} = -\alpha \begin{vmatrix} \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_k \\ * \\ \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_1 \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ k \\ \\ \end{matrix} = \alpha \begin{vmatrix} \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_1 \\ * \\ \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_k \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ k \\ \\ \end{matrix} = \alpha \det \mathbf{A}$$

a

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_1 \\ * \\ \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_k + \mathbf{r}^{\mathbf{B}}_k \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ k \\ \\ \end{matrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_k + \mathbf{r}^{\mathbf{B}}_k \\ * \\ \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_1 \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ k \\ \\ \end{matrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_k \\ * \\ \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_1 \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ k \\ \\ \end{matrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{r}^{\mathbf{B}}_k \\ * \\ \mathbf{r}^{\mathbf{B}}_1 \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ k \\ \\ \end{matrix} = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}.$$

$\square$

Věty 21.3 a 21.4 můžeme shrnout tvrzením, že *determinant je antisymetrická bilineární forma libovolné dvojice řádků matice.*

Důsledek 21.5. Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná čtvercová matice:

i) Má-li $\mathbf{A}$ dva stejné řádky, pak $\det \mathbf{A} = 0$.
ii) Má-li $\mathbf{A}$ nulový řádek, pak $\det \mathbf{A} = 0$.
iii) Je-li $\mathbf{B}$ čtvercová matice, která má stejné řádky jako $\mathbf{A}$ s výjimkou k-tého, a

$$\mathbf{r}_k^{\mathbf{B}} = \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} + \alpha \mathbf{r}_l^{\mathbf{A}}, \quad k \neq l,$$

pak $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$.
iv) Jsou-li řádky $\mathbf{A}$ lineárně závislé, pak $\det \mathbf{A} = 0$.

Důkaz. i) Jestliže v matici $\mathbf{A}$ vyměníme dva stejné řádky, matice se nezmění, avšak podle věty 21.3 dostaneme

$$\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A}.$$

Odtud $\det \mathbf{A} = 0$.

ii) Nechť $\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} = \mathbf{o}$. Pak s použitím věty 21.4 dostaneme

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} * \\ \mathbf{o} \\ * \end{vmatrix} \; i \; = \begin{vmatrix} * \\ 0 \cdot \mathbf{o} \\ * \end{vmatrix} \; i \; = 0 \begin{vmatrix} * \\ \mathbf{o} \\ * \end{vmatrix} = 0.$$

iii) Podle věty 21.4 a důsledku 21.5 platí

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} * \\ \mathbf{r}_l^{\mathbf{A}} \\ * \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} + \alpha \mathbf{r}_l^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ l \\ \\ k \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} * \\ \mathbf{r}_l^{\mathbf{A}} \\ * \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ l \\ \\ k \\ \\ \end{matrix} + \begin{vmatrix} * \\ \mathbf{r}_l^{\mathbf{A}} \\ * \\ \alpha \mathbf{r}_l^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ l \\ \\ k \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} * \\ \mathbf{r}_l^{\mathbf{A}} \\ * \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ l \\ \\ k \\ \\ \end{matrix} + \alpha \begin{vmatrix} * \\ \mathbf{r}_l^{\mathbf{A}} \\ * \\ \mathbf{r}_l^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ l \\ \\ k \\ \\ \end{matrix} = \det \mathbf{A}.$$

iv) Jsou-li řádky matice $\mathbf{A}$ lineárně závislé, pak podle věty 11.7 existuje index i a koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}$ tak, že

$$\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} = \alpha_1 \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} + \cdots + \alpha_{i-1} \mathbf{r}_{i-1}^{\mathbf{A}}.$$

Odtud

$$\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} - \alpha_1 \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} - \cdots - \alpha_{i-1} \mathbf{r}_{i-1}^{\mathbf{A}} = \mathbf{o}\ ,$$

takže podle (iii) a (ii) platí

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} * \\ \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} \; i \; = \begin{vmatrix} * \\ \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} - \alpha_1 \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} \; i \; = \cdots =$$

$$= \begin{vmatrix} * \\ \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} - \alpha_1 \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} - \cdots - \alpha_{i-1} \mathbf{r}_{i-1}^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} \; i \; = \begin{vmatrix} * \\ \mathbf{o} \\ * \end{vmatrix} \; i \; = 0\,.$$

