MATEMATIKA III

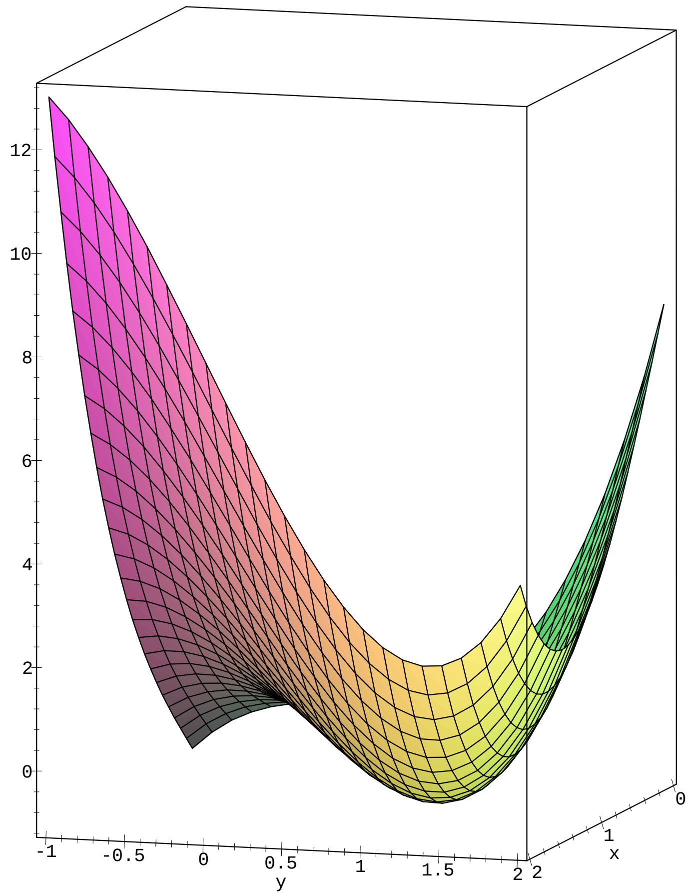
pro bakalářské studium

Jiří Bouchala

Katedra aplikované matematiky, FEI VŠB–TU Ostrava

jiri.bouchala@vsb.cz

www.am.vsb.cz/bouchala



2000

Obsah

1. Vektorový a metrický prostor $\mathbb{R}^n$

1.1. Operace v $\mathbb{R}^n$, definice metriky. Symbolem $\mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, značíme množinu všech uspořádaných n–tic reálných čísel. Prvky $\mathbb{R}^n$ zapisujeme ve tvaru

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n),\ \dots\ .$$

Reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ (resp. $y_1, y_2, \dots, y_n$) nazýváme souřadnicemi nebo složkami bodu x (resp. bodu y).[1]

Definujme nyní v $\mathbb{R}^n$ následující operace ($x, y \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
x + y &\overset{\text{def.}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),\\
c \cdot x &\overset{\text{def.}}{=} (cx_1, cx_2, \dots, cx_n),\\
x - y &\overset{\text{def.}}{=} x + ((-1) \cdot y) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)
\end{aligned}$$

(není těžké prokázat, že spolu s těmito operacemi tvoří $\mathbb{R}^n$ vektorový prostor);

$$\begin{aligned}
x \cdot y &\overset{\text{def.}}{=} x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \ \dots\ \underline{\text{skalární součin}},\\
\|x\| &\overset{\text{def.}}{=} \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}\ \dots\ \underline{\text{norma}},\\
\varrho(x, y) &\overset{\text{def.}}{=} \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}\ \dots\ \underline{\text{metrika}}.
\end{aligned}$$

Příklady.

1) $(2, 3, -1) + (0, 9, 12) = (2, 12, 11)$.

2) $-6 \cdot (2, -1) = (-12, 6)$.

3) $(1, 1, 1, 2) - (2, 2, 3, 4) = (-1, -1, -2, -2)$.

4) $(1, 2) \cdot (3, -6) = -9$.

5) $\|(2, 3)\| = \sqrt{13}$.

6) $\varrho((1, 1), (-10, 0)) = \sqrt{122}$.

Tvrzení. Pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ platí:

(i) $\varrho(x, y) \in \mathbb{R}$, $\varrho(x, y) \geq 0$, $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$;

(iii) $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$ (tzv. „trojúhelníková nerovnost“).

---

[1] Ne vždy budeme – samozřejmě – rozlišovat jednotlivé souřadnice pomocí indexů. Ilustrujme toto upozornění příklady:

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ \dots\ .$$

Všimněme si: je-li $n = 1$ (případně $n = 2$ nebo $n = 3$), je $\varrho(x, y)$ rovno vzdálenosti obrazů x a y na číselné ose (případně v rovině nebo v prostoru). Metrika ϱ je tedy jakýmsi zobecněním pojmu „vzdálenost“ bodů.

Množinu, na níž máme definovanou metriku, nazýváme metrický prostor.

Skutečnost, že $\mathbb{R}^n$ je metrickým prostorem, nám umožní definovat konvergenci posloupností v $\mathbb{R}^n$.

1.2. Konvergence posloupností v $\mathbb{R}^n$.

Definice. Buď $a \in \mathbb{R}^n$ a buď (a_k) posloupnost v $\mathbb{R}^n$, tzn., podobně jako u reálných posloupností, že každému dost velkému $k \in \mathbb{N}$ je přiřazeno $a_k \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že posloupnost (a_k) má limitu a (a píšeme $\lim a_k = a$ nebo $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$ nebo $a_k \to a$), jestliže

$$\lim \varrho(a_k, a) = 0.$$

(Všimněme si, že $\lim \varrho(a_k, a)$ je limitou posloupnosti *reálných* čísel.)

Věta 1.1 („konvergence v $\mathbb{R}^n$ = konvergence po složkách“).
Nechť (a_k) je posloupnost v $\mathbb{R}^n$ a nechť $a \in \mathbb{R}^n$. Označme $a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ souřadnice bodů a_k, a. Potom

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a$$

právě tehdy, když pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí

$$\lim_{k\to\infty} a_{ki} = a_i.$$

Příklady.

1) $\left(\frac{k}{2k+1}, 8, \frac{1}{k}, \frac{\sin k}{k-3}\right) \to \left(\frac{1}{2}, 8, 0, 0\right)$.

2) Posloupnost $\left(k^2, 0, \frac{1}{k^2}\right)$ nemá limitu, protože posloupnost „prvních složek“ této posloupnosti, tj. reálná posloupnost (k^2), nemá konečnou (!) limitu.

Cvičení. Rozhodněte, zda daná limita existuje, a pokud ano, vypočtěte ji:

1) $\lim \left(\frac{1}{k}, (-1)^k, 3\right)$;

2) $\lim \left(\frac{k^2}{3k-4k^2}, \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$;

3) $\lim \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k, \frac{2}{k^3} \sin(k^2 + 1)\right)$;

4) $\lim \left(\sqrt[k]{k}, 4, k^2 - k\right)$.

2. Reálné funkce n – reálných proměnných

2.1. Definice, základní pojmy. Reálnou funkcí n – reálných proměnných nazýváme každé zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$. Jinak řečeno: reálná funkce n – reálných proměnných f je předpis, který každému

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Df \subset \mathbb{R}^n$$

přiřadí právě jednu hodnotu

$$f(x) \overset{\text{ozn.}}{=} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Hf \subset \mathbb{R}$$

(Df … definiční obor funkce f, Hf … obor hodnot funkce f).

Skutečnost, že f je reálnou funkcí n – reálných proměnných, budeme zapisovat symbolem:

$$f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Příklady.

1) $f(x,y) = \sin(x+2y),\ Df = \mathbb{R}^2,\ Hf = \langle -1, 1\rangle.$

2) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ Df = \mathbb{R}^3,\ Hf = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$

3) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } xy > 0, \\ -1, & \text{je-li } xy \le 0, \end{cases}\ Df = \mathbb{R}^2,\ Hf = \{1, -1\}.$

4) $f(x,y) = 14,\ Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ x^2+y^2 \le 9\},\ Hf = \{14\}.$

Úmluva. Podobně jako u funkcí jedné reálné proměnné, je-li funkce $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadána pouze svým předpisem, rozumíme jejím definičním oborem množinu všech prvků z $\mathbb{R}^n$, pro něž má daný předpis smysl.

Příklad. Určete definiční obor funkce $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované předpisem:

$$f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \sin(3x+y-6) + \sqrt{x+1} - \ln(y^2).$$

Řešení:

$(x,y) \in Df \Leftrightarrow \big[x+1 \ge 0\ \wedge\ y^2 > 0\big]$, a proto

$$Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ x \ge -1\ \wedge\ y \ne 0\}.$$

Definice. Buď $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Grafem funkce f rozumíme množinu

$$\text{Graf } f \overset{\text{def.}}{=} \{(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}:\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Df \wedge y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}.$$

Vrstevnicí funkce f o kótě c, kde $c \in \mathbb{R}$, rozumíme množinu

$$\mathrm{v}_f(c) \overset{\text{def.}}{=} \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Df:\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c\}.$$

2.2. Operace s funkcemi.

Definice. Buď $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a buď $c \in \mathbb{R}$. Funkce

$$f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g},\ c\cdot f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

definujeme předpisy:

$$(f+g)(x) \overset{\text{def.}}{=} f(x)+g(x),$$

$$(f-g)(x) \overset{\text{def.}}{=} f(x)-g(x),$$

$$(f\cdot g)(x) \overset{\text{def.}}{=} f(x)\cdot g(x),$$

$$\left(\tfrac{f}{g}\right)(x) \overset{\text{def.}}{=} \tfrac{f(x)}{g(x)},$$

$$(c\cdot f)(x) \overset{\text{def.}}{=} cf(x).$$

Definice. Buď $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$; $g_1,\ g_2,\ \dots,\ g_m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Funkci $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem:

$$h(x_1,\dots,x_n) \overset{\text{def.}}{=} f\big(g_1(x_1,\dots,x_n), g_2(x_1,\dots,x_n),\dots,g_m(x_1,\dots,x_n)\big)$$

nazýváme <u>složenou funkcí z funkcí</u> $f; g_1, g_2, \dots, g_m$.

Příklad.

$$f(u,v,w) \overset{\text{def.}}{=} u^2+2v^2+3w^2;$$

$$g_1(x,y) \overset{\text{def.}}{=} x-y,$$

$$g_2(x,y) \overset{\text{def.}}{=} x+y,$$

$$g_3(x,y) \overset{\text{def.}}{=} 2x+y.$$

$$h(x,y) \overset{\text{def.}}{=} f\big(g_1(x,y), g_2(x,y), g_3(x,y)\big) = (x-y)^2+2(x+y)^2+3(2x+y)^2 =$$
$$= 15x^2+14xy+6y^2.$$

Cvičení.

