13 Eulerovské grafy, vzdálenost v grafu

13.1. Nakreslete Eulerovský graf G na 8 vrcholech, kde $\delta(G) \geq 2$ a $\Delta(G) = 4$. Popište vrcholy grafu a uveďte příklad Eulerovského tahu.

Řešením může být například cyklus C_8, do kterého přidáme vhodně zvolené hrany cyklu C_3 tak, aby koncové vrcholy nebyly sousední v C_8.

13.2. Jaká je největší možná vzdálenost mezi dvěma vrcholy $K_{m,n}$.

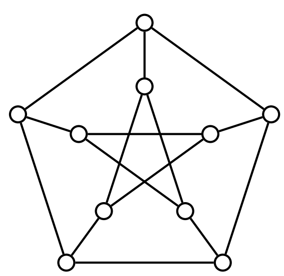
Každé dva vrcholy x, y z různých partit jsou sousední a jsou proto ve vzdálenosti 1. Pokud má každá partita $m = n = 1$, je to největší vzdálenost v grafu.

Pokud má alespoň jedna partita grafu $K_{m,n}$ více než jeden vrchol, tak každé dva vrcholy x, z ze stejné partity nejsou sousední a jejich vzájemná vzdálenost je proto alespoň 2. Protože x i z jsou sousední s každým vrcholem y z druhé partity, existuje v $K_{m,n}$ cesta x, y, z a vzdálenost vrcholů x a z je právě 2. To je současně i největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu $K_{m,n}$ pro $\max\{m, n\} > 1$.

13.3. Graf kolo, značeno W_n, vznikne z cyklu C_n, $V(C_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, tak, že k němu přidáme vrchol v_0 a všechny hrany v_0v_i pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Jaká je největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu W_n? Zdůvodněte.

Uvažujme W_n pro $n \geq 4$. Vezměme libovolný vrchol cyklu C_n, tedy v_i pro $i \in [1, n]$. Pak každý vrchol, který s ním není sousední (alespoň jeden takový existuje!) je ve vzdálenosti 2, neboť z v_i do něj existuje cesta délky 2 přes vrchol v_0. Ovšem vrchol v_0 má od všech vrcholů vzdálenost 1. Proto největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu W_n je 2. Pokud je $n = 3$, pak $W_3 \cong K_4$, a tedy každé dva vrcholy $u, v \in V(W_3)$ jsou sousední a největší vzdálenost je 1.

13.4. Jaká je největší vzdálenost dvou vrcholů v Petersenově grafu na Obrázku 13.1? Zdůvodněte.



Obrázek 13.1: Petersenův graf.

Ukážeme, že největší vzdálenost dvou vrcholů v Petersenově grafu je 2. Mohli bychom ověřit vzdálenosti všech $\binom{10}{2}$ dvojic vrcholů, ale lépe je využít symetrie daného grafu. Předpokládejme, že na Obrázku 13.1 máme pět „vnějších“ a pět „vnitřních“ vrcholů. Vybereme si dva vrcholy x a y a bez újmy na obecnosti rozlišíme tři případy.

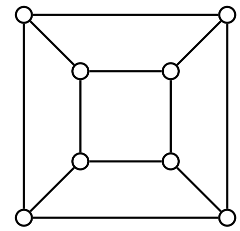
(a) Jestliže x, y jsou oba vnější vrcholy, tak jsou oba buď sousední, nebo jsou ve vzdálenosti 2. Žádné dva vrcholy C_5 nejsou ve větší vzdálenosti.

(b) Jestliže x, y jsou oba vnitřní vrcholy, tak jsou oba buď sousední, nebo jsou ve vzdálenosti 2.

(c) Bez újmy na obecnosti je x vnější a y je vnitřní vrchol. Rozborem možností snadno vidíme, že oba vrcholy buď jsou sousední, nebo jsou ve vzdálenosti 2.

Největší vzdálenost dvou vrcholů je 2.

13.5. Jaká je největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu Q_3 na Obrázku 13.2? Zdůvodněte.



Obrázek 13.2: Graf Q_3.

Ukážeme, že největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu Q_3 je 3. Mohli bychom ověřit vzdálenosti všech $\binom{8}{2}$ dvojic vrcholů, ale lépe je využít symetrie daného grafu. Předpokládejme, že na Obrázku 13.1 máme čtyři „vnější“ a čtyři „vnitřní“ vrcholy. Vybereme si dva vrcholy x a y a bez újmy na obecnosti rozlišíme tři případy.

(a) Jestliže x, y jsou oba vnější vrcholy, tak jsou oba buď sousední, nebo jsou ve vzdálenosti 2.

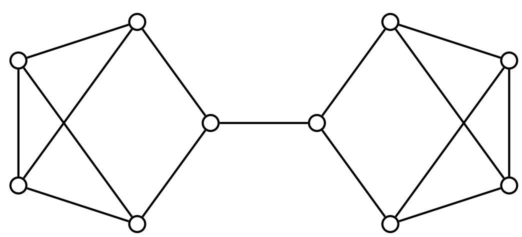
(b) Jestliže x, y jsou oba vnitřní vrcholy, tak jsou oba buď sousední, nebo jsou ve vzdálenosti 2.

(c) Jestliže x je vnější a y je vnitřní vrchol, tak rozborem možností snadno vidíme, buď jsou oba vrcholy sousední, nebo jsou ve vzdálenosti 2, nebo jsou v jednom případě ve vzdálenosti 3.

Největší vzdálenost dvou vrcholů je 3.

13.6. Největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu G se nazývá průměr grafu G a značíme ji $diam(G)$. Nalezněte nějaký 3-pravidelný graf G na 10 vrcholech, pro který platí $5 \le diam(G) \le 10$.

Příklad grafu je na Obrázku 13.3.



Obrázek 13.3: *3-pravidelný graf G na 10 vrcholech, pro který platí $diam(G) = 5$.*

13.7. Dokažte, že v každém grafu G splňuje vzálenost vcholů tzv. trojúhelníkovou nerovnost, tj. pro každé tři vrcholy $u, v, w \in V(G)$ platí $\text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, w) \ge \text{dist}(u, w)$.

Předpokládejme, že $\text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, w) < \text{dist}(u, w)$. Nechť P je nejkratší (u, v)-cesta (její délka určuje $\text{dist}(u, v)$) a P' je nejkratší (v, w)-cesta (její délka určuje $\text{dist}(v, w)$). Potom sled vedoucí z vrcholu u do vrcholu v po hranách cesty P a pokračující po hranách cesty P' do w je kratší než cesta, jejíž délka určuje $\text{dist}(u, w)$. Pokud se ve sledu vrcholy neopakují, je tento sled cestou. Pokud se některé vrcholy opakují, tak můžeme opakující se úsek vypustit a dostaneme (kratší) cestu. Délka této cesty je jistě menší než $\text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, w) < \text{dist}(u, w)$. Což není možné, neboť $\text{dist}(u, w)$ je určena délkou nejkratší (u, w)-cesty v grafu.