PŘ. 1

a) Počet vzešlých sazenic lze chápat jako počet úspěchů v posloupnosti 40 bernoulliovských pokusů s pravděpodobností úspěchu 0,75, tj. jde o veličinu s binomickým rozdělením.

Počet vzešlých sazenic ... $X \sim Bi(40, 0{,}75)$

Pravděpodobnost, že vzejde méně než 30 sazenic:

$P(X \leq 29) \underset{*}{=} F_X(29) \doteq \underline{0{,}416}$

Výpočet v R: pbinom(29, 40, 0,75).

Pravděpodobnost, že vzejde méně než 30 sazenic je 0,416.

* Platí pro distribuční funkci definovanou s neostrou nerovností ($F_X(x) = P(X \leq x)$), jak ji používá R.

b) Otázku lze přeformulovat takto:
Kolik pokusů musíme provést, abychom s pravděpodobností alespoň 0,95 získali alespoň 20 sazenic.

Počet pokusů potřebných k dosažení 20. úspěchu v posloupnosti ber. pokusů má negativně binomické rozdělení

Počet pokusů k dosažení 20. úspěchu ... $Y \sim NB(20, 0{,}75)$

Hledáme nejmenší přirozené číslo y takové, že $P(Y \leq y) \geq 0{,}95$, tj. $F_Y(y) \geq 0{,}95$.

Číslo y s touto vlastností je 0,95-kvantil negativně binomického rozdělení s parametry 20 a 0,75.

$$y = Y_{0{,}95} = 32.$$

Výpočet v R: qnbinom(0,95, 20, 0,75) + 20

v R je negativně binomická veličina definována jako počet neúspěchů před dosažením k-úspěchu. Abychom dostali celkový počet pokusů, je potřeba ručně přičíst počet úspěchů (20).

Abychom s pravděpodobností alespoň 0,95 vypěstovali nejméně 20 sazenic, je potřeba alespoň 32 semínek.

POZNÁMKA: Výsledek lze ověřit např. takto:

X ... počet sazenic z n semínek

$X \sim Bi(n, 0{,}75)$

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) = 1 - F_X(19)$$

pro $n = 32$: $P(X \geq 20) \doteq 0{,}96 \geq 0{,}95$ ✓

(1 − pbinom(19, 32, 0,75))

pro $n = 31$: $P(X \geq 20) \doteq 0{,}94 < 0{,}95$ ✓

(1 − pbinom(19, 31, 0,75))

PŘ. 2

životnost výbojky ... $T \sim Exp(\lambda)$

Parametr λ určíme ze střední hodnoty str. hodnoty (průměrná životnost).

$ET = 2000$

pro $T \sim Exp(\lambda)$ platí $ET = \frac{1}{\lambda}$ $\Big\}$ $\frac{1}{\lambda} = 2000$

$\Downarrow$

$\lambda = \frac{1}{2000}$

Hledáme největší $t \geq 0$, pro které platí

$P(T \leq t) \leq 0{,}1$ ← pravděpodobnost, že porucha nastala před časem t

tj. $F_T(t) \leq 0{,}1$

Distribuční funkce je neklesající, proto pro hledaný čas t platí $F_T(t) = 0{,}1$. Hledané t je tedy 0,1-kvantil, $t = T_{0{,}1} = 210{,}7$ hodin.

v R: qexp(0,1 , 1/2000)

Nejdelší doba, během které pravděpodobnost poruchy výbojky nepřekročí 0,1 je 210,7 hodiny.

PŘ.3 a) Dopady fotonů představují události v Poissonově procesu (s parametrem intenzity λ).

Počet dopadů za 1 s ... $X \sim Po(\lambda \cdot 1)$

určení parametru λ: $EX = \underbrace{\lambda \cdot 1 = 1{,}6}_{\lambda = 1{,}6}$

Počet dopadů za 1 minutu ... $Y \sim Po(1{,}6 \cdot 60)$

Pravděpodobnost, že za 1 minutu dopadne na detektor více než 100 fotonů:

$P(Y > 100) = 1 - P(Y \leq 100) = 1 - F_Y(100) \doteq \underline{0{,}318}$

v R: 1 - ppois (100, 96).