□

21.5. Výpočet hodnoty determinantu

V článcích 21.3 a 21.4 jsme si ukázali, že elementární řádkové úpravy ovlivňují velmi jednoduše hodnotu determinantu. Přičtení násobku některého řádku k jinému ji nezmění vůbec, vzájemná výměna dvou řádků změní její znaménko a vynásobení řádku skalárem ji vynásobí tímto skalárem. Elementární řádkové úpravy matice proto můžeme využít k převodu matice na speciální tvar vhodný pro výpočet determinantu. Pro nás je to prozatím dolní trojúhelníková matice, jejíž determinant je podle (20.16) roven součinu diagonálních prvků. Brzy uvidíme, že stejně se vypočte i determinant horní trojúhelníkové matice.

Příklad 21.6.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_3 \\ \mathrm{r}_2 + 2\mathrm{r}_3 \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathrm{r}_1 - 3\mathrm{r}_3 \\ \\ \end{matrix} = 2 \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-6) \cdot 1 \cdot (-1) = 12$$

Příklad 21.7.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{r}_3 \\ \mathrm{r}_2 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \; \mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_3 = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \; \mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2 = - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(-2) \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

21.6. Determinant součinu matic

Věta 21.8. *Nechť* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *jsou čtvercové matice řádu* n*. Pak*

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}.$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $\mathbf{A}$ je diagonální, tedy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}.$$

Pak

$$\det(\mathbf{AB}) = \begin{vmatrix} d_1 \mathbf{r}_1^{\mathbf{B}} \\ \vdots \\ d_n \mathbf{r}_n^{\mathbf{B}} \end{vmatrix} = d_1 \cdots d_n \det \mathbf{B} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} \,.$$

Je-li $\mathbf{A}$ libovolná regulární matice, pak existují matice $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_k$ sestávající z l elementárních permutačních matic (8.1) a $k-l$ matic Gaussových transformací (8.3), které splňují

$$\mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

Jelikož násobení maticí Gaussovy transformace realizuje přičtení některého řádku k jinému a násobení permutační maticí realizuje výměnu řádků, platí

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{AB}) &= (-1)^l \det(\mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{AB}) = (-1)^l \det(\mathbf{DB}) = (-1)^l \det \mathbf{D} \cdot \det \mathbf{B} = \\ &= (-1)^l \det(\mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{A}) \cdot \det \mathbf{B} = (-1)^l (-1)^l \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} \,. \end{aligned}$$

Je-li konečně $\mathbf{A}$ singulární, pak $\mathbf{A}$ má závislé řádky a existují matice $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_k$ Gaussových transformací tak, že matice $\mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{A}$ má nulový řádek. Pak má však nulový řádek i matice $\mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{AB}$ a podle důsledku (ii) z článku 21.4 platí

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{AB}) = 0.$$

□

Příklady k procvičení

!

1. Dokažte, že pro libovolnou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ řádu n a skalár α platí

$$\det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^n \det \mathbf{A}.$$

2. Vypočtěte:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

3. Ověřte, že

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

je antisymetrická bilineární forma definovaná pro reálné aritmetické vektory $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$ a $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]$.

Kapitola 22

Determinant a inverzní matice

Průvodce studiem

Spojením induktivní definice determinantu s výsledky předchozí kapitoly dostaneme vztahy, jejichž maticová interpretace vede ke vzorcům pro inverzní matici a řešení soustav. Snadno odvodíme i některé další vlastnosti determinantů. Budeme přitom používat stejné konvence jako v kapitole 21.

22.1. Rozvoj determinantu podle prvků libovolného řádku

Věta 22.1. *Jestliže* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *je čtvercová matice řádu* $n > 1$*, pak pro libovolný index* k *platí*

$$\det \mathbf{A} = a_{k1}\mathbf{A}_{k1} + \cdots + a_{kn}\mathbf{A}_{kn} \ . \tag{22.1}$$

