(1) Náhodné jevy

C ... funguje počítač

T_1 ... funguje 1. tiskárna

T_2 ... funguje 2. tiskárna

A ... auto je pojízdné

K ... kurýr projde vrátnicí

O ... práce bude odevzdána včas

Podle zadání lze předpokládat, že náhodné jevy

C, T_1, T_2, A, K jsou nezávislé.

Jev O nastane právě tehdy, když současně nastanou

jevy C, A, K a dále nastane alespoň 1 z jevů

T_1, T_2 (tj. bude fungovat alespoň 1 tiskárna).

$$O = C \cap (T_1 \cup T_2) \cap A \cap K$$

Zadané pravděpodobnosti:

$P(\overline{C}) = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad P(C) = 0{,}95$

$P(\overline{T_1}) = 0{,}2$

$P(\overline{T_2}) = 0{,}3$

$P(\overline{A}) = 0{,}08 \quad \Rightarrow \quad P(A) = 0{,}92$

$P(\overline{K}) = 0{,}15 \quad \Rightarrow \quad P(K) = 0{,}85$

$$P(O) = P(C \cap (T_1 \cup T_2) \cap A \cap K) =$$ ← nezávislost jevů

$$= P(C) \cdot P(T_1 \cup T_2) \cdot P(A) \cdot P(K) =$$

$$= P(C) \cdot \left(1 - P(\overline{T_1}) \cdot P(\overline{T_2})\right) \cdot P(A) \cdot P(K) =$$

$$= 0{,}95 \cdot (1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3) \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}85$$

$$\doteq \underline{\underline{0{,}7}}$$

$P(T_1 \cup T_2)$ spočítáme pomocí pravděpodobnosti doplňkového jevu:

$$P(T_1 \cup T_2) = 1 - P(\overline{\overline{T_1} \cup \overline{T_2}}) =$$
$$= 1 - P(\overline{T_1} \cap \overline{T_2}) =$$
$$= 1 - P(\overline{T_1}) \cdot P(\overline{T_2})$$

Pravděpodobnost, že Mirek práci včas odevzdá je 0,7.

(2) Výběr („losování") melounu představuje náhodný pokus. Jako důsledek náhodného pokusu mohou nastat (nenastat) tyto náhodné jevy:

Z ... meloun je zralý

A ... meloun má suchou stopku

B ... meloun má žluté skvrny

Zadané pravděpodobnosti

$P(Z) = 0{,}25$ („čtvrtina melounů je zralých"

$\Rightarrow P(\overline{Z}) = 0{,}75$ $\Rightarrow$ pravděpodobnost, že náhodně vybraný meloun je zralý (nastal jev Z), je $\frac{1}{4}$)

$P(A/Z) = 0{,}8$ (je-li meloun zralý (tj. víme, že jev Z nastal), pak má suchou stopku (nastane jev A) s pr. $0{,}8$)

$\Rightarrow P(\overline{A}/Z) = 0{,}2$

$P(A/\overline{Z}) = 0{,}2$ (není-li zralý ...)

$\Rightarrow P(\overline{A}/\overline{Z}) = 0{,}8$

$P(B/Z) = 0{,}7$ (je-li meloun zralý (tj. jev Z nastal), pak má žluté skvrny (nastane jev B) s pr. $0{,}7$)

$\Rightarrow P(\overline{B}/Z) = 0{,}3$

$P(B/\overline{Z}) = 0{,}1$ (není-li zralý, ...)

$\Rightarrow P(\overline{B}/\overline{Z}) = 0{,}9$

a) Při nákupu jsme vybrali meloun se suchou stopkou = víme, že jev A nastal. Jaká je pravděpodobnost, že pak nastane jev Z? Tj. ptáme se na podmíněnou pravděpodobnost jevu Z za podmínky, že nastal jev A.

$$P(Z|A) = \frac{P(A|Z)\cdot P(Z)}{P(A|Z)\cdot P(Z) + P(A|\bar{Z})\cdot P(\bar{Z})}$$

Bayesova věta (jevy $Z, \bar{Z}$ tvoří úplný systém disjunktních jevů - B_1, B_2)

$$= \frac{0{,}8\cdot 0{,}25}{0{,}8\cdot 0{,}25 + 0{,}2\cdot 0{,}75} \doteq \underline{\underline{0{,}57}}$$

Má-li meloun suchou stopku, pak je s pravděpodobností 0,57 zralý.

b) Jaká je pravděpodobnost, že je meloun zralý (nastane jev Z), má-li žlutou skvrnu (víme, že nastal jev B).