1) Určete a v $\mathbb{R}^2$ znázorněte definiční obor funkce f definované předpisem:

a) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{9-x^2-y^2} - \sqrt{x^2-y^2-1};$

b) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \ln\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2};$

c) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-y^2};$

d) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \arcsin(2x)+\sqrt{1-y^2}.$

2) Znázorněte (v $\mathbb{R}^3$) graf funkce f definované předpisem:

a) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} 4 - x^2 - y^2;$

b) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} 4 - x^2;$

c) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} 2x + 3y + 1.$

3) Určete a v $\mathbb{R}^2$ znázorněte vrstevnice funkce f definované předpisem:

a) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9};$

b) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} x^2 + y^2;$

c) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} y;$

d) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} 2x + 3y + 1.$

3. Limita a spojitost funkcí více proměnných

3.1. Limita funkce.

Úmluva. Píšeme-li

$$x_0 \neq x_k \to x_0,$$

kde $x_0 \in \mathbb{R}^n$, myslíme tím, že pro všechna dost velká $k \in \mathbb{N}$ je

$$x_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$$

a že

$$\lim x_k = x_0.$$

Definice. Řekneme, že funkce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$ limitu $a \in \mathbb{R}^*$, a píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a,$$

platí-li implikace

$$x_0 \neq x_k \to x_0 \Rightarrow f(x_k) \to a.$$

Pozorování. Buď $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a $a \in \mathbb{R}$. Potom platí:

(i) existuje-li $\lim_{x \to x_0} f(x)$, existuje $\delta > 0$ takové, že

$$P(x_0, \delta) \overset{\text{def.}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < \|x - x_0\| < \delta\} \subset Df$$

$\ldots$ prstencové okolí bodu x_0 o poloměru δ;

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R}^n; 0 < \|x - x_0\| < \delta) : \ |f(x) - a| < \varepsilon;$$

(iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{R})\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R}^n; 0 < \|x - x_0\| < \delta) : \ f(x) > k;$$

(iv) $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\forall l \in \mathbb{R})\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R}^n; 0 < \|x - x_0\| < \delta) : \ f(x) < l.$$

Příklady.

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1.$

Důkaz. Definujme funkci $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ předpisem:

$$f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

Potom platí:

$$\big[(0,0) \neq (x_k,y_k) \to (0,0)\big] \Rightarrow^2$$

$$\Rightarrow \big[x_k \to 0 \ \wedge\ y_k \to 0 \ \wedge\ x_k^2 + y_k^2 \neq 0 \text{ pro všechna dost velká } k \in \mathbb{N}\big] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big[x_k^2 \to 0 \ \wedge\ y_k^2 \to 0 \ \wedge\ x_k^2 + y_k^2 \neq 0 \text{ pro všechna dost velká } k \in \mathbb{N}\big] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big[0 \neq z_k \stackrel{\text{def.}}{=} x_k^2 + y_k^2 \to 0\big] \Rightarrow^3 \big[\tfrac{\sin z_k}{z_k} = f(x_k,y_k) \to 1\big].$$

To jsme měli dokázat.

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \left(y + \frac{1}{x}\right)$ neexistuje.

Důkaz. Definujme funkci $g:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a posloupnost $\big((x_k,y_k)\big)$ v $\mathbb{R}^2$ předpisy:

$$g(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} y + \frac{1}{x}, \quad (x_k,y_k) \stackrel{\text{def.}}{=} \left(\frac{(-1)^k}{k}, 2\right).$$

Potom platí:

- $(0,2) \neq (x_k,y_k) \to (0,2)$,
- posloupnost $\big(g(x_k,y_k)\big) = \big(2 + (-1)^k k\big)$ nemá limitu.

To jako argument, že zkoumaná limita neexistuje, stačí (viz definici limity).

3.2. Spojitost funkce.

Definice. Řekneme, že funkce $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$, je-li

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Pozorování.

(i) Je-li funkce $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existuje $\delta > 0$ takové, že

$$U(x_0,\delta) \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n :\ \|x - x_0\| < \delta\} \subset Df$$

$\ldots$ okolí bodu x_0 o poloměru δ.

[2] Viz Větu 1.1.

[3] Víme, že $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, a proto platí implikace: $0 \neq z_k \to 0 \Rightarrow \frac{\sin z_k}{z_k} \to 1$.

(ii) Funkce $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tehdy a jen tehdy, platí-li implikace
$$x_k \to x_0 \Rightarrow f(x_k) \to f(x_0).$$

Příklady.

1) Funkce $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem:
$$f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \text{ je-li } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, \text{ je-li } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
je spojitá v bodě $(0,0)$.

2) Funkce $g:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem:
$$g(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} y + \frac{1}{x}, \text{ je-li } x \neq 0, \\ 1, \text{ je-li } x = 0, \end{cases}$$
není spojitá v bodě $(0,2)$.

Věta 3.1. *Nechť funkce $f, g:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou spojité v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pak i funkce $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ c\cdot f\ (c \in \mathbb{R})$ jsou spojité v bodě x_0. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, je i funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v bodě x_0.*

Dodatek. *Uvažujme situaci z definice složené funkce, tj., buď funkce $h:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná rovností:*
$$h(x) \overset{\text{def.}}{=} f\big(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)\big),$$
kde $f:\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$; $g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_m:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Potom platí: Jsou-li funkce $g_1, g_2, \ldots, g_m$ spojité v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a je-li funkce f spojitá v bodě $\big(g_1(x_0), g_2(x_0), \ldots, g_m(x_0)\big) \in \mathbb{R}^m$, je funkce h spojitá v bodě x_0.[4]

Příklad. Buď funkce $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem:
$$f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \sin(x+2y) - x^3 + \mathrm{e}^{x^2 y}$$
a buď $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ libovolný bod. Potom funkce f je spojitá v bodě (x,y).

Definice. Řekneme, že funkce $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá na množině $M \subset \mathbb{R}^n$, platí-li implikace:[5]
$$M \ni x_k \to x_0 \in M \Rightarrow f(x_k) \to f(x_0).$$

---

[4] Jinak řečeno: „Složením spojitých funkcí vznikne spojitá funkce.“

[5] Čtenář tuší správně: zápisem „$M \ni x_k \to x_0 \in M$“ rozumíme, že pro všechna dost velká $k \in \mathbb{N}$ je $x_k \in M$ a že $x_0 \in M$.

4. Derivace a diferenciál funkcí více proměnných

4.1. Parciální derivace prvního řádu.

Při zkoumání vlastností funkce $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované na okolí bodu $c = (c_1, c_2)$ jistě může být užitečné vyšetřovat funkce

$$g_1, g_2:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$g_1(x) \overset{\text{def.}}{=} f(x, c_2), \quad g_2(y) \overset{\text{def.}}{=} f(c_1, y).$$

Existuje-li konečná první derivace funkce g_1 v bodě c_1, budeme ji nazývat parciální derivací podle x (nebo podle první proměnné) funkce f v bodě c a značit $\frac{\partial f(c)}{\partial x}$.

Podobně: existuje-li konečná první derivace funkce g_2 v bodě c_2, budeme ji nazývat parciální derivací podle y (nebo podle druhé proměnné) funkce f v bodě c a značit $\frac{\partial f(c)}{\partial y}$.

Zobecněme nyní tento případ pro funkce n proměnných.

Definice. Buď $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, buď $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a buď $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots, c_n)$ vnitřním bodem Df (tzn., že existuje $\delta > 0$ takové, že $U(c, \delta) \subset Df$[6]).

Má-li funkce $g_k:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$g_k(x) \overset{\text{def.}}{=} f(c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, x, c_{k+1}, \ldots, c_n)$$

konečnou derivaci v bodě c_k, nazýváme tuto derivaci parciální derivací funkce f podle k–té proměnné v bodě c a značíme ji

$$\frac{\partial f(c)}{\partial x_k}\,.$$

(Je tedy $\frac{\partial f(c)}{\partial x_k} \overset{\text{def.}}{=} g_k'(c_k) \in \mathbb{R}$.)

Funkce $\frac{\partial f}{\partial x_k}:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \overset{\text{def.}}{=} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$$

se nazývá parciální derivací funkce f podle k–té proměnné.

Příklady.

1) Buď $f(x, y) \overset{\text{def.}}{=} \sin(2x + y)$. Potom

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi, 0) = g'(\pi), \text{ kde } g(x) \overset{\text{def.}}{=} f(x, 0) = \sin(2x),$$
$$g'(x) = 2\cos(2x),$$

a proto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi, 0) = 2\cos(2\pi) = 2.$$

---

[6] Viz definici okolí bodu na straně 11.

Podobně:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\pi, 0) = h'(0), \text{ kde } h(y) \overset{\text{def.}}{=} f(\pi, y) = \sin(2\pi + y) = \sin y,$$
$$h'(y) = \cos y,$$

a proto

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\pi, 0) = \cos 0 = 1.$$

2) Buď

$$f(x, y) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1, & \text{je-li } xy \neq 0, \\ 0, & \text{je-li } xy = 0. \end{cases}$$

Potom

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}.$$

Všimněte si, že přesto funkce f `není spojitá` v bodě $(0, 0)$.[7]

3) Buď $f(x, y, z) \overset{\text{def.}}{=} \sin x \cos(y + 2z)$. Potom

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \cos x \cos(y + 2z), \quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = -\sin x \sin(y + 2z),$$
$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = -2 \sin x \sin(y + 2z).$$

(Definice parciální derivace podle k–té proměnné poskytuje i návod, jak tuto derivaci počítat: všechny proměnné – s výjimkou k–té – považujeme za parametry a funkci derivujeme jako funkci jedné (k–té) proměnné.)

Cvičení. Vypočtěte $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, je-li funkce f definovaná předpisem:

a) $f(x, y) \overset{\text{def.}}{=} 2x^3y - 4xy^2 + 2x$;

b) $f(x, y) \overset{\text{def.}}{=} \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$;

c) $f(x, y) \overset{\text{def.}}{=} x^y$. [8]

---

[7] Nepřehlédněme to: **Z existence parciálních derivací funkce f v bodě c neplyne spojitost funkce f v bodě c!**

[8] Připomeňme si, že

$$x^y \overset{\text{def.}}{=} e^{y \ln x}.$$

4.2. Derivace ve směru.

Pozorování. Buď

$$f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n,$$
$$e_k \stackrel{\text{def.}}{=} (0, \dots, 0, \underset{\substack{k\text{–tá}\\ \text{složka}}}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Potom[9]

$$\frac{\partial f(c)}{\partial x_k} = g_k'(c_k) = \lim_{t\to 0} \frac{g_k(c_k + t) - g_k(c_k)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(c_1, \dots, c_{k-1}, c_k + t, c_{k+1}, \dots, c_n) - f(c_1, \dots, c_n)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(c + t\cdot e_k) - f(c)}{t}\,.$$

Nahradíme-li ve výše uvedené limitě „směr“ e_k libovolným $u \in \mathbb{R}^n$, pro něž je $\|u\| = 1$, dostaneme derivaci funkce f v bodě c ve směru u.

Definice. Buď $c \in \mathbb{R}^n$ vnitřním bodem definičního oboru funkce $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, buď $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = 1$. Existuje-li `konečná` limita

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(c + t\cdot u) - f(c)}{t}\,,$$

nazýváme ji derivací funkce f v bodě c ve směru u a značíme ji

$$\frac{\mathrm{d}f(c)}{\mathrm{d}u}.$$

Pozorování. Parciální derivace podle k–té proměnné je tedy speciálním případem derivace ve směru, a to ve směru $u = e_k$, tzn.,

$$\frac{\partial f(c)}{\partial x_k} = \frac{\mathrm{d}f(c)}{\mathrm{d}e_k}\,.$$

Slib. Časem se naučíme, jak lze často a šikovně spočítat derivaci ve směru; počítat ji (jen) pomocí výše uvedené limity je brutální.[10]

---

[9]Používáme označení z definice parciální derivace.
[10]Ti nedočkaví si mohou dopředu nalistovat tvrzení (iii) Věty 4.2.

4.3. Parciální derivace vyšších řádů.

Definice. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, nechť $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ a nechť $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existuje na nějakém okolí bodu $c \in \mathbb{R}^n$. Existuje-li parciální derivace podle j–té proměnné funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ v bodě c, nazýváme ji parciální derivací druhého řádu funkce f v bodě c podle i–té a j– té proměnné (obecně `záleží na pořadí!`) a značíme ji

$$\frac{\partial^2 f(c)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

(Je-li $i = j$, píšeme $\frac{\partial^2 f(c)}{\partial x_i^2}$.)[11]

Obecně definujeme parciální derivaci k–tého řádu funkce f v bodě c podle proměnných $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ předpisem:

$$\frac{\partial^k f(c)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-1}}} \right)(c)}{\partial x_{i_k}}$$

$$(i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}).$$

Příklady.

