

Náhodné jevy

1. Dokažte, že σ -algebra je uzavřena vzhledem k spočetným průnikům svých prvků.
2. Dokažte, že jistý jev a nemožný jev jsou nezávislé s každým náhodným jevem ze stejného pravděpodobnostního prostoru.
3. Necht' (Ω, \mathcal{S}, P) je pravděpodobnostní prostor a $A, B \in \mathcal{S}$ jsou nezávislé náhodné jevy.
 - (a) Dokažte, že náhodné jevy \bar{A}, B jsou nezávislé.
 - (b) Dokažte, že náhodné jevy \bar{A}, \bar{B} jsou nezávislé.
4. Necht' (Ω, \mathcal{S}, P) je pravděpodobnostní prostor a $A \in \mathcal{S}$ je náhodný jev takový, že $P(A) > 0$. Definujme zobrazení $Q : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(B) := P(B|A)$. Dokažte, že (Ω, \mathcal{S}, Q) je pravděpodobnostní prostor (tj. Q je pravděpodobnost na (Ω, \mathcal{S})).
5. Miloš jezdí do práce jen autobusem nebo vlakem. Nastala ale sněhová kalamita a Miloš ze zkušenosti ví, že v takovém případě s pravděpodobností 0.2 nejede vlak, s pravděpodobností 0.4 nejede autobus a s pravděpodobností 0.1 nejede vlak ani autobus. Určete:
 - (a) pravděpodobnost, že se Miloš dostane do práce,
 - (b) pravděpodobnost, že pojede vlak i autobus,
 - (c) pravděpodobnost, že pojede autobus, víme-li, že vlak nejede.
 - (d) Jsou náhodné jevy "jede autobus", "jede vlak" nezávislé?
6. Uvažujme náhodný pokus spočívající v hodu pravidelnou dvanáctistěnnou kostkou.
 - (a) Určete pravděpodobnost, že na kostce padne prvočíslo.
 - (b) Určete podmíněnou pravděpodobnost, že padlo prvočíslo, jestliže víme, že padlo číslo ≤ 6 . Jsou tyto jevy (padlo prvočíslo, padlo číslo ≤ 6) nezávislé?
 - (c) Určete pravděpodobnost, že padlo prvočíslo, pokud víme, že padlo sudé číslo menší nebo rovné 6. Jsou tyto jevy nezávislé?
 - (d) Rozhodněte, zda jsou jevy *padlo číslo, které má nejvýše dva dělitele a nepadlo číslo větší než 10* nezávislé.
7. Telegramní zpráva se skládá z teček a čárek. V průměru je zkresleno 4% teček (na čárky) a 2% čárek (na tečky). Ve vysílané zprávě se tečky a čárky vyskytují v poměru 5:4.
 - (a) Určete poměr teček a čárek v přijaté zprávě.
 - (b) Jaká je pravděpodobnost, že byla odeslána čárka, pokud byla přijata tečka?
8. Určitý výrobek je na trh dodáván od tří různých výrobců, přičemž na samotném výrobku není poznat, od kterého výrobce pochází. Od výrobce č. 1 pochází 1/3 výrobků na trhu, od výrobce č. 2 polovina. Výrobci se liší kvalitou produkce. V případě, že výrobek pochází od výrobce č. 1, je pravděpodobnost poruchy během záruční doby 0.01, v případě výrobce č. 2 je pravděpodobnost potuchy 0.02 a v případě výrobce č. 3 je to 0.08.
 - (a) Určete pravděpodobnost, že se náhodně zakoupený výrobek během záruční doby neporouchá.
 - (b) Určete pravděpodobnosti, s jakými tento výrobek pochází od jednotlivých výrobců za předpokladu, že se tento výrobek během záruční doby porouchal.
9. Rodina Chocholoušková má papouška a dvě kočky Alenu a Bohouše. Alena má 20% bílých chlupů, Bohouš 60%. Včera se jedna z koček opět pokusila papouška sežrat. Chocholouškoví vědí, že kočky nikdy neloví společně a že Alena útočí na papouška dvakrát častěji než Bohouš. Na místě činu zůstal po pachateli jediný chlup. Která z koček se činu dopustila s větší pravděpodobností, víme-li že nalezený chlup je bílé barvy?