Důkaz. Pro libovolné k dostaneme postupnou výměnou původně k-tého řádku s řádkem bezprostředně nad ním

$$\det \mathbf{A} = \left|\begin{matrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{k-1}^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} \\ * \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ k-1 \\ k \\ \end{matrix} = - \left|\begin{matrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_{k-1}^{\mathbf{A}} \\ * \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ k-1 \\ k \\ \end{matrix} = \cdots = (-1)^{k-1} \left|\begin{matrix} \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{k-2}^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_{k-1}^{\mathbf{A}} \\ * \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ k-1 \\ k \\ \end{matrix} =$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^{k-1}\left(a_{k1}|\mathbf{M}_{k1}^{\mathbf{A}}| - a_{k2}|\mathbf{M}_{k2}^{\mathbf{A}}| + \cdots + (-1)^{n+1}|\mathbf{M}_{kn}^{\mathbf{A}}|\right) = \\ &= (-1)^{k+1}a_{k1}|\mathbf{M}_{k1}^{\mathbf{A}}| + \cdots + (-1)^{k+n}|\mathbf{M}_{kn}^{\mathbf{A}}| = \\ &= a_{k1}\mathbf{A}_{k1} + \cdots + a_{kn}\mathbf{A}_{kn} \ . \end{aligned}$$

□

Důsledek 22.2. Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu $n > 1$.

i) Jsou-li k, l dva různé indexy řádků matice $\mathbf{A}$, pak

$$a_{k1}\mathbf{A}_{l1} + \cdots + a_{kn}\mathbf{A}_{ln} = 0. \tag{22.2}$$

ii) Je-li $\mathbf{A}$ trojúhelníková matice, pak

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \cdots a_{nn}. \tag{22.3}$$

Důkaz. i) Povšimněme si, že hodnota $\mathbf{A}_{li}$ vůbec nezávisí na l-tém řádku matice $\mathbf{A}$. Platí tedy

$$a_{k1}\mathbf{A}_{l1} + \cdots + a_{kn}\mathbf{A}_{ln} = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} * \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} \\ * \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} \\ * \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} \\ k \\ \\ l \\ \\ \end{array} = 0\ .$$

ii) Je-li $\mathbf{A}$ dolní trojúhelníková matice, platí (22.3) podle (20.15). Je-li $\mathbf{A}$ horní trojúhelníková matice, pak opakovaným použitím (22.1) dostaneme postupně

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2\,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1\,n-1} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

□

22.2. Adjungovaná a inverzní matice

Abychom si mohli zapsat rovnosti (22.1) a (22.2) maticově, zavedeme si nejprve nový pojem.

Definice 22.3. Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná čtvercová matice řádu $n > 1$. Pak *adjungovaná matice* $\widetilde{\mathbf{A}}$ k matici $\mathbf{A}$ je čtvercová matice stejného řádu definovaná předpisem

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{1n} & \dots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix}\ . \tag{22.4}$$

Příklad 22.4. Pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{22.5}$$

platí

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2, \qquad \mathbf{A}_{12} = -\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = -(-2-6) = 8,$$

$$\mathbf{A}_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 2, \qquad \mathbf{A}_{21} = -\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -(-2-1) = 3,$$

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = -3-3 = -6, \qquad \mathbf{A}_{23} = -\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 3,$$

$$\mathbf{A}_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 4, \qquad \mathbf{A}_{32} = -\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = -4,$$

$$\mathbf{A}_{33} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -4,$$

takže

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 8 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} . \tag{22.6}$$

Věta 22.5. *Nechť* $\mathbf{A}$ *je čtvercová regulární matice řádu* $n > 1$. *Pak* $\det \mathbf{A} \neq 0$ *a*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \widetilde{\mathbf{A}} . \tag{22.7}$$

Důkaz. Je-li $\mathbf{A}$ čtvercová regulární matice, pak existuje posloupnost elementárních řádkových operací, která převede $\mathbf{A}$ na jednotkovou matici $\mathbf{I}$. Jelikož determinant matice upravené elementární transformace se může od determinantu původní matice lišit jen nenulovým násobkem a $\det \mathbf{I} = 1$, platí $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Nyní si povšimněme, že (22.1) a (22.2) můžeme zapsat maticově pomocí adjungované matice ve tvaru

$$\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{A}} = (\det \mathbf{A}) \cdot \mathbf{I}.$$

Odtud

$$\mathbf{A} \left(\frac{1}{\det \mathbf{A}} \widetilde{\mathbf{A}} \right) = \mathbf{I}.$$

$\square$

Příklad 22.6. Pro matici $\mathbf{A}$ definovanou rovností (22.5) dostaneme s využitím (22.6)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 8 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} .$$

Správnost výsledku si můžeme ověřit vynásobením.