1) Buď

$$f(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} \sin(2x + 3y).$$

Potom

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2\cos(2x + 3y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3\cos(2x + 3y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -4\sin(2x + 3y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -9\sin(2x + 3y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -6\sin(2x + 3y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)\,.$$

2) Buď

$$f(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1, & \text{je-li } x = 0, \\ 0, & \text{je-li } x \neq 0. \end{cases}$$

Potom

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \text{ (v } \mathbb{R}^2\text{)}, \text{ a proto } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0.$$

---

[11] Čtenáři je jasné, a není proto třeba to zde vypisovat, jak jsou definovány funkce $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Na druhou stranu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ neexistuje, a proto ani } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \texttt{ neexistuje}.$$

Věta 4.1 (o záměnnosti parciálních derivací).
Nechť funkce $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v nějakém okolí bodu $c \in \mathbb{R}^n$ parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ a nechť funkce $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ je spojitá v bodě c. Pak existuje $\frac{\partial^2 f(c)}{\partial x_j \partial x_i}$ a platí

$$\frac{\partial^2 f(c)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(c)}{\partial x_i \partial x_j}$$
$$(i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}).$$

Důsledek. *Má-li f na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$ (tj. množině, která s každým svým bodem obsahuje i nějaké okolí tohoto bodu)* `spojité všechny` *parciální derivace až do k–tého řádu včetně*[12], `nezávisí` *tyto parciální derivace (na M)* `na pořadí` *proměnných, podle nichž derivujeme. (Závisí pouze na tom,* `kolikrát` *podle* `které` *proměnné derivujeme).*

Cvičení. Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu funkce f definované předpisem:

a) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \cos(2x+3y)\sin(-3x)$;

b) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \operatorname{arctg}(2x-y)$;

c) $f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} x^2 + 2y^3 + xyz^2$.

4.4. Diferenciál.

Definice. Buď `všechny` parciální derivace prvního řádu funkce $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojité v bodě $c \in \mathbb{R}^n$. Potom říkáme, že funkce f je (spojitě) diferencovatelná v bodě c, lineární funkci $\mathrm{d}f_c:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$\mathrm{d}f_c(h_1, \ldots, h_n) = \frac{\partial f(c)}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f(c)}{\partial x_2} h_2 + \cdots + \frac{\partial f(c)}{\partial x_n} h_n$$

nazýváme diferenciálem funkce f v bodě c a vektor

$$\operatorname{grad} f(c) \overset{\text{def.}}{=} \left(\frac{\partial f(c)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(c)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(c)}{\partial x_n} \right)$$

nazýváme gradientem funkce f v bodě c.[13]

---

[12] V takovém případě píšeme $f \in C^k(M)$. Navíc píšeme $f \in C^\infty(M)$, je-li $f \in C^k(M)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

[13] Všimněme si: je-li f diferencovatelná v bodě c, je pro každé $h \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{d}f_c(h) = \operatorname{grad} f(c) \cdot h\,.$$

Příklady.

1)
$$f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \ln\sqrt{2x^2-y^2},\ c=(3,-\sqrt{2});$$
$$\mathrm{d}f_c(h_1,h_2)=\frac{6}{16}h_1+\frac{\sqrt{2}}{16}h_2.$$

2)
$$f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} x^{yz},\ c=(1,-2,1);$$
$$\mathrm{d}f_c(h_1,h_2,h_3)=-2h_1.$$

Cvičení. Určete $\mathrm{d}f_c$, je-li:

a) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \ln(x^2+y^2),\ c=(1,3);$

b) $f(x,y,z,u) \overset{\text{def.}}{=} \sin(x+y)\cos(z-u),\ c=(0,0,0,0).$

Věta 4.2 (vlastnosti diferencovatelné funkce).
Nechť funkce $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $c\in\mathbb{R}^n$. Potom platí:

(i)
$$\lim_{h\to(0,0,\ldots,0)} \frac{f(c+h)-f(c)-\ df_c(h)}{\|h\|}=0;$$

(ii) f je spojitá v bodě c;

(iii) pro každé $u\in\mathbb{R}^n$ takové, že $\|u\|=1$, existuje $\frac{\mathrm{d}f(c)}{\mathrm{d}u}$ a platí
$$\frac{df(c)}{du}=\operatorname{grad} f(c)\cdot u;$$

(iv) je-li $\operatorname{grad} f(c)=(0,0,\ldots,0)$, *je*
$$\frac{df(c)}{du}=0 \text{ pro každé } u\in\mathbb{R}^n,\ \|u\|=1;$$
je-li $\operatorname{grad} f(c)\neq(0,0,\ldots,0)$, *je* $\frac{\mathrm{d}f(c)}{\mathrm{d}u}$

- `největší` *pro* $u \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{\operatorname{grad} f(c)}{\|\operatorname{grad} f(c)\|} \overset{\text{ozn.}}{=} u_1,$

- `nejmenší` *pro* $u \overset{\text{def.}}{=} -\dfrac{\operatorname{grad} f(c)}{\|\operatorname{grad} f(c)\|} \overset{\text{ozn.}}{=} u_2\ (=-u_1);$

navíc platí:
$$\frac{df(c)}{du_1}=\|\operatorname{grad} f(c)\|,\quad \frac{df(c)}{du_2}=-\|\operatorname{grad} f(c)\|.$$

Příklady.

1)
$$f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} xyz,\ c=(5,1,2),\ u=\left(\frac{4}{5},0,-\frac{3}{5}\right);$$
$$\frac{\mathrm{d}f(c)}{\mathrm{d}u} = (2,10,5)\cdot\left(\frac{4}{5},0,-\frac{3}{5}\right) = 2\cdot\frac{4}{5}+10\cdot 0+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{7}{5}.$$

2)
$$f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ c=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ u=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right);$$
$$\frac{\mathrm{d}f(c)}{\mathrm{d}u} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}+\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Cvičení. Vypočtěte $\frac{\mathrm{d}f(c)}{\mathrm{d}u}$, je-li:

a) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \ln(x^2y),\ c=(1,4),\ u=(1,0);$

b) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \ln\sqrt{2x^2-y^2},\ c=(3,-\sqrt{2}),\ u=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right).$

4.5. Taylorova věta.

Věta 4.3 (Taylorova).
Nechť $m\in\mathbb{N}$, $c\in\mathbb{R}^n$, $f:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ a nechť existuje $\delta>0$ takové, že
$$f\in C^{m+1}(U(c,\delta)).$$
Pak pro každé $h=(h_1,h_2,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$ takové, že $c+h\in U(c,\delta)$, platí:
$$f(c+h)=T_m(c+h)+R_{m+1}(h),$$
kde
$$T_m(c+h)=f(c)+\frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(c)}{\partial x_i}h_i+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(c)}{\partial x_i\partial x_j}h_ih_j+$$
$$+\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial^3 f(c)}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}h_ih_jh_k+\dots+\frac{1}{m!}\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n}\frac{\partial^m f(c)}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_m}}h_{i_1}\cdots h_{i_m},$$
$$R_{m+1}(h)=\frac{1}{(m+1)!}\sum_{i_1,\dots,i_{m+1}=1}^{n}\frac{\partial^{m+1} f(c+\xi\cdot h)}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_{m+1}}}h_{i_1}\cdots h_{i_{m+1}}\quad \textit{pro nějaké } \xi\in(0,1).$$

Navíc platí:

$$\lim_{h\to(0,\dots,0)} \frac{R_{m+1}(h)}{\|h\|^m} = 0.$$

Příklad. Uvažujme

$$f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \cos x \cos y, \quad c = (\pi, 0), \quad m = 2.$$

Potom pro $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ máme

$$f(c+h) = f(\pi + h_1, h_2) = f(\pi, 0) + \frac{\partial f(\pi,0)}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f(\pi,0)}{\partial y} h_2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(\pi,0)}{\partial x^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f(\pi,0)}{\partial x \partial y} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f(\pi,0)}{\partial y \partial x} h_2 h_1 + \frac{\partial^2 f(\pi,0)}{\partial y^2} h_2^2\right) + R_3(h) =$$

$$= -1 + \frac{1}{2}\left(h_1^2 + h_2^2\right) + R_3(h),$$

a proto pro (x,y) „blízké“ bodu $(\pi, 0)$ máme

$$f(x,y) \doteq -1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2 + \frac{1}{2}y^2 = T_2(x,y).$$

Definice. Buď funkce $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. Rovinu

$$\sigma \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = f(c) + \frac{\partial f(c)}{\partial x}(x - c_1) + \frac{\partial f(c)}{\partial y}(y - c_2)\}$$

nazýváme <u>tečnou rovinou grafu funkce</u> f <u>sestrojenou v bodě</u> $(c_1, c_2, f(c_1, c_2))$.[14]

Příklad. Rovina

$$\vartheta \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = -1\}$$

je tečnou rovinou grafu funkce

$$f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \cos x \cos y$$

sestrojenou v bodě $(\pi, 0, -1)$.

Cvičení. Najděte rovnici tečné roviny grafu funkce f sestrojené v bodě $(c_1, c_2, f(c_1, c_2))$, je-li:

a) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} x^2 + y^2,\ c = (c_1, c_2) = (1,1)$;

b) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} x^3 - y^2 + 2x - 3,\ c = (c_1, c_2) = (1,2)$.

[14] Bystrý čtenář si všimne, že

$$\sigma : \quad z = f(c) + \mathrm{d}f_c(x - c_1, y - c_2) = T_1(x,y).$$

4.6. Diferenciály vyšších řádů.

Definice. Nechť funkce $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $c \in \mathbb{R}^n$ spojité všechny parciální derivace k–tého řádu. Funkci

$$\mathrm{d}^k f_c:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

definovanou předpisem

$$\mathrm{d}^k f_c(h_1, h_2, \dots, h_n) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(c)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_k}$$

pak nazýváme <u>diferenciálem k–tého řádu funkce</u> f <u>v bodě</u> c.

Příklad. Buď

$$f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \sin(2x+y),\ \ c=(0,\pi).$$

Potom

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^1 f_c(h_1,h_2) &= \mathrm{d} f_c(h_1,h_2) = -2h_1 - h_2,\\
\mathrm{d}^2 f_c(h_1,h_2) &= 0,\\
\mathrm{d}^3 f_c(h_1,h_2) &= 8h_1^3 + 12h_1^2 h_2 + 6h_1 h_2^2 + h_2^3.
\end{aligned}$$

Pozorování. Za situace z Taylorovy věty[15] platí:

$$f(c+h) = f(c) + \frac{1}{1!}\,\mathrm{d} f_c(h) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f_c(h) + \dots + \frac{1}{m!}\,\mathrm{d}^m f_c(h) + R_{m+1}(h),$$

kde

$$R_{m+1}(h) = \frac{1}{(m+1)!}\,\mathrm{d}^{m+1} f_{c+\xi\cdot h}(h) \ \ \text{pro nějaké } \xi \in (0,1).$$

Pozorování a poznámka k výpočtu diferenciálu k–tého řádu.
Nechť funkce $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $c \in \mathbb{R}^2$ spojité všechny parciální derivace druhého řádu. Pak (viz Větu 4.1) platí

$$\mathrm{d}^2 f_c(h_1,h_2) = \frac{\partial^2 f(c)}{\partial x^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f(c)}{\partial x \partial y} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f(c)}{\partial y \partial x} h_2 h_1 + \frac{\partial^2 f(c)}{\partial y^2} h_2^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 f(c)}{\partial x^2} h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f(c)}{\partial x \partial y} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f(c)}{\partial y^2} h_2^2 = „\left(\frac{\partial}{\partial x} h_1 + \frac{\partial}{\partial y} h_2\right)^2 f(c)“.$$

[15] Viz Větu 4.3.