10. Ulovené divoké prase je testováno na výskyt určitého druhu parazita, kterým je napadeno 10% jedinců. Test ale není zcela spolehlivý. U nakažených prasat je test ve 4% případů negativní (není indikována přítomnost parazita). U nenakažených prasat je výsledek testu v 3% případů pozitivní (je indikována přítomnost parazita).
- Určete pravděpodobnost, že výsledek testu bude pozitivní.
 - Určete pravděpodobnost, že se výsledek testu shoduje se skutečností.
 - Určete pravděpodobnost, že testované prase je napadeno parazitem, pokud byl výsledek testu pozitivní.
11. Komunikačním kanálem s vysokým výskytem šumu je odesílána zpráva obsahující právě jeden bit (tj. 0 nebo 1). Po odeslání jednobitové zprávy je jednobitová zpráva také vždy přijata (zpráva se neztratí). Během přenosu ale může dojít k chybě. Je-li odeslán bit 0, je pravděpodobnost chyby 0.1. Je-li odeslán bit 1, je pravděpodobnost chyby 0.2. Předpokládejme, že kanálem je odeslán náhodně vygenerovaný bit, přičemž 0 i 1 jsou generovány se stejnou pravděpodobností. Určete:
- pravděpodobnosti přijetí 0 a 1,
 - pravděpodobnost, že byla odeslána 0, byla-li přijata 0 a pravděpodobnost, že byla odeslána 1, byla-li přijata 1,
 - pravděpodobnost, že dojde k chybě při přenosu.
 - Předpokládejme dále, že stejný bit je odeslán dvakrát, přičemž výskyt chyby při přenosu nezávisí na předchozích výskytech chyb. Určete pravděpodobnost, že byla odeslána 0, znáte-li hodnoty obou přijatých bitů.
12. Filtr nevyžádané pošty obsahuje databázi frází, které se ve spamu vyskytují s vysokou četností. Každý příchozí email je filtrem označen jako spam právě tehdy, když obsahuje frázi z databáze. Testy bylo zjištěno, že pokud je daný email spam, pak s pravděpodobností 0.8 obsahuje nějakou frázi z databáze. V případě, že se nejedná o spam, je v těle emailu nějaká fráze z databáze s pravděpodobností 0.05. Dále je známo, že 70% emailů, které přichází na server, tvoří spam.
- Jaká je pravděpodobnost, že příchozí email je spam, obsahuje-li frázi z databáze?
 - Jaká je pravděpodobnost, že příchozí email je filtrem správně identifikován (spam je označen jako spam, běžný email není označen jako spam)?
13. Maruška si v autobazaru vyhlédla auto, které podle prodejce nebylo havarováno. 25 % automobilů, které jsou v autobazarech nabízeny jako nehavarované, má za sebou ve skutečnosti havárii. U 70 % opravených havarovaných aut se vyskytuje rozdíl v šířce spár mezi díly karosérie na levé a pravé straně vozu. Mezi nehavarovanými auty se rozdíl vyskytuje u 10 % vozů. Jaká je pravděpodobnost, že vybraný automobil je havarovaný, jestliže spáry po obou stranách nejsou stejně široké?
14. Pouze čtvrtina melounů prodávaných v supermarketu je zralých. Ostatní jsou nezralé. Zralé melouny se dají částečně poznat podle suché stopky. 80 % zralých melounů má stopku suchou. Z nezralých melounů má stopku suchou jen 20 %. Dalším příznakem zralosti melounu je barva skvrn na povrchu. Ty bývají bílé nebo žluté. 70 % zralých melounů má skvrny zbarvené do žluta. Z nezralých melounů má žluté skvrny jen 10 %.
- Při nákupu jsme vybrali meloun se suchou stopkou. Jaká je pravděpodobnost, že je zralý?
 - Jaká je pravděpodobnost, že je meloun zralý, má-li žluté skvrny?
 - Předpokládejme dále, že příznaky zralosti (žluté skvrny, suchá stopka) se u zralých i nezralých melounů vyskytují nezávisle na sobě. Jaká je pravděpodobnost, že jsme koupili zralý meloun, jestliže jsme vybrali meloun se suchou stopkou a žlutými skvrnami?