Důsledek 22.7. Matice $\mathbf{A}$ je regulární, právě když $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Důkaz. Je-li $\mathbf{A}$ singulární, pak má závislé řádky, takže podle důsledku (iv) části 21.4 platí $\det \mathbf{A} = 0$. Obrácené tvrzení plyne z právě dokázané věty. $\square$

22.3. Determinant transponované matice

Věta 22.8. *Nechť* $\mathbf{A}$ *je čtvercová matice. Pak*

$$\det \mathbf{A}^\top = \det \mathbf{A}. \tag{22.8}$$

Důkaz provedený na základě **LU** rozkladu lze najít ve skriptech Prof. Dostála: *Lineární algebra*, které vydala VŠB-TU Ostrava.

22.4. Determinant jako funkce sloupců

Ze vztahu (22.8) vyplývá, že determinant považovaný za funkci sloupců má stejné vlastnosti jako determinant považovaný za funkci řádků. Například *determinant je antisymetrická bilineární forma libovolné dvojice sloupců matice.*

Způsob odvození si budeme ilustrovat na důkazu následující věty o rozvoji determinantu podle sloupců, kterou upotřebíme v článku 22.5.

Věta 22.9. *Nechť* $\mathbf{A}$ *je čtvercová matice řádu* $n > 1$. *Pak pro* $i = 1, \dots, n$ *platí*

$$\det \mathbf{A} = a_{1i}\mathbf{A}_{1i} + \dots + a_{ni}\mathbf{A}_{ni}. \tag{22.9}$$

Důkaz. S použitím věty 22.8 dostaneme

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^\top = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1i} & \dots & a_{ni} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{i+1} a_{1i} |\mathbf{M}_{1i}^\top| + \dots + (-1)^{i+n} a_{ni} |\mathbf{M}_{ni}^\top| = \\ &= (-1)^{i+1} a_{1i} |\mathbf{M}_{1i}| + \dots + (-1)^{i+n} a_{ni} |\mathbf{M}_{ni}| = \\ &= a_{1i}\mathbf{A}_{1i} + \dots + a_{ni}\mathbf{A}_{ni}\ . \end{aligned}$$

$\square$

22.5. Cramerovy vzorce pro řešení soustav

Použijeme-li vzorec (22.6) pro inverzní matici k řešení soustavy

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{22.10}$$

s regulární čtvercovou maticí $\mathbf{A}$ řádu $n > 1$, dostaneme pro složky x_i řešení $\mathbf{x}$ vzorce

$$x_i = \left[\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\right]_i = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\left(\mathbf{A}_{1i}b_1 + \cdots + \mathbf{A}_{ni}b_n\right) . \tag{22.11}$$

Povšimneme-li si, obdobně jako při odvození (22.2), že minory příslušné k prvkům i-tého sloupce neobsahují prvky i-tého sloupce, můžeme výraz v kulaté závorce (22.11) považovat za rozvoj determinantu matice

$$\mathbf{A}_i^{\mathbf{b}} = \left[\ * \ \overset{i}{\mathbf{b}} \ * \ \right] = \left[\ \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} \ \ \ldots \ \ \mathbf{s}_{i-1}^{\mathbf{A}} \ \ \overset{i}{\mathbf{b}} \ \ \mathbf{s}_{i+1}^{\mathbf{A}} \ \ \ldots \ \ \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}}\ \right] , \tag{22.12}$$

která vznikne z $\mathbf{A}$ záměnou i-tého sloupce za $\mathbf{b}$ podle i-tého sloupce. Výrazy

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i^{\mathbf{b}}}{\det \mathbf{A}}, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{22.13}$$

se nazývají *Cramerovy vzorce*. Jejich speciální případy jsme si odvodili elementárními výpočty v kapitole 20.

Příklad 22.10. Najděte řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \tag{22.14}$$

pomocí Cramerových vzorců.