Podobně, má-li funkce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $c \in \mathbb{R}^n$ spojité všechny parciální derivace až do k–tého řádu včetně, lze při výpočtu $\mathrm{d}^k f_c$ využít „rovnosti"

$$\mathrm{d}^k f_c(h_1, h_2, \ldots, h_n) = „\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}h_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}h_n\right)^k f(c)".$$

Ukažme si na příkladu, jak lze tohoto pozorování využít.

Příklad. Určete $\mathrm{d}^3 f_c$, je-li

$$f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} y \ln x, \; c = (1,3).$$

$$\mathrm{d}^3 f_c(h_1, h_2) = „\left(\frac{\partial}{\partial x}h_1 + \frac{\partial}{\partial y}h_2\right)^3 f(c)" =$$

$$= „\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}h_1^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}h_1^2 h_2 + 3\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}h_1 h_2^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3}h_2^3\right) f(c)" =$$

$$= \frac{\partial^3 f(c)}{\partial x^3}h_1^3 + 3\frac{\partial^3 f(c)}{\partial x^2 \partial y}h_1^2 h_2 + 3\frac{\partial^3 f(c)}{\partial x \partial y^2}h_1 h_2^2 + \frac{\partial^3 f(c)}{\partial y^3}h_2^3 =$$

$$= 6h_1^3 - 3h_1^2 h_2.$$

Cvičení. Určete $\mathrm{d}^k f_c$, je-li:

a) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \ln(1+x)\ln(1+y), \; c = (0,0), \; k = 2;$

b) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} x^y, \; c = (1,1), \; k = 3;$

c) $f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} xyz, \; c = (-1,0,1), \; k = 3.$

5. Funkce definované implicitně

Uvažujme funkci $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a množinu

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x,y) = 0\}.$$

Budeme se zabývat problémem, zda existuje funkce $y = g(x)$ jedné reálné proměnné taková, aby množina M (nebo alespoň její část) byla jejím grafem.[16]

Ukažme si na příkladech, že v obecném případě lze čekat ledacos.

Příklady.

1) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} x^2 + y^2 + 1;\ M = \emptyset.$

2) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} x^2 + y^2;\ M = \{(0,0)\}.$

3) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} 6x + 2y - 3$; M je přímka $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = \frac{3-6x}{2}\}$

   (stačí položit $g(x) \overset{\text{def.}}{=} \frac{3-6x}{2}$).

4) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{x^2 + 4xy + 4y^2} - x - 2y;$

   M je polorovina $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq -\frac{x}{2}\}$

   (existuje nekonečně mnoho `různých` možností, jak definovat funkci $y = g(x)$ tak, aby její graf „ležel" v M).

5) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} x^2 + y^2 - 1$; M je kružnice $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$

   (a opět: existuje nekonečně mnoho možností, jak volit funkci $y = g(x)$; nelze však přehlédnout, že se případy 4) a 5) přece jen v „něčem" liší).

Zabývejme se proto v dalším nejen `existencí` „příslušné" funkce g, ale i její `jednoznačností` (alespoň `lokálně`) a `spojitostí`, případně `diferencovatelností`.

Vraťme se k příkladu 5) a zvolme $(a,b) \in M$ (tzn., že $a^2 + b^2 = 1$) tak, aby $b \neq 0$, a $\delta > 0$ takové, aby $(a-\delta, a+\delta) \subset (-1,1)$. Pak jistě existuje právě jedna spojitá (a diferencovatelná) funkce $y = g(x)$ definovaná v $(a-\delta, a+\delta)$ taková, že

$$f(x, g(x)) = 0 \text{ pro každé } x \in (a-\delta, a+\delta)$$

(tzn., že Graf $g \subset M$) a že

$$g(a) = b.$$

$$(\text{Zřejmě } g(x) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{1-x^2}, \text{ je-li } b > 0, \text{ a } g(x) \overset{\text{def.}}{=} -\sqrt{1-x^2}, \text{ je-li } b < 0.)$$

Problematická zůstává situace v okolí bodů $(-1,0)$ a $(1,0)$, bodů, v nichž má M „svislé tečny". Zde funkce $y = g(x)$ výše uvedených vlastností neexistuje.[17]

---

[16] Zápis „$y = g(x)$" není příliš korektní, zde se mu však nebudeme vyhýbat. Koresponduje totiž s výše uvedeným problémem, který je možno přeformulovat do otázky:

Kdy lze z „rovnice" $f(x,y) = 0$ vyjádřit y „jako funkci" x?

[17] Situace by se změnila, kdybychom zde hledali funkci $x = g(y)$.

Pozorování. Všimněme si, má-li množina M v nějakém bodě $(a,b) \in M$ „svislou tečnu", je $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 0$.[18]

Věta 5.1 (o funkci definované implicitně).
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *je otevřená množina, nechť* $(a,b) \in \Omega$ *a nechť pro funkci*

$$f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

a nějaké $k \in \mathbb{N}$ *platí:*

$$f \in C^k(\Omega), \quad f(a,b) = 0, \quad \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \neq 0.$$

Pak existují reálná čísla $\delta > 0$ *a* $\eta > 0$ *a funkce* $g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tak, že*

(i) $g \in C^k(a-\delta, a+\delta)$,

(ii) pro každé $x \in (a-\delta, a+\delta)$ *je* $g(x) \in (b-\eta, b+\eta)$,

(iii) pro každé $x \in (a-\delta, a+\delta)$ *a* $y \in (b-\eta, b+\eta)$ *je*

$$f(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow\ y = g(x),$$

(iv) pro každé $x \in (a-\delta, a+\delta)$ *je*

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}\,.$$

(O funkci g říkáme, že je <u>implicitně určená rovnicí</u> $f(x,y) = 0$ <u>a podmínkou</u> $g(a) = b$.)

Příklady. Buď

$$f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} x - y + 4\sin y,\ (a,b) = (0,0).$$

Pak, protože

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2),\ f(0,0) = 0,\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 3 \neq 0,$$

existuje funkce g, která je implicitně určená rovnicí $x - y + 4\sin y = 0$ a podmínkou $g(0) = 0$. Všimněme si, že (aniž známe explicitně předpis funkce g) můžeme – díky tvrzení *(iv)* výše uvedené věty – vypočítat $g'(0)$:

$$g'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, g(0))}{\frac{\partial f}{\partial y}(0, g(0))} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = -\frac{1}{3}\,.$$

[18] Čtenář by si měl toto pozorování rozmyslet podrobně, souvisí s „geometrickou představou", že `gradient je vektor kolmý k vrstevnici`.

Můžeme však postupovat i jinak: díky Větě 5.1 totiž víme, že existuje $\delta > 0$ takové, že $g \in C^\infty(-\delta, \delta)$ a že pro všechna $x \in (-\delta, \delta)$ platí:

$$h(x) \overset{\text{def.}}{=} f(x, g(x)) = x - g(x) + 4\sin(g(x)) = 0.$$

Odtud plyne, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $x \in (-\delta, \delta)$ je

$$h(x) = h'(x) = h''(x) = \cdots = h^{(k)}(x) = 0.$$

Můžeme proto postupným derivováním a dosazováním ($x = 0$) vypočítat kteroukoliv z derivací funkce g v bodě 0.[19]

Vyzkoušejme si to:

$$h'(x) = 1 - g'(x) + 4\cos(g(x))\, g'(x) = 0,$$

a proto

$$1 - g'(0) + 4\cos(g(0))\, g'(0) = 1 - g'(0) + 4g'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{g'(0) = -\frac{1}{3}}\,.$$

$$h''(x) = -g''(x) - 4\sin(g(x))\, \left(g'(x)\right)^2 + 4\cos(g(x))\, g''(x) = 0,$$

a proto

$$-g''(0) - 4\sin(g(0))\, \left(g'(0)\right)^2 + 4\cos(g(0))\, g''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{g''(0) = 0}\,.$$

...

Cvičení. Funkce g je implicitně určená rovnicí

$$y - x - \ln y = 0$$

a podmínkou

$$g(\mathrm{e} - 1) = \mathrm{e}\,.$$

Vypočtěte

$$g'(\mathrm{e} - 1) \quad \text{a} \quad g''(\mathrm{e} - 1).$$

[19] Pomocí těchto derivací pak můžeme třeba „sestavit" Taylorův polynom, a tak – v „blízkosti" bodu 0 velmi dobře aproximovat funkci g, a tím vlastně i řešení rovnice $f(x, y) = 0$ na nějakém okolí bodu $(0, 0)$.

6. Extrémy funkcí více proměnných

6.1. Lokální extrémy.

Definice. Řekneme, že funkce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $c \in \mathbb{R}^n$ lokální maximum (resp. ostré lokální maximum), existuje-li $\delta > 0$ takové, že pro každé

$$x \in P(c,\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ 0 < \|x - c\| < \delta\}$$

platí

$$f(x) \leq f(c) \quad (\text{resp. } f(x) < f(c)).$$

Nahradíme-li nerovnosti $f(x) \leq f(c)$ a $f(x) < f(c)$ nerovnostmi $f(x) \geq f(c)$ a $f(x) > f(c)$, dostaneme definici lokálního minima a ostrého lokálního minima.

Pozorování. Má-li funkce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $c \in \mathbb{R}^n$ lokální extrém (tzn. lokální maximum nebo lokální minimum), existuje $\delta > 0$ takové, že

$$U(c,\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - c\| < \delta\} \subset Df.$$

Příklady.

1) Funkce $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} x^2 + y^2$ má v bodě $(0,0)$ ostré lokální minimum. Všimněme si, že $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$.

2) Funkce $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$ má v bodě $(0,0)$ ostré lokální minimum. Nepřehlédněme, že přesto funkce f není v bodě $(0,0)$ diferencovatelná (dokonce ani neexistují parciální derivace $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ a $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$).

3) Funkce $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} x^3$ nemá v bodě $(0,0)$ lokální extrém, a to přesto, že $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$.

Věta 6.1 (nutná podmínka existence lokálního extrému).
Nechť funkce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $c \in \mathbb{R}^n$ lokální extrém a nechť existuje $\frac{\mathrm{d}f(c)}{\mathrm{d}u}$ $(u \in \mathbb{R}^n, \ \|u\| = 1)$. Pak

$$\frac{df(c)}{du} = 0.$$

Důsledek. *Je-li funkce f v bodě c navíc diferencovatelná, je*

$$\operatorname{grad} f(c) = (0,0,\dots,0).$$

(V takovém případě říkáme, že c je stacionárním bodem funkce f.)

Poznámka. Pro funkci $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí: je-li $c \in \mathbb{R}$ stacionárním bodem f (tzn., $f'(c) = 0$) a je-li $f''(c) > 0$ (resp. $f''(c) < 0$), má funkce f v bodě c ostré lokální minimum (resp. ostré lokální maximum).

Pro funkce více proměnných platí analogické tvrzení; roli druhé derivace zde přebírá diferenciál druhého řádu, kladnost (resp. zápornost) druhé derivace bude nahrazena požadavkem pozitivní (resp. negativní) definitnosti kvadratické formy $\mathrm{d}^2 f_c$.

Připomenutí. Kvadratickou formu

$$\varphi:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \varphi(h) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$$

$$\big(\text{pro všechna } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ je } a_{ij} \in \mathbb{R},\ a_{ij} = a_{ji}\big),$$

nazýváme <u>pozitivně definitní</u> (resp. <u>negativně definitní</u>), platí-li pro každé $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\}$, že

$$\varphi(h) > 0 \quad \text{(resp., že } \varphi(h) < 0\text{)}.$$

Existují-li $k, l \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\varphi(k) < 0 < \varphi(l),$$

říkáme, že kvadratická forma φ je <u>indefinitní</u>.

