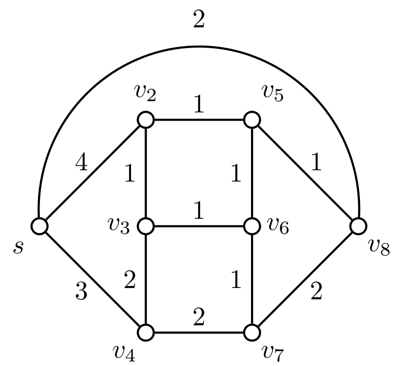
14 Dijkstrův algoritmus, kostry grafu

14.1. Nalezněte, užitím Dijkstrova algoritmu, vzdálenost z vrcholu s do všech ostatních vrcholů grafu G na Obrázku 14.1.



Obrázek 14.1: Graf G.

Vrcholy grafu zapíšeme do záhlaví tabulky a do prvního řádku zapíšeme výchozí hodnoty doposud nalezených vzdáleností. Pouze vrchol s je ve vzdálenosti 0, ostatní jsou ve vzdálenosti ∞.

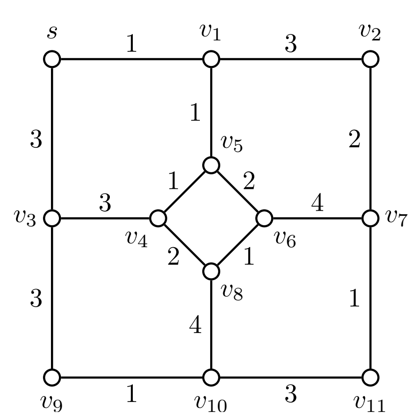
V každém kroku vybereme vrchol s nejmenší (nepodtrženou) vzdáleností, tu podtrhneme jako výslednou vzdálenost do daného vrcholu (proč? to bylo vysvětleno na přednášce) a aktualizujeme vzdálenosti do všech sousedních vrcholů. Nepodtržené hodnoty z předchozího řádku přepíšeme.

Postup končí, jakmile jsou podtrženy vzdálenosti v každém sloupci vrcholů ze souvislé komponenty.

	s	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
s	$\underline{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
v_8		4	∞	3	∞	∞	∞	$\underline{2}$
v_4		4	∞	$\underline{3}$	3	∞	4	
v_5		4	5		$\underline{3}$	∞	4	
v_2		$\underline{4}$	5			4	4	
v_6			5			$\underline{4}$	4	
v_7			5				$\underline{4}$	
v_3			$\underline{5}$					

Tabulka 14.1: *Průběh Dijkstrova algoritmu.*

14.2. Nalezněte, užitím Dijkstrova algoritmu, vzdálenost z vrcholu s do všech ostatních vrcholů grafu G na Obrázku 14.2.



Obrázek 14.2: Graf G.

Vrcholy grafu zapíšeme do záhlaví tabulky a do prvního řádku zapíšeme výchozí hodnoty doposud nalezených vzdáleností. Pouze vrchol s je ve vzdálenosti 0, ostatní jsou ve vzdálenosti ∞.

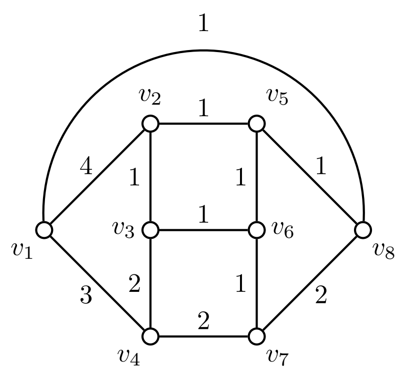
V každém kroku vybereme vrchol s nejmenší (nepodtrženou) vzdáleností, tu podtrhneme jako výslednou vzdálenost do daného vrcholu (proč? to bylo vysvětleno na přednášce) a aktualizujeme vzdálenosti do všech sousedních vrcholů. Nepodtržené hodnoty z předchozího řádku přepíšeme.

Postup končí, jakmile jsou podtrženy vzdálenosti v každém sloupci vrcholů ze souvislé komponenty.

	s	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
s	$\underline{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
v_1		$\underline{1}$	∞	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
v_5			4	3	∞	$\underline{2}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
v_3			4	$\underline{3}$	3		4	∞	∞	∞	∞	∞
v_4			4		$\underline{3}$		4	∞	∞	6	∞	∞
v_2			$\underline{4}$				4	∞	5	6	∞	∞
v_6							$\underline{4}$	6	5	6	∞	∞
v_8								6	$\underline{5}$	6	∞	∞
v_7								$\underline{6}$		6	9	∞
v_9										$\underline{6}$	9	7
v_{10}											$\underline{7}$	7
v_{11}												$\underline{7}$

Tabulka 14.2: *Průběh Dijkstrova algoritmu.*

14.3. Nalezněte minimální kostru v grafu G na Obrázku 14.3.



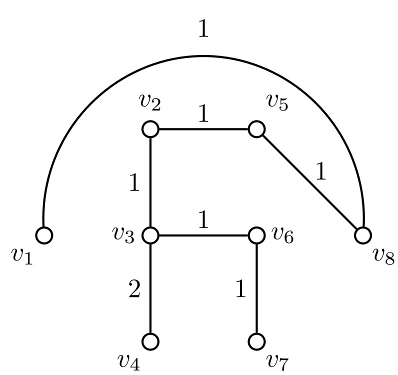
Obrázek 14.3: Graf G.