Řešení. Postupně vypočteme determinant matice soustavy

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 12$$

a čitatele Cramerových vzorců

$$|\mathbf{A}_1^{\mathbf{b}}| = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 12, \quad |\mathbf{A}_2^{\mathbf{b}}| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 48, \quad |\mathbf{A}_3^{\mathbf{b}}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

Odtud

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1^{\mathbf{b}}|}{\det \mathbf{A}} = 1, \quad x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2^{\mathbf{b}}|}{\det \mathbf{A}} = 4, \quad x_3 = \frac{|\mathbf{A}_3^{\mathbf{b}}|}{\det \mathbf{A}} = -1.$$

▲

22.6. Použití Cramerových vzorců

Cramerovy vzorce, které jsme si odvodili v kapitole 22.5, lze považovat za úplné řešení soustavy lineárních rovnic v tom smyslu, že ho redukují na vyčíslení součtů a součinů, prakticky dosazení do vzorečku. To je užitečné zejména v případech, kdy potřebujeme vyjádřit řešení malé soustavy s proměnnými koeficienty. Jelikož se k efektivnímu výpočtu determinantu číselné matice obvykle vyplatí upravit matici na trojúhelníkový tvar, který lze přímo použít k řešení soustavy, lze si jen těžko představit efektivní využití Cramerových vzorců k řešení rovnic s číselnými koeficienty. Obdobné úvahy platí i pro vzorce pro výpočet inverzní matice.

Příklady k procvičení

1. Vypočtěte:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

   a) rozvojem podle třetího řádku.
   b) rozvojem podle druhého sloupce.

2. Vyjádřete řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcl} (p+2)x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \end{array}$$

   v závislosti na parametru $p \geq 0$. K řešení použijte:

   a) vzorce pro inverzní matici.
   b) Cramerovy vzorce.

3. Najděte nenulové řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

   s využitím věty 22.1 a vzorce (22.2).

   Nápověda: Povšimněte si, že když opíšete kteroukoliv rovnici ještě jednou, získáte soustavu, jejíž determinant je roven nule.

4. Rozhodněte pomocí determinantu, zda má soustava

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

   jediné řešení.

Kapitola 23

Vlastní čísla a vektory

Průvodce studiem

Lineární transformace A obvykle nezobrazí daný vektor $\mathbf{v}$ na jeho násobek, takže $\mathbf{v}$ a $A\mathbf{v}$ jsou typicky nezávislé vektory. Výjimečně se však může stát, že existuje číslo λ tak, že $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Ukazuje se, že takové dvojice λ a $\mathbf{v}$ jsou velmi důležité pro pochopení lineárních transformací a matic. V aplikacích se s nimi setkáme například při studiu stability systémů, při analýze kmitání a při numerickém řešení rovnic rovnováhy či elektrického pole.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- najít vlastní čísla a vlastní vektory matice,
- určit část komplexní roviny, v níž se vlastní čísla nacházejí.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Obr. 23.1: Matice a její spektrum

23.1. Vlastní čísla a vektory

Definice 23.1. Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$ je lineární transformace definovaná na vektorovém prostoru $\mathscr{V}$. Jestliže existuje nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$ a skalár λ tak, že

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \tag{23.1}$$

pak se λ nazývá *vlastní číslo* transformace A, $\mathbf{v}$ se nazývá *vlastní vektor* příslušný k λ a $(\lambda, \mathbf{v})$ se nazývá *vlastní dvojice* transformace A.
Rovnost (23.1) si můžeme zapsat pomocí identity ve tvaru

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{o}, \tag{23.2}$$

takže λ *je vlastním číslem* A*, právě když* $A - \lambda I$ *není prosté zobrazení, a vlastní vektory* A *příslušné k* λ *jsou prvky jádra* $A - \lambda I$.

Množina všech vlastních čísel $A \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$ je podmnožinou množiny $\sigma(A)$ všech skalárů λ, pro které neexistuje $(A - \lambda I)^{-1}$. Množina $\sigma(A)$ se nazývá *spektrum* transformace A a pro transformace prostorů konečné dimenze je totožná s množinou všech vlastních čísel A. Slovo „spektrum“ znamená „duch“ a vystihuje skutečnost, že spektrum na matici není vidět, avšak s jeho pomocí se mnohé vlastnosti matic snadno vyloží, obdobně jako hýbání stolu na spiritistické seanci pomocí nějakého ducha. Je tu ovšem i rozdíl – pokud se něco dovíme o spektru matice, pomůže nám to řešit konkretní úlohy.