Věta 6.2 (postačující podmínky existence lokálního extrému).
Nechť funkce $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $c \in \mathbb{R}^n$ spojité všechny parciální derivace druhého řádu a nechť c je `stacionárním bodem` *f. Pak platí:*

(i) Je-li kvadratická forma $\mathrm{d}^2 f_c$ `pozitivně definitní`*, má f v bodě c ostré lokální minimum.*

(ii) Je-li kvadratická forma $\mathrm{d}^2 f_c$ `negativně definitní`*, má f v bodě c ostré lokální maximum.*

(iii) Je-li kvadratická forma $\mathrm{d}^2 f_c$ `indefinitní`*, nemá f v bodě c lokální extrém.*

Před příkladem si ještě připomeňme, jak lze často zjistit definitnost dané kvadratické formy.

Věta 6.3 (Sylvestrovo kritérium).
Buď

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \varphi(h) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j \quad (a_{ij} = a_{ji}),$$

kvadratická forma. Označme

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ & & \dots\dots & \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Pak platí:

(i) φ *je pozitivně definitní, právě když*

$$\Delta_1 > 0, \ \Delta_2 > 0, \ \dots, \ \Delta_n > 0.$$

(ii) φ *je negativně definitní, právě když*

$$\Delta_1 < 0, \ \Delta_2 > 0, \ \dots, \ (-1)^n \Delta_n > 0.$$

(iii) Jestliže $\Delta_n \neq 0$ *a* φ *není ani pozitivně ani negativně definitní, je* φ *indefinitní.*

Příklady.

1) Najděte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} x^3 + y^3 - 18xy + 2000.$$

Protože $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, může mít f lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech (viz Větu 6.1). Vyřešíme-li „příslušnou“ soustavu rovnic:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 18y = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 18x = 0,$$

zjistíme, že f má právě dva stacionární body, a to body

$$c_1 \stackrel{\text{def.}}{=} (0, 0) \ \text{ a } \ c_2 \stackrel{\text{def.}}{=} (6, 6).$$

Nyní rozhodněme, co se v těchto bodech „děje“. Nejdříve určeme matici kvadratické formy $\mathrm{d}^2 f_{(x,y)}$ v obecném bodě $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{d}^2 f_{(x,y)} : \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x, & -18 \\ -18, & 6y \end{pmatrix},$$

a potom (dosazením příslušných souřadnic) v bodech c_1 a c_2:

$$\mathrm{d}^2 f_{c_1} : \quad \begin{pmatrix} 0, & -18 \\ -18, & 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathrm{d}^2 f_{c_2} : \quad \begin{pmatrix} 36, & -18 \\ -18, & 36 \end{pmatrix}.$$

Odtud lze pomocí Sylvestrova kritéria snadno usoudit, že $\mathrm{d}^2 f_{c_1}$ je indefinitní kvadratická forma ($\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = -18^2 \neq 0$) a že $\mathrm{d}^2 f_{c_2}$ je pozitivně definitní kvadratická forma ($\Delta_1 = 36 > 0,\ \Delta_2 = 36^2 - 18^2 > 0$). Proto (viz Větu 6.2) víme, že funkce f nemá lokální extrém v bodě $c_1 = (0,0)$ a že funkce f má v bodě $c_2 = (6,6)$ ostré lokální minimum. (Žádné jiné lokální extrémy funkce f nemá.)

2) Najděte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} (x^2 + y^2)^8.$$

Je snadné nahlédnout, že funkce $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ a že bod $c \stackrel{\text{def.}}{=} (0,0)$ je jejím jediným stacionárním bodem. Určíme-li matici kvadratické formy $\mathrm{d}^2 f_c$, a tou je matice

$$\begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix},$$

zjistíme, že nemůžeme odpověď na otázku:

„*Má funkce f lokální extrém v bodě c?* “

hledat pomocí Vět 6.2 a 6.3. To nám však určitě nezabrání ji najít.

Je zřejmé, že pro každé $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ platí:

$$f(x,y) > 0 = f(0,0),$$

a proto má funkce f v bodě $c = (0,0)$ ostré lokální minimum .

Cvičení. Najděte všechny lokální extrémy funkce f definované předpisem:

a) $f(x, y) \overset{\text{def.}}{=} (x + 1)^2 + y^2$;

b) $f(x, y) \overset{\text{def.}}{=} 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$;

c) $f(x, y) \overset{\text{def.}}{=} 8x^3 + y^3 - 12xy - 41$;

d) $f(x, y) \overset{\text{def.}}{=} (x - 2y + 1)^4$;

e) $f(x, y, z) \overset{\text{def.}}{=} x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + \sqrt{3}$;

f) $f(x, y, z) \overset{\text{def.}}{=} x^2 + (2y - 1)^2 + (z + 2)^2$.

6.2. Globální extrémy.

Definice. Řekneme, že <u>funkce</u> $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ <u>nabývá na množině</u>

$$M \subset Df \subset \mathbb{R}^n$$

svého <u>(globálního) maxima</u>, respektive <u>(globálního) minima</u>, <u>v bodě</u> $c \in \mathbb{R}^n$, platí-li:

$$c \in M \quad \wedge \quad f(c) = \max\{f(x) :\ x \in M\} \overset{\text{ozn.}}{=} \max_{x \in M} f(x),$$

respektive

$$c \in M \quad \wedge \quad f(c) = \min\{f(x) :\ x \in M\} \overset{\text{ozn.}}{=} \min_{x \in M} f(x).$$

Příklady.

1) Funkce

$$f(x, y) \overset{\text{def.}}{=} x^2 + y^2 + 1$$

nabývá na $\mathbb{R}^2$ svého minima v bodě $(0, 0)$; $\max\limits_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$ neexistuje.

2) Funkce

$$f(x, y) \overset{\text{def.}}{=} x + y$$

nabývá na množině

$$M = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$$

svého maxima v bodě $(1, 1)$ a minima v bodě $(0, 0)$.[20]

---

[20] Všimněme si, že pro $N = (0, 1) \times (0, 1)$ extrémy

$$\min_{(x,y) \in N} f(x, y) \quad \text{a} \quad \max_{(x,y) \in N} f(x, y)$$

neexistují.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá kompaktní, je-li současně uzavřená (tzn., že množina $\mathbb{R}^n \setminus M$ je otevřená[21]) a omezená (tzn., že existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in M$ je $\|x\| < \delta$)[22].

Příklady.

1) Množiny

$$\emptyset,\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| + |y| \leq 1\},\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| + |y| = 1\}$$

jsou kompaktní.

2) Množiny

$$\mathbb{R}^2,\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| + |y| < 1\},\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| = 1\}$$

nejsou kompaktní.

Věta 6.4 (Weierstrassova).
Nechť funkce $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá na `neprázdné kompaktní` *množině $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak existuje*

$$\min_{x \in M} f(x) \quad i \quad \max_{x \in M} f(x).$$

Příklad. Najděme globální extrémy funkce f na množině M[23], je-li

$$f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} x^3 + y^3 - 3xy; \quad M = \langle 0, 2\rangle \times \langle -1, 2\rangle.$$

Předně si všimněme, že $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ a že M je neprázdná a kompaktní množina, a proto (viz Weierstrassovu větu) extrémy

$$\min_{(x,y)\in M} f(x,y) \quad \text{a} \quad \max_{(x,y)\in M} f(x,y)$$

existují.

Budeme postupovat takto: najdeme všechny „podezřelé body", vypočteme odpovídající funkční hodnoty a porovnáním těchto hodnot nalezneme příslušné extrémy.[24]

---

[21] Viz definici otevřené množiny na straně 17.

[22] Jinak řečeno, $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená, existuje-li $\delta > 0$ takové, že

$$M \subset U\big((0,0,\ldots,0),\delta\big).$$

[23] Tím rozumějme, že máme za úkol najít všechny body, v nichž funkce f nabývá na M svého maxima, a všechny body, v nichž funkce f nabývá na M svého minima (samozřejmě, pokud tyto existují).

[24] Čtenář si sám a podrobně rozmyslí, že pro takovýto postup je informace, že příslušné extrémy existují, `nezbytná`!

Co se rozumí „podezřelými body", a jak je lze hledat, snad bude jasné z následujících úvah a výpočtů.

a) **„Podezřelé body" uvnitř M.**
Nabývá-li f svého extrému na M v bodě

$$c \in \mathrm{int} M \overset{\text{def.}}{=} (0,2) \times (-1,2),$$

má f zřejmě v bodě c i lokální extrém, a protože $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, musí být[25]

$$\frac{\partial f(c)}{\partial x} = \frac{\partial f(c)}{\partial y} = 0.$$

Řešením příslušné soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 3x^2 - 3y = 0, \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 3y^2 - 3x = 0, \end{aligned}$$

získáme body $(0,0) \notin \mathrm{int} M$ a $(1,1) \in \mathrm{int} M$. Uvnitř M proto leží jediný „podezřelý bod", a to bod $\underline{c_1 = (1,1)}$.

b) **„Podezřelé body" na hranici M.**

b1) Nabývá-li f svého extrému na M v bodě

$$c \in \partial M_1 \overset{\text{def.}}{=} \langle 0,2 \rangle \times \{-1\},$$

je zřejmě $f(c)$ extrémem množiny $\{f(x,-1) : x \in \langle 0,2 \rangle\}$, a proto je buď $c = \underline{c_2 = (0,-1)}$ nebo $c = \underline{c_3 = (2,-1)}$, a nebo je $c = (x,-1)$, kde $x \in (0,2)$ je lokálním extrémem (a proto i stacionárním bodem) funkce

$$h_1(x) \overset{\text{def.}}{=} f(x,-1) = x^3 - 1 + 3x.$$

Protože $h_1'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ pro každé $x \in (0,2)$, jiné „podezřelé body" než c_2 a c_3 na ∂M_1 neleží.

Postupujme analogicky i na zbývajících částech hranice M.

[25] Viz Větu 6.1.

b2) „Podezřelými body“ na

$$\partial M_2 \overset{\text{def.}}{=} \langle 0,2\rangle \times \{2\}$$

jsou body $\underline{c_4 = (0,2)}$, $\underline{c_5 = (2,2)}$ a body $c = (x,2)$, kde $x \in (0,2)$ je stacionárním bodem funkce

$$h_2(x) \overset{\text{def.}}{=} f(x,2) = x^3 + 8 - 6x.$$

Protože
$h_2'(x) = 3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x = -\sqrt{2} \notin (0,2) \ \vee \ x = \sqrt{2} \in (0,2)\right)$,
je takovýto – výše popsaný – bod jen jeden, a to bod $\underline{c_6 = (\sqrt{2},2)}$.

b3) Na úsečce

$$\partial M_3 \overset{\text{def.}}{=} \{0\} \times \langle -1,2\rangle$$

jsou „podezřelými body“ c_2, c_4 a body $c = (0,y)$, kde $y \in (-1,2)$ je stacionárním bodem funkce

$$h_3(y) \overset{\text{def.}}{=} f(0,y) = y^3.$$

K zatím nalezeným bodům proto přidáme ještě bod $\underline{c_7 = (0,0)}$.

b4) „Podezřelými body“ na poslední dosud neprozkoumané části hranice M, tj. na množině

$$\partial M_4 \overset{\text{def.}}{=} \{2\} \times \langle -1,2\rangle,$$

jsou body c_3, c_5 a body $c = (2,y)$, kde $y \in (-1,2)$ je stacionárním bodem funkce

$$h_4(y) \overset{\text{def.}}{=} f(2,y) = 8 + y^3 - 6y.$$

Posledním „podezřelým bodem“ se proto stane bod $\underline{c_8 = (2,\sqrt{2})}$.