$$P(Z|B) = \frac{P(B|Z)\cdot P(Z)}{P(B|Z)\cdot P(Z) + P(B|\bar{Z})\cdot P(\bar{Z})} =$$

$$= \frac{0{,}7\cdot 0{,}25}{0{,}7\cdot 0{,}25 + 0{,}1\cdot 0{,}75} = \underline{\underline{0{,}7}}$$

Má-li meloun žlutou skvrnu, pak je s pravděpodobností 0,7 zralý.

c) Jaká je pravděpodobnost, že jsme koupili zralý meloun (nastal jev Z), jestliže má suchou stopku a žlutou skvrnu (tj. víme, že nastal jev $A \cap B$).

$$P(Z / A \cap B) = \frac{P(A \cap B / Z) \cdot P(Z)}{P(A \cap B / Z) \cdot P(Z) + P(A \cap B / \bar{Z}) \cdot P(\bar{Z})} \qquad (*)$$

Podmíněné pravděpodobnosti $P(A \cap B / Z)$ a $P(A \cap B / \bar{Z})$ nejsou zadány. Podle zadání jsou ale jevy A a B nezávislé za podmínky, že nastal jev Z i za podmínky, že nenastal jev Z (tj. nastal $\bar{Z}$). Platí tedy

$P(A \cap B / Z) = P(A / Z) \cdot P(B / Z)$ a $P(A \cap B / \bar{Z}) = P(A / \bar{Z}) \cdot P(B / \bar{Z})$.

$P(A \cap B / Z) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$, $P(A \cap B / \bar{Z}) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02$.

Dosazením do (*) dostaneme

$$P(Z / A \cap B) = \frac{0{,}56 \cdot 0{,}25}{0{,}56 \cdot 0{,}25 + 0{,}02 \cdot 0{,}75} \doteq \underline{\underline{0{,}9}}$$

Má-li meloun suchou stopku a žlutou skvrnu, je zralý s pravděpodobností 0,9.

③ a) $P(X=2 \cap Y=1) = \underline{\underline{0{,}2}}$

b) $P(X>1 \cap Y<1) = P\big((X,Y)=(2,-1) \cup (X,Y)=(2,0) \cup (X,Y)=(3,-1) \cup (X,Y)=(3,0)\big)$

$= P\big((X,Y)=(2,-1)\big) + \dots + P\big((X,Y)=3,0)\big) =$

náhodné jevy jsou disjunktní

$= 0{,}15 + 0{,}2 + 0 + 0{,}15 = \underline{\underline{0{,}5}}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

c) $P(X>1 \cup Y<1) = 1 - P\left(\overline{X>1 \cup Y<1}\right) =$

pravděpodobnost vyjádříme pomocí pravděpodobnosti doplňkového jevu

$= 1 - P(X \leq 1 \cap Y \geq 1) =$

$= 1 - P(X=1 \cap Y=1) =$

$= 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$

Mohli bychom počítat přímo jako v b). Využili jsme toho, že pravděpodobnost doplňkového jevu určíme snadněji.

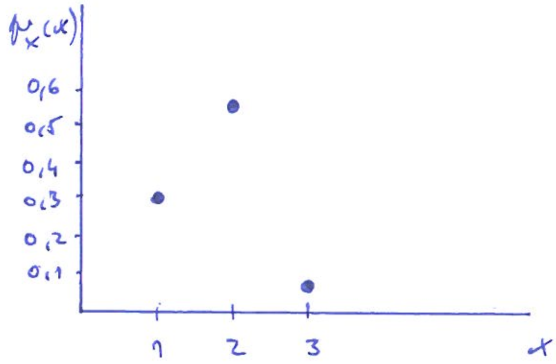
d) $P(X=1) = P\big((X,Y)=(1,-1) \cup (X,Y)=(1,0) \cup (X,Y)=(1,1)\big) =$

$= 0{,}1 + 0{,}2 + 0 = 0{,}3$

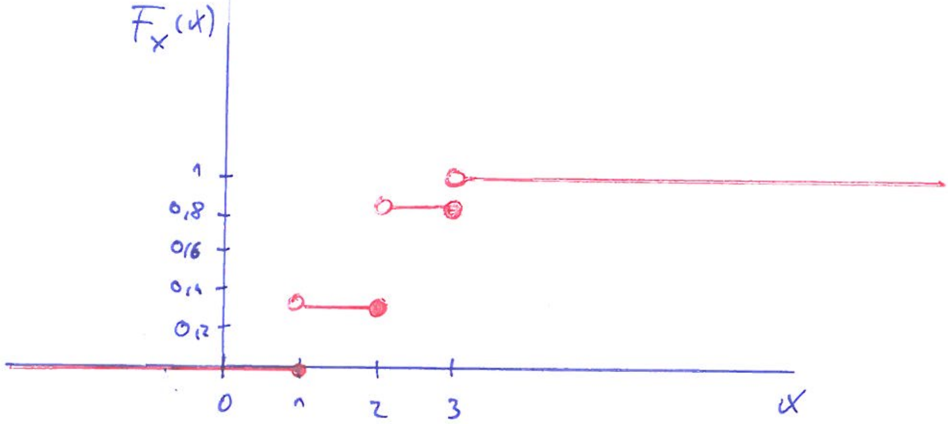
$P(X=2) = \dots = 0{,}15 + 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}55$