Příklad 23.2. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pak vektory standardní báze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ jsou vlastní vektory matice $\mathbf{A}$ odpovídající po řadě vlastním číslům 1 a 2, neboť

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vyjádříme-li si vektor $\mathbf{x}$ ve tvaru

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2,$$

pak si můžeme $\mathbf{Ax}$ vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{Ax} = 1 \cdot x_1\mathbf{e}_1 + 2 \cdot x_2\mathbf{e}_2.$$

Příklad 23.3. Nechť $\mathscr{F}$ je prostor všech reálných funkcí, které mají všechny derivace spojité. Označíme-li si D zobrazení, které každé funkci f přiřazuje její derivaci f', pak exponenciální funkce $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ splňuje

$$Df(x) = f'(x) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} = \lambda f(x).$$

Každé reálné číslo je tedy vlastním číslem D. Označíme-li si $g(x) = \sin(\lambda x)$, pak

$$-D^2 g(x) = -g''(x) = \lambda^2 \sin(\lambda x) = \lambda^2 g(x),$$

takže každé nezáporné číslo je vlastním číslem $-D^2$.

Příklad 23.4. Nechť $\mathscr{V}$ je libovolný vektorový prostor a I je identické zobrazení definované na $\mathscr{V}$. Pak pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$ platí

$$I\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v},$$

takže každý nenulový vektor je vlastním vektorem identity odpovídající vlastnímu číslu 1 a $\sigma(I) = \{1\}$.

23.2. Charakteristický mnohočlen a spektrum

Je-li $\mathbf{A}$ čtvercová matice, tak násobení maticí $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ není podle článku 14.4 prosté zobrazení, právě když $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ je singulární. Podle důsledku 22.7 tedy skalár $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$, právě když $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

Výraz $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ se nazývá *charakteristický mnohočlen* matice $\mathbf{A}$ a každé vlastní číslo $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ je kořenem *charakteristické rovnice*

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0. \tag{23.3}$$

Násobnost vlastního čísla λ jako kořene rovnice (23.3) se nazývá *algebraická násobnost*.

Podle takzvané základní věty algebry má každá algebraická rovnice s komplexními koeficienty alespoň jeden komplexní kořen. Odtud vyplývá, že *každá čtvercová matice* považovaná za transformaci komplexního prostoru *má neprázdné spektrum*.

Ukazuje se, že komplexní kořeny charakteristické rovnice mohou mít význam pro pochopení vlastností reálných matic, které obvykle vznikají při formulaci technických problémů. V dalším výkladu proto budeme uvažovat pouze komplexní vektorové prostory a komplexní matice. Připomeňme, že reálnou matici považujeme za zvláštní případ komplexní matice.

Řešením charakteristické rovnice můžeme vypočítat vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory malých matic. Například vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

vypočteme řešením rovnice

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

odkud $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$. Vlastní vektory matice $\mathbf{A}$ vypočteme postupně řešením soustav

$$\lambda_1 : \quad \begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \lambda_2 : \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0, \end{aligned}$$

odkud

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Snadno si ověříme, že

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

23.3. Neprázdnost spektra transformace

Věta 23.5. *Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$ je lineární transformace komplexního prostoru $\mathscr{V}$ konečné dimenze. Pak $\sigma(A) \neq \emptyset$.*

Důkaz. Nechť $\mathscr{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ je báze $\mathscr{V}$. Jelikož matice $\mathbf{A} = [A]_{\mathscr{F}}$ má neprázdné spektrum, podle článku 23.2, existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ a sloupcový vektor $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^\top$ tak, že

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

Označme si

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{f}_1 + \cdots + x_n \mathbf{f}_n \;,$$

takže $[\mathbf{v}]_{\mathscr{F}} = \mathbf{x}$. Pak

$$[A\mathbf{v}]_{\mathscr{F}} = [A]_{\mathscr{F}} [\mathbf{v}]_{\mathscr{F}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} = \lambda [\mathbf{v}]_{\mathscr{F}} = [\lambda \mathbf{v}]_{\mathscr{F}} \;,$$

takže $A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ a $\lambda \in \sigma(A)$. □

23.4. Invariantnost vzhledem k podobnosti

Vzhledem k tomu, že podobné matice lze považovat za matice téhož zobrazení v různých bázích, dá se očekávat, že podstatné charakteristiky podobných matic budou stejné.

Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná čtvercová matice a nechť

$$\mathbf{Ae} = \lambda \mathbf{v}. \tag{23.4}$$

Po přenásobení (23.4) libovolnou regulární maticí $\mathbf{T}$ dostaneme

$$\mathbf{TAe} = \lambda \mathbf{Te},$$

odtud

$$\mathbf{TAT}^{-1}(\mathbf{Te}) = \lambda(\mathbf{Te}).$$

Odtud plyne, že *podobné matice mají stejná vlastní čísla*.

Podobnost zachovává nejen spektrum, ale i charakteristický mnohočlen. Skutečně, použitím věty 21.8 o součinu determinantů a jednoduchými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{TAT}^{-1} - \lambda\mathbf{I}) = |\mathbf{TAT}^{-1} - \lambda\mathbf{TIT}^{-1}| = |\mathbf{T}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{T}^{-1}| = |\mathbf{T}||\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}||\mathbf{T}^{-1}| = \\ = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\ ,\end{aligned}$$

takže *podobné matice mají stejný charakteristický mnohočlen*.

23.5. Součet a součin vlastních čísel

I když jsme si řekli, že spektrum není na matici obvykle vidět, neznamená to, že na matici není vidět žádná informace o spektru. Ukážeme si to podrobnějším rozborem charakteristické rovnice.

Pomocí matematické indukce a induktivní definice determinantu lze dokázat, že pro čtvercovou matici $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ n-tého řádu platí

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (a_{11} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda) + p_{n-2}(\lambda), \tag{23.5}$$

kde p_{n-2} je mnohočlen řádu nejvýše $n-2$. Charakteristický mnohočlen (23.5) můžeme dále upravit na tvar

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (-\lambda)^n + (a_{11} + \cdots + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + q_{n-2}(\lambda), \tag{23.6}$$

s mnohočlenem q_{n-2} stupně nejvýše $n-2$. Jelikož charakteristický mnohočlen (23.5) je mnohočlen n-tého stupně, můžeme ho také vyjádřit pomocí základní věty algebry ve tvaru součinu kořenových činitelů

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= (\lambda_1 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda) = \\ &= (-\lambda)^n + (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \lambda_1\cdots\lambda_n\ .\end{aligned} \tag{23.7}$$

Po dosazení $\lambda = 0$ do (23.7) dostaneme

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1 \cdots \lambda_n \tag{23.8}$$

a porovnáním koeficientů u $(-\lambda)^{n-1}$ v (23.6) a (23.7)

$$a_{11} + \ldots + a_{nn} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n. \tag{23.9}$$

Součet diagonálních prvků matice se nazývá *stopa matice*.

Příklad 23.6. Určete součet a součin vlastních čísel matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Řešení. Nechť λ_1, λ_2 jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$. Pak

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 2 + 2 = 4 \\ \lambda_1 \lambda_2 &= 4 - 1 = 3\,. \end{aligned}$$

▲

23.6. Lokalizace vlastních čísel

Při řešení některých úloh není nutné mít úplnou informaci o spektru, ale stačí jen určit část komplexní roviny, kde se spektrum nachází. Například najdeme-li část komplexní roviny, která obsahuje spektrum dané matice $\mathbf{A}$ a neobsahuje nulu, budeme mít, podle (23.8), zaručeno, že $\mathbf{A}$ je regulární. Z tohoto důvodu je užitečná následující věta.

Věta 23.7. (Geršgorin). *Nechť* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *je čtvercová komplexní matice řádu* n *a nechť*

$$r_i = |a_{i1}| + \cdots + \widehat{|a_{ii}|} + \cdots + |a_{in}| \quad \text{a} \quad \mathscr{S}_i = \{x \in \mathbb{C} : |x - a_{ii}| \le r_i\},$$