Porovnání odpovídajících funkčních hodnot, tj. čísel

$$f(c_1) = f(1,1) = -1, \qquad f(c_5) = f(2,2) = 4,$$
$$f(c_2) = f(0,-1) = -1, \qquad f(c_6) = f(\sqrt{2},2) \doteq 2,3,$$
$$f(c_3) = f(2,-1) = 13, \qquad f(c_7) = f(0,0) = 0,$$
$$f(c_4) = f(0,2) = 8, \qquad f(c_8) = f(2,\sqrt{2}) \doteq 2,3,$$

nás vede k tomuto závěru: funkce f nabývá na množině M svého maxima v bodě $c_3 = (2, -1)$ a minima v bodech $c_1 = (1, 1)$ a $c_2 = (0, -1)$.[26]

Cvičení. Najděte globální extrémy funkce f na množině M, je-li:

a) $f(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} x^2 y,\ M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\};$

b) $f(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} x^2 + y^3 - 2x,\ M = \langle 0, 2\rangle \times \langle -1, 1\rangle;$

c) $f(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} x^2 + 2xy - 4x + 8y,\ M = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle;$

d) $f(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} x^2 - y^2,\ M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\};$

e) $f(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} x^2 - 2xy + y^2 + 13,\ M = \mathbb{R}^2;$

f) $f(x, y, z) \stackrel{\text{def.}}{=} (x - 1)^2 + (y - 5)^5 + z^4,\ M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ y \geq 5\}.$

[26] Čtenáři určitě prospěje, projde-li si znovu výše vypočtený příklad a promyslí-li si, jak souvisí nalezené „podezřelé body“ $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_8$ s grafem funkce $f|M$. Tento graf je vytištěn na titulní straně tohoto textu.

7. Obyčejné diferenciální rovnice

7.1. Několik úvodních poznámek a příkladů.

Obyčejnou diferenciální rovnicí rozumíme (zhruba řečeno) rovnici, ve které neznámou je `funkce jedné proměnné` a ve které se vyskytuje alespoň jedna derivace této funkce. Řádem obyčejné diferenciální rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace (hledané funkce), která se v rovnici vyskytuje.[27]

Příklady.

1) Uvažujme Dr. Šindela jedoucího po rovné cestě – tj. po přímce – ve své nové Fabii F. Předpokládejme, že v každém čase $t \in I$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je nějaký otevřený interval, známe rychlost $v(t) \in \mathbb{R}$ červené Fabie F a že funkce $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu I. Hledejme funkci $s = s(t)$ popisující dráhu (polohu) F.

   Víme, že funkce s je určena obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu
$$s'(t) = v(t),\ t \in I.$$
   Jejím řešením je každá primitivní funkce k funkci v na intervalu I, tj.
$$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t.$$
   Dodáme-li podmínku[28]
$$s(t_0) = s_0 \ \ (t_0 \in I,\ s_0 \in \mathbb{R}),$$
   je řešením úlohy[29]
$$\begin{cases} s'(t) = v(t),\ t \in I; \\ s(t_0) = s_0, \end{cases}$$
   (jednoznačně určená) funkce
$$s(t) \overset{\text{def.}}{=} s_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

2) Představme si doktora Mráčka houpajícího se na pružině a označme $x(t)$ okamžitou výchylku Dr. Mráčka v čase t od klidového stavu. Na pana Mráčka působí tyto síly (ostatní zanedbáme):

   • *síla F_1 pružiny*, která směřuje k rovnovážné poloze a je – podle Hookova zákona – úměrná výchylce:
$$F_1(t) = -sx(t)$$
   ($s > 0 \ldots$ konstanta charakterizující `tuhost pružiny`);

---

[27] Poznamenejme pro úplnost: máme-li rovnici, kde neznámou je `funkce více proměnných` a ve které se vyskytují `parciální derivace` této funkce, mluvíme o parciální diferenciální rovnici.

[28] Mluvíme o tzv. počáteční podmínce.

[29] Diferenciální rovnici spolu s `počáteční podmínkou` nazýváme Cauchyovou úlohou.

- *síla* F_2 charakterizující *odpor prostředí*; předpokládejme, že je úměrná okamžité rychlosti a má opačný směr, tj.

$$F_2(t) = -rx'(t) \ \ (r \geq 0 \ldots \text{ konstanta}).$$

Značme m hmotnost pana Mráčka. Pak z Newtonova zákona

$$ma = F$$

a vztahů

$$a(t) = x''(t),$$
$$F(t) = F_1(t) + F_2(t)$$

získáme obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

$$mx''(t) = -sx(t) - rx'(t).$$

Časem si ukážeme, že řešení x takovéto rovnice není určeno jednoznačně (závisí obecně na dvou parametrech). Chceme-li mít řešení určeno jednoznačně, můžeme zadat – například – tyto počáteční podmínky:

$$x(0) \ldots \text{ tj. výchylku v čase } 0,$$
$$x'(0) \ldots \text{ tj. rychlost v čase } 0.$$

3) Zajíc startuje z počátku soustavy souřadné v rovině a běží ve směru osy x. Ve stejném okamžiku vybíhá z bodu $(0,1)$ pes a běží tak, že:
a) v každém okamžiku t běží přímo k zajíci,
b) vzdálenost mezi psem a zajícem zůstává konstantní.

Popišme dráhu psa. Označme $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkci, jejímž grafem je hledaná křivka,[30] a $P = (x, k(x))$, resp. $Z = (z, 0)$, polohu psa, resp. polohu zajíce, v čase t.

Z podmínky a) plyne, že tečna sestrojená ke grafu funkce k v bodě P protíná osu x v bodě Z, tzn., že

$$k(x) + k'(x)(z - x) = 0.$$

Z podmínky b) plyne, že $\|P - Z\| = 1$, a proto[31]

$$z - x = \sqrt{1 - k^2(x)}.$$

Shrnutí: hledaná funkce k je řešením Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} k(x) + k'(x)\sqrt{1 - k^2(x)} = 0, \\ k(0) = 1. \end{cases}$$

[30] Tzv. tractrix.
[31] Zřejmě platí $z \geq x$ a $0 \leq y \leq 1$.

Dá se ukázat, že řešením je funkce $y = k(x)$ určená implicitně rovnicí

$$x = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} - \sqrt{1 - y^2}$$

a podmínkou $k(0) = 1$.[32]

Definice. Obyčejnou diferenciální rovnicí n–tého řádu, kde $n \in \mathbb{N}$, rozumíme rovnici, kterou lze napsat ve tvaru

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (\heartsuit)$$

kde

$$F: \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}.$$

Řešením rovnice $(\heartsuit)$ nazýváme každou funkci $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou na otevřeném intervalu (a, b), kde $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, takovou, že pro každé $x \in (a, b)$ platí[33]

$$F\big(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\big) = 0.$$

Je-li y řešením rovnice $(\heartsuit)$ na intervalu (a, b) a y^* řešením rovnice $(\heartsuit)$ na intervalu (c, d) a platí-li: $(a, b) \subset (c, d)$, $y(x) = y^*(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, říkáme, že y je restrikcí řešení y^* na interval (a, b) nebo že y^* je rozšířením řešení y na interval (c, d).

Řešení rovnice $(\heartsuit)$, které se rovná každému svému rozšíření,[34] nazýváme maximálním řešením rovnice $(\heartsuit)$; graf každého maximálního řešení se nazývá integrální křivkou rovnice $(\heartsuit)$.

Poznámka. Dá se ukázat, že pro každé řešení y existuje maximální řešení y^*, které je rozšířením y.[35]

Příklady.

1) Funkce

$$y^* \overset{\text{def.}}{=} \sin \quad \text{a} \quad y \overset{\text{def.}}{=} \sin|_{(0,\pi)} = y^*|_{(0,\pi)}$$

jsou dvě z (nekonečně mnoha) řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y = 0.$$

Řešení y^*, které je rozšířením řešení y na $\mathbb{R}$, je i jedním z (nekonečně mnoha) maximálních řešení výše uvedené diferenciální rovnice.

2) Diferenciální rovnice

$$(y'')^2 + (y')^4 + y^6 + 2000 = 0$$

nemá žádné řešení.

[32] Často budeme považovat diferenciální rovnici za vyřešenou, najdeme-li její řešení (alespoň) implicitně určené.

[33] Mluvíme taky o řešení rovnice $(\heartsuit)$ na intervalu (a, b).

[34] Jinak řečeno, mluvíme o řešení, které „*nemůže být rozšířeno na větší interval*“.

[35] Pozor: y^* nemusí být řešením y určeno jednoznačně!

7.2. Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu.

Budeme se zabývat pouze speciálním typem obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu, a to rovnicemi

$$y' = f(x, y),$$

kde $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Příklad. Najděme všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2} \qquad (\diamondsuit)$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$.

Řešení dané úlohy shrňme do pěti pozorování:

(i) Každé řešení y rovnice $(\diamondsuit)$ musí být spojitou a neklesající funkcí $(\forall x \in Dy: \ 0 \le y'(x) \in \mathbb{R})$.

(ii) Funkce $y(x) \overset{\text{def.}}{=} 0$ je řešením $(\diamondsuit)$ na $\mathbb{R}$.

(iii) Nechť

$$y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$$

je řešením $(\diamondsuit)$ na intervalu (a, b). Pak pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$\frac{y'(x)}{3\sqrt[3]{y^2(x)}} = 1.$$

Integrací této rovnosti získáme informaci, že

$$\left(\sqrt[3]{y(x)}\right)' = (x)' \text{ v } (a, b),$$

a proto existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$\sqrt[3]{y(x)} = x - c,$$

neboli

$$y(x) = (x - c)^3.$$

Navíc, protože předpokládáme, že $y(x) > 0$ v (a, b), je nutně $c \le a$.

(iv) Analogicky jako v pozorování *(iii)* lze ukázat: je-li

$$y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$$

řešením $(\diamondsuit)$ na intervalu (α, β), existuje $d \in \mathbb{R}, \ d \ge \beta$, takové, že pro každé $x \in (\alpha, \beta)$ platí

$$y(x) = (x - d)^3.$$

[36]

[36] Důsledkem pozorování *(iii)* a *(iv)* je tvrzení, že neexistuje řešení rovnice $(\diamondsuit)$ na $\mathbb{R}$, které by bylo (na $\mathbb{R}$) kladnou nebo zápornou funkcí.

(v) Dá se ukázat, že existuje právě pět „typů“ řešení ($\diamondsuit$) na $\mathbb{R}$:

- $y(x) \overset{\text{def.}}{=} 0$;

- $y(x) \overset{\text{def.}}{=} (x-c)^3 \quad \ldots$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$;

- $y(x) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} 0, & \text{je-li } x \le c, \\ (x-c)^3, & \text{je-li } x > c, \end{cases} \quad \ldots$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$;

- $y(x) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} (x-d)^3, & \text{je-li } x < d, \\ 0, & \text{je-li } x \ge d, \end{cases} \quad \ldots$ pro nějaké $d \in \mathbb{R}$;

- $y(x) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} (x-d)^3, & \text{je-li } x < d, \\ 0, & \text{je-li } d \le x \le c, \\ (x-c)^3, & \text{je-li } x > c, \end{cases} \quad \ldots$ pro nějaké $c, d \in \mathbb{R};\ d < c$.