$P(X=3) = \dots = 0 + 0{,}15 + 0 = 0{,}15$

$$p_X(x) = \begin{cases} 0{,}3 & \text{pro } x=1 \\ 0{,}55 & \text{pro } x=2 \\ 0{,}15 & \text{pro } x=3 \\ 0 & \text{pro } x \notin \{1,2,3\} \end{cases}$$



e) $F_X(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 1 \\ P(X=1) = 0{,}3 & \text{pro } 1 < x \leq 2 \\ P(X=1) + P(X=2) = 0{,}85 & \text{pro } 2 < x \leq 3 \\ 1 & \text{pro } x > 3 \end{cases}$



f) $E(X) = \sum_{x=1}^{3} x \cdot p_X(x) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}55 + 3 \cdot 0{,}15 = \underline{\underline{1{,}85}}$

g) $E(X^2) = \sum_{x=1}^{3} x^2 \cdot p_X(x) = 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}55 + 9 \cdot 0{,}15 = 3{,}85$

$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 3{,}85 - 1{,}85^2 = \underline{\underline{0{,}4275}}$

h) $P(Y=-1) = 0{,}1 + 0{,}15 + 0 = 0{,}25 \qquad (= p_Y(-1))$

$P(Y=0) = 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}55 \qquad (= p_Y(0))$

$P(Y=1) = 0 + 0{,}2 + 0 = 0{,}2 \qquad (= p_Y(1))$

modus $Y = 0$ (v bodě $y=0$ nabývá pravděpodobnostní funkce $p_Y(y) = P(Y=y)$ maxima.)

i) $\sigma X = \sqrt{DX} = \sqrt{0{,}4275} \doteq \underline{0{,}65}$

j) $EY = \sum_{y=-1}^{1} y\, p_Y(y) = -1 \cdot 0{,}25 + 0 \cdot 0{,}55 + 1 \cdot 0{,}2 = -0{,}05$

$E(X,Y) = (EX, EY) = \underline{(1{,}85,\ -0{,}05)}$

Střední hodnota náhodného vektoru je vektor středních hodnot jednotlivých složek.

k) $E(X \cdot Y) = \sum_{x=1}^{3} \sum_{y=-1}^{1} x \cdot y \cdot p_{X,Y}(x,y) =$

$= 1 \cdot (-1) \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0 \cdot 0{,}2 + \dots + 3 \cdot 1 \cdot 0$

$= (-1) \cdot 0{,}1 + (-2) \cdot 0{,}15 + 2 \cdot 0{,}2 = 0$

$\mathrm{cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 0 - 1{,}85 \cdot (-0{,}05) = \underline{0{,}09}$

l) $E(Y^2) = \sum_{y=-1}^{1} y^2 \cdot p_Y(y) = (-1)^2 \cdot 0{,}25 + 0^2 \cdot 0{,}55 + 1^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}45$

$DY = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 0{,}45 - (-0{,}05)^2 = 0{,}4475$

$\sigma Y = \sqrt{DY} \doteq 0{,}67$

$$\varrho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma X \cdot \sigma Y} \doteq \frac{0{,}09}{0{,}65 \cdot 0{,}67} \doteq \underline{\underline{0{,}21}}$$

m) $E(2X - 3Y + 1) = 2 \cdot EX - 3 \cdot EY + 1 = 2 \cdot 1{,}85 - 3 \cdot (-0{,}05) + 1 = \underline{\underline{4{,}85}}$

n) $$P(X=2 / Y=1) = \frac{P(X=2 \cap Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{0{,}2}{0{,}2} = \underline{\underline{1}}$$

o) $$P(X>1 | X<3) = \frac{P(X>1 \cap X<3)}{P(X<3)} = \frac{P(X=2)}{P(X<3)} = \frac{p_X(2)}{F_X(3)} = \frac{0{,}55}{0{,}85} =$$

$$\doteq \underline{\underline{0{,}65}}$$

p) Veličiny X, Y nejsou nezávislé. Např. proto, že

- $p_{X,Y}(x,y) \neq p_X(x) \cdot p_Y(y)$,
- $cov(X,Y) \neq 0$,
- $P(X=2 / Y=1) \neq P(X=2)$

.....