Pravděpodobnost, že za 1 minutu dopadne na detektor více než 100 fotonů je 0,318.

b) Veličinu $X \sim Po(1{,}6 \cdot 60)$ lze vyjádřit např.

jako $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{60}$, kde

$X_i \sim Po(1{,}6 \cdot 1)$ ... počet dopadů za 1 s.

Veličiny $X_1, \dots, X_{60}$ jsou nezávislé a stejně rozdělené (plyne z předpokladů Poissonova procesu).

Podle CLV pak $X \dot\sim N(EX, DX)$

$EX = 96$, $DX = 96$
(pro $X \sim Po(\lambda t)$ platí $EX = \lambda t$, $DX = \lambda t$)

Označme F distribuční funkci normálního rozdělení $N(96, 96)$.

Pak $P(Y > 100) = 1 - P(Y \leq 100) \approx 1 - F(100) \doteq 0{,}342$.

S „korekcí na spojitost" lze získat lepší aproximaci

$P(Y > 100) \approx 1 - F(100{,}5) = \underline{0{,}323}$.

v R: `1 - pnorm(100.5, 96, 96**0.5)`

2. parametrem normálního rozdělení v R je směrodatná odchylka.

Při aproximaci pomocí CLV se dopustíme chyby přibližně 0,005.

(To odpovídá relativní chybě přibližně 1,5 %.)

PŘ 4. Dobu, za kterou bude Maruška po svém příchodu obsloužena (pokud by provoz případně pokračoval i po 16:00) lze vyjádřit jako

$X = X_0 + X_1 + \dots + X_{50}$, kde $X_1, \dots, X_{50}$ jsou doby obsluhy jednotlivých osob ve frontě před Maruškou. (X_{50} je doba obsluhy Marušky.)

X_0 je doba, která od 12:00 uplyne do obsloužení osoby, která je během Maruščina příchodu u přepážky.

Ze zadání plyne $X_0, \dots, X_{50} \sim Exp(\lambda)$.

Určení parametru λ: $EX_i = \frac{1}{\lambda} = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}$

(POZN: Pro veličinu $Z \sim Exp(\lambda)$ platí:

$$P(Z \leq x_0 + x \mid Z \geq x_0) = P(Z \leq x)$$

Podmíněná pravděpodobnost, že občan bude obsloužen do doby $x + x_0$ za předpokladu, že do doby x_0 ještě obsloužen nebyl, je rovna pravděpodobnosti (nepodmíněné), že bude obsloužen do doby x (od okamžiku 0).

Proto $X_0 \sim Exp(\lambda)$ i když občan je ve 12:00 již nějakou dobu u přepážky.)

Veličiny $X_0, \dots, X_{50}$ jsou nezávislé a stejně rozdělené. Podle CLV pak platí

$$X \,\dot\sim\, N(EX, DX).$$

Platí: $EX = E(X_0 + \dots + X_{50}) = EX_0 + \dots + EX_{50} = 51 \cdot EX_i$
$= 51 \cdot 5 = 255$
$\left(EX_i = \frac{1}{\lambda} = 5 \right)$

protože X_i jsou nezávislé

$DX = D(X_0 + \dots + X_{50}) = DX_0 + \dots + DX_{50}$
$= 51 \cdot DX_i = 51 \cdot 25 = 1275$
$\left(DX_i = \frac{1}{\lambda^2} = 25 \right)$

Označme F distr. funkci $N(255, 1275)$.

Pak pro $P(X \leq 240)$, tj. Maruška bude obsloužena nejpozději za 240 minut, platí:

$$P(X \leq 240) \approx F(240) \doteq 0{,}337.$$

v R: pnorm(240, 255, 1275**0.5)

Maruška bude obsloužena do 16:00 s pravděpodobností přibližně 0,337.

POZNÁMKA: Bez CLV lze úlohu řešit např. takto:
Obsloužení jednotlivých osob jsou události v Poissonově procesu s intenzitou $\lambda = \frac{1}{5}$.
Y ... počet obsloužených za 4 hod, $Y \sim Po\left(\frac{1}{5} \cdot 240\right)$.
Maruška bude obsloužena právě když dojde alespoň k 51 událostem.
$P(Y \geq 51) = 1 - P(Y \leq 50) = 0{,}357$.
v R: 1-ppois(50, 240/5)