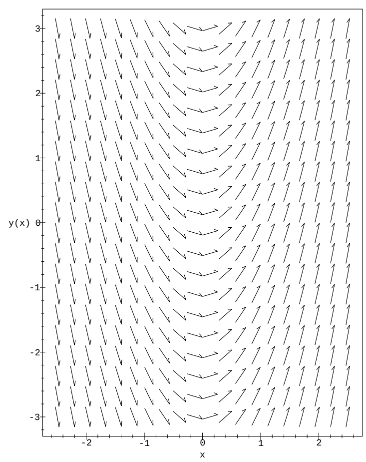
Poznámka. Uvažujme diferenciální rovnici $y' = f(x,y)$ a její libovolné řešení y. Pak $f(x, y(x))$ je (pro $x \in Dy$) zřejmě **`směrnicí tečny`** sestrojené ke grafu funkce y v bodě $(x, y(x))$. Volíme-li postupně body $(x,y) \in Df$ a v každém z nich si znázorníme „příslušný směr“ krátkou úsečkou se směrnicí $f(x,y)$, dostaneme tzv. <u>směrové pole</u>, z něhož lze získat představu o „tvaru“ integrálních křivek. V každém bodě musí být totiž „příslušná úsečka částí tečny“.

Pro ilustraci si pozorně prohlédněme následující obrázek znázorňující část směrového pole diferenciální rovnice

$$y' = 2x,$$

jejíž integrální křivky jsou popsány rovnostmi

$$y = x^2 + c, \text{ kde } c \in \mathbb{R}.$$



Věta 7.1 (Picardova – Lindelöfova).
Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a nechť funkce* f *a* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *jsou spojité na nějakém okolí bodu* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$*. Pak existuje* $h \in \mathbb{R}^+$ *takové, že Cauchyova úloha*

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

má právě jedno řešení na intervalu $(x_0 - h, x_0 + h)$*.*

Poznámka. Všimněme si, že výše uvedená Cauchyova úloha je ekvivalentní s tzv. <u>integrální rovnicí</u>

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t.$$

Dá se ukázat, že pro „vhodné“ $h \in \mathbb{R}^+$ je řešení této rovnice na intervalu $(x_0 - h, x_0 + h)$ dáno předpisem

$$y(x) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{n\to\infty} y_n(x),$$

kde „posloupnost funkcí“ (y_n) je na intervalu $(x_0 - h, x_0 + h)$ definovaná rekurentně rovnostmi:

$$y_0(x) \overset{\text{def.}}{=} y_0,$$

$$y_1(x) \overset{\text{def.}}{=} y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\,\mathrm{d}t,$$

$$y_2(x) \overset{\text{def.}}{=} y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,\mathrm{d}t,$$

$$\dots$$

$$y_{n+1}(x) \overset{\text{def.}}{=} y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,\mathrm{d}t. \quad [37]$$

[37] Výše popsané konstrukce řešení lze užít například i k nalezení přibližného řešení dané Cauchyovy úlohy.

7.2.1. Diferenciální rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými.

Zabývejme se diferenciálními rovnicemi tvaru

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)}, \tag{♠}$$

kde

$$g, h: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Takovéto rovnice lze často řešit tzv. metodou separace proměnných, která je založena na následující úvaze:

Pro řešení y rovnice (♠) na intervalu (a, b) platí:

$$h(y(x))y'(x) = g(x) \text{ v } (a, b).$$

Je-li funkce H, respektive funkce G, primitivní funkcí k funkci h, respektive k funkci g,[38] je

$$\big(H(y(x))\big)' = h(y(x))y'(x) = g(x) = G'(x) \text{ v } (a, b),$$

a proto existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$H(y(x)) = G(x) + c.$$

[39]

Pozor. Výše popsaná metoda je pouze návodem, jak postupovat. Hledáme-li řešení konkrétní rovnice, je `nutno ověřit korektnost jednotlivých kroků!`

Poznámka. Vraťme se zpět k diferenciální rovnici $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ (viz stranu 38). Všimněme si, že při jejím řešení jsme použili právě uvedené metody separace proměnných.

---

[38] Tzn., že

$$H'(t) = h(t), \ G'(x) = g(x).$$

[39] Někdy se při zápisu výše uvedené úvahy používá následující formalismus:

$$\text{„}y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{g(x)}{h(y)},$$

$$h(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int h(y)\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$H(y) = G(x) + c.\text{“}$$

Příklad. Najděme řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}, \\ y(1) = 1. \end{cases} \tag{$\clubsuit$}$$

Nejdříve si všimněme: je-li $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ řešením úlohy ($\clubsuit$) na intervalu (a, b), platí:

(i) $\forall x \in (a, b) : \; y(x) \neq 0$,
(ii) y je spojitá funkce na intervalu (a, b),
(iii) $1 \in (a, b)$, $y(1) = 1 > 0$,
(iv) $0 \notin (a, b)$.

Z těchto pozorování vyplývá, že funkce y je `kladná` na intervalu (a, b) a že $a \geq 0$.

Nyní postupujme pomocí metody separace proměnných. Je-li y řešením úlohy ($\clubsuit$) na intervalu (a, b), platí pro každé $x \in (a, b)$:

$$\frac{y(x)y'(x)}{1 + y^2(x)} = \frac{1}{x(1 + x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1 + x^2},$$

a proto taky (nezapomeňme, že $x > a \geq 0$)

$$\left(\frac{1}{2} \ln\left(1 + y^2(x)\right)\right)' = \left(\ln x - \frac{1}{2} \ln\left(1 + x^2\right)\right)'.$$

Odtud vyplývá, že existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in (a, b)$ platí:

$$\ln \sqrt{1 + y^2(x)} = \ln \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + c,$$

[40]

a tedy

$$1 + y^2(x) = \mathrm{e}^{2c} \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

Dosazením počáteční podmínky $y(1) = 1$ zjistíme, že konstanta e^{2c} se rovná 4, a proto[41]

$$y(x) = \sqrt{y^2(x)} = \sqrt{\frac{3x^2 - 1}{1 + x^2}}$$

pro každé $x \in (a, b)$. Chceme-li, aby touto rovností bylo definováno maximální řešení úlohy ($\clubsuit$), je nutno volit

$$(a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right).$$

---

[40] Zapišme výše uvedený výpočet pomocí formalismu uvedeného v poznámce č. 39:

$$\int \frac{y}{1 + y^2} \, \mathrm{d}y = \int \frac{1}{x(1 + x^2)} \, \mathrm{d}x,$$

a proto existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\frac{1}{2} \ln\left(1 + y^2(x)\right) = \ln x - \frac{1}{2} \ln\left(1 + x^2\right) + c.$$

[41] Víme už totiž, že funkce y je na intervalu (a, b) kladná.

Cvičení. Najděte řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y}{x-1}$$

splňující počáteční podmínku:

a) $y(2) = 1$;

b) $y(2) = 0$;

c) $y(-2) = -1$.

Cvičení. Najděte řešení Cauchyovy úlohy:

a) $\begin{cases} y' = x^2 y, \\ y(0) = 2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} y' = \frac{1-2x}{y^2}, \\ y(0) = 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} y' = y\cos x, \\ y(\pi) = 1. \end{cases}$

7.2.2. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu.

Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu rozumíme rovnici tvaru

$$y' = a(x)y + b(x),$$

kde funkce $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou definované na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$.

Věta 7.2 (o existenci a jednoznačnosti).
Nechť funkce $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou `spojité` *na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, nechť $x_0 \in I$ a nechť $y_0 \in \mathbb{R}$. Pak na intervalu I existuje právě jedno řešení Cauchyovy úlohy*

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Věta 7.3. *Nechť funkce $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou* `spojité` *na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Pak platí:*

(i) Existuje (na I) kladná funkce $y^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je řešením tzv. homogenní rovnice

$$y' = a(x)y$$

na intervalu I.

(ii) Funkce definované předpisy

$$y_h(x) \stackrel{\text{def.}}{=} cy^+(x), \text{ kde } c \in \mathbb{R},$$

jsou právě všechna řešení homogenní rovnice $y' = a(x)y$ na intervalu I.

(iii) Existuje (na I) `spojitě diferencovatelná` *funkce $C: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že funkce definovaná předpisem*

$$y_p(x) \stackrel{\text{def.}}{=} C(x)y^+(x)$$

je řešením tzv. nehomogenní rovnice

$$y' = a(x)y + b(x)$$

na intervalu I.

(iv) Funkce definované předpisem

$$y(x) \stackrel{\text{def.}}{=} cy^+(x) + y_p(x), \text{ kde } c \in \mathbb{R},$$

jsou právě všechna řešení nehomogenní rovnice $y' = a(x)y + b(x)$ na intervalu I.

K tomu, abychom popsali všechna řešení diferenciální rovnice $y' = a(x)y + b(x)$ na intervalu I, nám tedy stačí najít dvě funkce: y^+ a y_p. Funkci y^+ budeme hledat pomocí metody separace proměnných, funkci y_p metodou tzv. variace konstanty, tj. využitím tvrzení *(iii)* Věty 7.3. Ukažme si vše na příkladech.

Příklad. Najděme všechna řešení lineární diferenciální rovnice

$$y' = -xy + x$$

na intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Nejdříve najděme – metodou separace proměnných – funkci y^+, tj. nějaké kladné řešení homogenní rovnice $y' = -xy$:

$$\frac{y'}{y} = -x,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -x \, \mathrm{d}x,$$

$$\ln y = -\frac{x^2}{2} + k, \ k \in \mathbb{R}.$$

Volíme-li (například) $k = 0$, získáme odtud hledanou funkci y^+:

$$y^+(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Nyní hledejme – metodou variace konstanty – funkci y_p[42]; podrobněji řečeno: hledejme nějakou spojitě diferencovatelnou funkci $C:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, aby funkce

$$y_p(x) \overset{\text{def.}}{=} C(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

byla řešením rovnice $y' = -xy + x$ na $\mathbb{R}$, tj., aby pro každé $x \in \mathbb{R}$ byla splněna rovnost

$$y_p'(x) = -xy_p(x) + x.$$

Odtud plyne, že

$$C'(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - C(x)x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = -xC(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + x,$$

a proto

$$C'(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}.$$

Integrací[43] získáme

$$C(x) = \int x\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}},$$

a tudíž (pro každé $x \in \mathbb{R}$) platí:

$$y_p(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 1.$$

Řešeními lineární diferenciální rovnice $y' = -xy + x$ na $\mathbb{R}$ jsou právě všechny funkce definované rovnostmi

$$y(x) \overset{\text{def.}}{=} c\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + 1,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

[44]

Příklad. Najděme maximální řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} y' = -y \operatorname{cotg} x + \sin x, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

Řešení hledáme na intervalu $(0, \pi)$.[45] Budeme postupovat podobně jako před chvílí, a budeme proto stručnější:

[42] Funkce y_p se někdy nazývá partikulárním řešením rovnice $y' = a(x)y + b(x)$.

[43] Volme substituci:

$$„\frac{x^2}{2} = t“.$$

[44] Prohlédněme si znovu provedený výpočet a rozmysleme si podrobně tuto skutečnost: vztahem

$$C'(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$$

není funkce C určena jednoznačně (je určena jednoznačně „až na konstantu“), její konkrétní volba (tzn., zvolíme-li „tu konstantu“) však správnost výsledku neovlivní.