Použijme například Kruskalův (hladový) algoritmus. Nejdříve seřadíme hrany grafu do neklesající posloupnosti dle jejich vah: $(\underbrace{v_2v_3, v_2v_5, v_3v_6, v_5v_6, v_6v_7, v_5v_8, v_1v_8}_{1}, \underbrace{v_3v_4, v_4v_7, v_7v_8}_{2}, \underbrace{v_1v_4}_{3}, \underbrace{v_1v_2}_{4})$.

Potom je budeme postupně zařazovat do vrcholové množiny grafu G. Hranu nezařadíme, pokud by s dříve zařazenými hranami vytvořila cyklus.

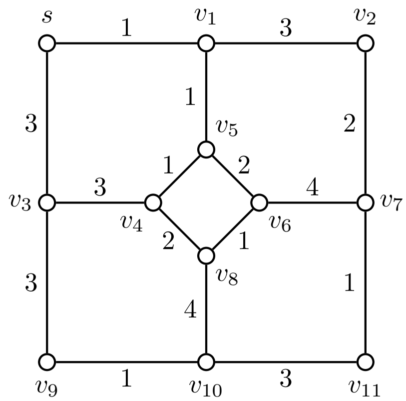
Zařadíme hrany $v_2v_3, v_2v_5, v_3v_6, v_6v_7, v_5v_8, v_1v_8, v_3v_4$.

V průběhu algoritmu *nebude* zařazena hrana v_5v_6, aby nevznikl cyklus a *nebudou* zařazeny hrany $v_4v_7, v_7v_8, v_1v_4, v_1v_2$, neboť před nimi již bylo zařazeno $n-1=7$ hran, a tedy algoritmus skončil. Výsledný graf na osmi vrcholech je tedy acyklický a má 7 hran a musí být souvislý. Výsledná váha minimální kostry T je 8, viz Obrázek 14.4.



Obrázek 14.4: *Minimální kostra T.*

14.4. Nalezněte minimální kostru v grafu G na Obrázku 14.5.



Obrázek 14.5: Graf G.

Použijeme například Primův algoritmus s výchozím vrcholem s. Algoritmus pracuje s množinou dosažitelných vrcholů D z vrcholu s. V každém kroku algoritmu přidáme do množiny hran K kostry grafu hranu (a vrchol s ní incidentní) s nejmenší vahou tak, že jeden její koncový vrchol leží v množině D a druhý mimo množinu D. Tak máme jistotu, že nebude uzavřen cyklus a nemusíme existenci cyklu ověřovat.

	D	K
1.	$\{s\}$	$\emptyset$.
2.	$\{s, v_1\}$	$\{sv_1\}$.
3.	$\{s, v_1, v_5\}$	$\{sv_1, v_1v_5\}$.
4.	$\{s, v_1, v_5, v_4\}$	$\{sv_1, v_1v_5, v_5v_4\}$.
5.	$\{s, v_1, v_5, v_4, v_3\}$	$\{sv_1, v_1v_5, v_5v_4, sv_3\}$.
6.	$\{s, v_1, v_5, v_4, v_3, v_6\}$	$\{sv_1, v_1v_5, v_5v_4, sv_3, v_5v_6\}$.
7.	$\{s, v_1, v_5, v_4, v_3, v_6, v_8\}$	$\{sv_1, v_1v_5, v_5v_4, sv_3, v_5v_6, v_6v_8\}$.
8.	$\{s, v_1, v_5, v_4, v_3, v_6, v_8, v_2\}$	$\{sv_1, v_1v_5, v_5v_4, sv_3, v_5v_6, v_6v_8, v_1v_2\}$.
9.	$\{s, v_1, v_5, v_4, v_3, v_6, v_8, v_2, v_7\}$	$\{sv_1, v_1v_5, v_5v_4, sv_3, v_5v_6, v_6v_8, v_1v_2, v_2v_7\}$.
10.	$\{s, v_1, v_5, v_4, v_3, v_6, v_8, v_2, v_7, v_{11}\}$	$\{sv_1, v_1v_5, v_5v_4, sv_3, v_5v_6, v_6v_8, v_1v_2, v_2v_7, v_7v_{11}\}$.
11.	$\{s, v_1, v_5, v_4, v_3, v_6, v_8, v_2, v_7, v_{11}, v_9\}$	$\{sv_1, v_1v_5, v_5v_4, sv_3, v_5v_6, v_6v_8, v_1v_2, v_2v_7, v_7v_{11}, v_3v_9\}$.
12.	$\{s, v_1, v_5, v_4, v_3, v_6, v_8, v_2, v_7, v_{11}, v_9, v_{10}\}$	$\{sv_1, v_1v_5, v_5v_4, sv_3, v_5v_6, v_6v_8, v_1v_2, v_2v_7, v_7v_{11}, v_3v_9.v_9v_{10}\}$.

Kostra K je pouze jednou z možných minimálních koster, jinou volbou hran se stejným ohodnocením bychom dostali jinou kostru.