kde stříška nad symbolem značí jeho vynechání. Pak

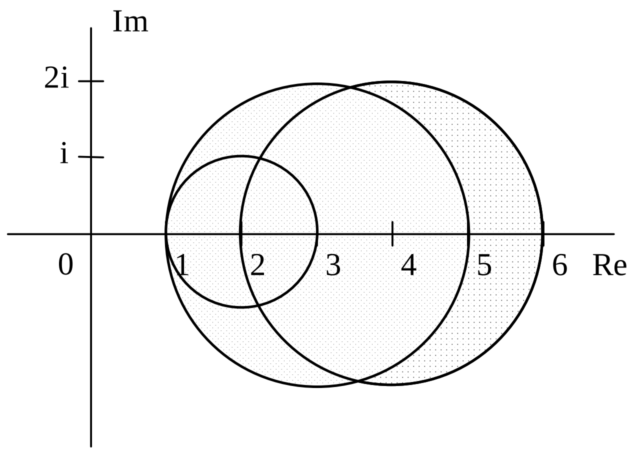
$$\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathscr{S}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{S}_n.$$

Důkaz. Nechť $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$, $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^\top$ a $\mathbf{x} \ne \mathbf{o}$. Pak

$$a_{1i}x_1 + \ldots + a_{ii}x_i + \ldots + a_{in}x_n = \lambda x_i,$$

odkud převedením členu $a_{ii}x_i$ na pravou stranu dostaneme

$$a_{1i}x_1 + \ldots + \widehat{a_{ii}x_i} + \ldots + a_{in}x_n = (\lambda - a_{ii})x_i.$$



Obr. 23.2: Spektrum matice

Pomocí vlastností absolutní hodnoty tak snadno ověříme, že platí

$$|a_{i1}||x_1| + \ldots + \widehat{|a_{ii}||x_i|} + \ldots + |a_{in}||x_n| \geq |\lambda - a_{ii}||x_i|. \tag{23.10}$$

Nechť i je takové, že $|x_i| = \max_j |x_j|$. Jelikož $|x_i| > 0$, platí

$$|x_j|/|x_i| \leq 1. \tag{23.11}$$

Vydělíme-li rovnost (23.10) $|x_i|$, dostaneme s použitím (23.11)

$$|a_{i1}| + \cdots + \widehat{|a_{ii}|} + \cdots + |a_{in}| \geq |\lambda - a_{ii}|,$$

tedy $\lambda \in \mathscr{S}_i$. □

Příklad 23.8. Pomocí Geršgorinovy věty najděte co nejmenší část komplexní roviny, která obsahuje spektrum matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & i & 4 \end{bmatrix}.$$

Řešení. $r_1 = |i| + |0| = 1, r_2 = 1 + 1 = 2, r_3 = 1 + |i| = 2$. Odtud $\mathscr{S}_1 = \{x \in \mathbb{C} : |x - 2| \leq 1\}, \mathscr{S}_2 = \{x \in \mathbb{C} : |x - 3| \leq 2\}, \mathscr{S}_3 = \{x \in \mathbb{C} : |x - 4| \leq 2\}$, takže $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 \cup \mathscr{S}_3$. Část komplexní roviny obsahující $\sigma(\mathbf{A})$ je na 23.2, kde je vyšrafována oblast obsahující $\sigma(\mathbf{A})$. Z obrázku 23.2 plyne, že $0 \notin \sigma(\mathbf{A})$, takže matice $\mathbf{A}$ je regulární. ▲

Příklady k procvičení

1. Najděte všechna vlastní čísla a vlastní vektory matic:

$$\text{a)}\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{b)}\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{c)}\quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Najděte všechna vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

   Vypočtěte vlastní čísla matic $\mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^{-1}$.

4. Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná regulární matice s vlastním číslem λ. Dokažte:

   a) $\lambda^2 \in \sigma(\mathbf{A}^2)$.
   b) $\lambda^{-1} \in \sigma(\mathbf{A}^{-1})$.
   c) $\lambda^2 + 2\lambda + 1 \in \sigma(\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + \mathbf{I})$.

5. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2i & 1 & 0 \\ -1 & 4i & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

   a) Vypočtěte součet a součin vlastních čísel matice $\mathbf{A}$.
   b) Znázorněte část komplexní roviny, která podle Geršgorinovy věty obsahuje $\sigma(\mathbf{A})$.

Pojmy k zapamatování

— spektrum matice,

— charakteristický polynom,

— charakteristická rovnice,

— Geršgorinova věta.