[45] Otázka čtenáři: *Proč?*

`Nalezení kladného řešení homogenní rovnice, tj. funkce` y^+:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\ln y = -\ln(\sin x) + k,\ k \in \mathbb{R},$$

a proto[46]

$$y^+(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\sin x}.$$

`Nalezení partikulárního řešení, tj. funkce` y_p:

$$y_p(x) \stackrel{\text{def.}}{=} C(x)\frac{1}{\sin x}.$$

Dosazením do rovnice $y' = -y \operatorname{cotg} x + \sin x$ vypočítáme, že (pro každé $x \in (0, \pi)$ platí

$$C'(x) = \sin^2 x.$$

Odtud získáme

$$C(x) = \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x),$$

a proto

$$y_p(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right)\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2}\frac{x}{\sin x} - \frac{1}{2}\cos x.$$

Zjistili jsme, že funkce definované rovnostmi

$$y(x) \stackrel{\text{def.}}{=} cy^+(x) + y_p(x) = c\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2}\frac{x}{\sin x} - \frac{1}{2}\cos x, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R},$$

jsou právě všechna řešení rovnice $y' = -y \operatorname{cotg} x + \sin x$ na intervalu $(0, \pi)$. Nyní[47] dosaďme počáteční podmínku:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = c\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

a odtud vypočtěme

$$c = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Řešením dané Cauchyovy úlohy je funkce definovaná na intervalu $(0, \pi)$ předpisem

$$y(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2}\frac{x}{\sin x} - \frac{1}{2}\cos x.$$

---

[46] Volíme $k = 0$.

[47] `Až` nyní!

Cvičení. Najděte všechna maximální řešení lineární diferenciální rovnice:

a) $y' = y + x^2$;

b) $y' = y \operatorname{tg} x + \cos x$;

c) $y' = \frac{y}{x}$;

d) $y' = -\frac{y}{x} + 3x$.

Cvičení. Najděte maximální řešení Cauchyovy úlohy:

a) $\begin{cases} y' = -\frac{y}{x} + 3x, \\ y(1) = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} y' = y \operatorname{cotg} x + \mathrm{e}^x \sin x, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$

7.3. Lineární dif. rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty.

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(x), \qquad (\heartsuit)$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ a funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$.

Věta 7.4 (o existenci a jednoznačnosti).
Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá *na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, nechť $x_0 \in I$ a nechť $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \in \mathbb{R}$.*

Pak na intervalu I existuje právě jedno řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(x), \\ y(x_0) = \varphi_0,\ y'(x_0) = \varphi_1,\ y''(x_0) = \varphi_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = \varphi_{n-1}. \end{cases}$$

Sestavme nyní tzv. charakteristickou rovnici příslušnou rovnici $(\heartsuit)$:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Z algebry víme, že tato rovnice má právě n kořenů (v $\mathbb{C}$), počítáme-li každý z nich tolikrát, kolik činí jeho násobnost. Dále víme: je-li komplexní číslo

$$\alpha + \beta i$$
$$(\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0)$$

kořenem charakteristické rovnice násobnosti l, je i číslo komplexně sdružené, tj. číslo $\alpha - \beta i$, kořenem charakteristické rovnice násobnosti l.

Přiřaďme nyní:

- každému **reálnému kořenu charakteristické rovnice** α **násobnosti** k **těchto** k **funkcí**:

$$\mathrm{e}^{\alpha x},\ x\,\mathrm{e}^{\alpha x},\ x^2\,\mathrm{e}^{\alpha x},\ \ldots,\ x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x};$$

- každé **dvojici nereálných komplexních kořenů charakteristické rovnice** $\alpha+\beta i$ **a** $\alpha-\beta i$ **násobností** l **těchto** $2l$ **funkcí**:

$$\begin{gathered}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x),\ x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x),\ x^2\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x),\ \ldots,\ x^{l-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x),\\ \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x),\ x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x),\ x^2\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x),\ \ldots,\ x^{l-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x),\end{gathered}$$

a nazývejme tímto způsobem sestrojené funkce

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n.$$

Věta 7.5. *Nechť funkce* $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *je* **spojitá** *na otevřeném intervalu* $I\subset\mathbb{R}$. *Pak platí:*

(i) Funkce definované předpisy

$$y_h(x) \overset{\text{def.}}{=} c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x),$$

kde $c_1,c_2,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$, *jsou právě všechna řešení* <u>*homogenní rovnice*</u>

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$$

na $\mathbb{R}$.

(ii) Funkce $y_p:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definovaná na intervalu* I *předpisem*

$$y_p(x) \overset{\text{def.}}{=} C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+\cdots+C_n(x)y_n(x),$$

kde $C_1,C_2,\ldots,C_n:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *jsou takové funkce, že pro každé* $x\in I$ *platí:*

$$\begin{array}{llll} C_1'(x)y_1(x) & +\,C_2'(x)y_2(x) & +\ldots+\,C_n'(x)y_n(x) & =0,\\ C_1'(x)y_1'(x) & +\,C_2'(x)y_2'(x) & +\ldots+\,C_n'(x)y_n'(x) & =0,\\ C_1'(x)y_1''(x) & +\,C_2'(x)y_2''(x) & +\ldots+\,C_n'(x)y_n''(x) & =0,\\ & & \ldots & \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) & +\,C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) & +\ldots+\,C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) & =0,\\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) & +\,C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) & +\ldots+\,C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) & =f(x),\end{array}$$

je řešením <u>nehomogenní rovnice</u>

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

na intervalu I.

(iii) Funkce definované předpisy

$$y(x) \overset{\text{def.}}{=} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x),$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, jsou právě všechna řešení nehomogenní rovnice ($\heartsuit$) na intervalu I.

Ilustrujme si výše uvedenou teorii na příkladech.

Příklady.

1) Najděme všechna řešení (na $\mathbb{R}$) lineární diferenciální rovnice

$$y'' + 2y' - 3y = 0.$$

Protože příslušná charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

má kořeny 1 a -3, jsou funkce definované předpisy

$$y(x) \overset{\text{def.}}{=} c_1\,\mathrm{e}^x + c_2\,\mathrm{e}^{-3x}, \text{ kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

právě všechna řešení dané úlohy.

2) Najděme všechna maximální řešení homogenní rovnice

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Řešení hledáme na $\mathbb{R}$. Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

má jen jeden (dvojnásobný) kořen 2. Řešeními jsou proto funkce definované předpisy

$$y(x) \overset{\text{def.}}{=} c_1\,\mathrm{e}^{2x} + c_2 x\,\mathrm{e}^{2x}, \text{ kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3) Řešme na $\mathbb{R}$ diferenciální rovnici

$$y'' - 6y' + 10y = 0.$$

Řešením charakteristické rovnice

$$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$$

jsou komplexní čísla $3 + i$ a $3 - i$. To znamená, že všechna řešení jsou popsána rovnostmi

$$y(x) \overset{\text{def.}}{=} c_1\, \mathrm{e}^{3x} \sin x + c_2\, \mathrm{e}^{3x} \cos x, \text{ kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4) Najděme všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y^{(5)} + 2y''' + y' = 0.$$

Charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda = 0.$$

Najděme její kořeny:

$$\lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = \lambda(\lambda^2 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \big(\lambda = 0 \ \vee \ \lambda = i \ \vee \ \lambda = -i\big),$$

a pomocí nich pak popišme všechna řešení dané úlohy:[48]

$$y(x) \overset{\text{def.}}{=} c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x + c_4 x \sin x + c_5 x \cos x, \text{ kde } c_1, \ldots, c_5 \in \mathbb{R}.$$

Příklad. Najděme maximální řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 34y = 0, \\ y(0) = 2,\ y'(0) = -11. \end{cases}$$

Protože kořeny charakteristické rovnice jsou komplexní čísla $-3 + 5i$ a $-3 - 5i$, tvoří funkce definované předpisy

$$y(x) \overset{\text{def.}}{=} c_1\, \mathrm{e}^{-3x} \sin(5x) + c_2\, \mathrm{e}^{-3x} \cos(5x), \text{ kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

právě všechna řešení rovnice $y'' + 6y' + 34y = 0$ na $\mathbb{R}$.

Dosadíme-li počáteční podmínky:

$$y(0) = c_2 = 2,$$
$$y'(0) = 5c_1 - 3c_2 = -11,$$

zjistíme, že

$$c_1 = -1,\ c_2 = 2.$$

Hledaným řešením je proto funkce

$$y(x) \overset{\text{def.}}{=} 2\, \mathrm{e}^{-3x} \cos(5x) - \mathrm{e}^{-3x} \sin(5x).$$

[48] Čtenář si rozmyslí podrobně sám!

Příklad. Najděme všechna řešení lineární diferenciální rovnice

$$y'' + 2y' + y = \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-x}$$

na intervalu $(0, +\infty)$.

Charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0,$$

a proto všechna řešení homogenní rovnice

$$y'' + 2y' + y = 0$$

jsou popsána rovnostmi

$$y_h(x) \stackrel{\text{def.}}{=} c_1\,\mathrm{e}^{-x} + c_2 x\,\mathrm{e}^{-x}, \text{ kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Najděme tzv. metodou variace konstant[49] partikulární řešení dané rovnice, tzn. funkci

$$y_p(x) \stackrel{\text{def.}}{=} C_1(x)\,\mathrm{e}^{-x} + C_2(x) x\,\mathrm{e}^{-x},$$

kde $C_1, C_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou takové funkce, že na intervalu $(0, +\infty)$ platí:

$$\begin{aligned} C_1'(x)\,\mathrm{e}^{-x} \quad &+ C_2'(x) x\,\mathrm{e}^{-x} &&= 0, \\ C_1'(x)(-\mathrm{e}^{-x}) &+ C_2'(x)(\mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x}) &&= \tfrac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme

$$C_1'(x) = -1,\ C_2'(x) = \frac{1}{x},$$

a odtud integrací

$$C_1(x) = \int -1\,\mathrm{d}x = -x,\ C_2(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x.$$

Našli jsme partikulární řešení

$$y_p(x) \stackrel{\text{def.}}{=} -x\,\mathrm{e}^{-x} + x \ln x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Všechna řešení dané úlohy jsou popsána rovnostmi

$$y(x) \stackrel{\text{def.}}{=} c_1\,\mathrm{e}^{-x} + c_2 x\,\mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} + x \ln x\,\mathrm{e}^{-x},$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

---

[49] Tj. pomocí tvrzení *(ii)* Věty 7.5.

Cvičení. Najděte všechna maximální řešení dané diferenciální rovnice:

a) $y''' - y' = 0$;

b) $y''' + y' = 0$;

c) $y^{(4)} - y = 0$;

d) $y'' - 6y' + 9y = 0$;

e) $y^{(4)} + y''' = 0$.

Cvičení. Najděte všechna maximální řešení dané diferenciální rovnice:

a) $y'' - 6y' + 9y = 1$;

b) $y'' + y = x$.

Cvičení. Najděte maximální řešení dané Cauchyovy úlohy:

a) $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 4, \\ y(3) = 1,\ y'(3) = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'' + 16y = 1, \\ y(0) = \frac{1}{8},\ y'(0) = \frac{1}{4}. \end{cases}$

Doporučená literatura

- J. Bouchala: *Matematická analýza 1*, Skripta VŠB–TU, 1998;
- J. Bouchala, L. Šimonová: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné (pro bakalářské studium)*, učební text pro studenty VŠB–TU, 2000;
- J. Bouchala, L. Šimonová: *Integrální počet funkcí jedné proměnné (pro bakalářské studium)*, učební text pro studenty VŠB–TU, 2000;
- J. Brabec, B. Hrůza: *Matematická analýza II.*, SNTL, 1986;
- B. Budinský, J. Charvát: *Matematika II.* SNTL, 1990;
- J. Charvát, M. Hála, V. Kelar, Z. Šibrava: *Příklady k Matematice II.*, Skripta ČVUT, 1992;
- I. Kluvánek, L. Mišík, M. Švec: *Matematika I*, Slovenské vydavatel'stvo technickej literatúry, 1959;
- I. Kluvánek, L. Mišík, M. Švec: *Matematika II*, Slovenské vydavatel'stvo technickej literatúry, 1961;
- K. Rektorys a spolupracovníci: *Přehled užité matematiky*, SNTL, 1981.