12 Komponenty grafu, souvislost a stupně souvislosti

12.1. Kolik nejvýše komponent může mít

(a) 4-pravidelný graf na 30 *vrcholech?*

(b) 5-pravidelný graf na 30 *vrcholech?*

Své rozhodnutí zdůvodněte!

(a) Ve 4-pravidelném grafu má každý vrchol právě čtyři sousedy. Nejmenší komponenta musí proto mít alespoň pět vrcholů. Taková komponenta může existovat, například K_5. Na 30 vrcholech může být maximálně $\frac{30}{5} = 6$ komponent K_5.

(b) V 5-pravidelném grafu má každý vrchol právě pět sousedů. Nejmenší komponenta musí proto mít alespoň šest vrcholů. Taková komponenta může existovat, například K_6. Na 30 vrcholech může být maximálně $\frac{30}{6} = 5$ komponent K_6.

12.2. Kolik nejvýše komponent může mít

(a) 4-pravidelný graf na 34 *vrcholech?*

(b) 5-pravidelný graf na 34 *vrcholech?*

Své rozhodnutí zdůvodněte!

(a) Úvaha je podobná jako v předchozím příkladu. Nejmenší možné komponenty jsou K_5 a dále musíme vytvořit 4-pravidelnou komponentu na 9 vrcholech. Vytvořme cyklus $C_9 = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_1$ a přidejme do něj hrany cyklu $C_9' = v_1, v_3, v_5, v_7, v_9, v_2, v_4, v_6, v_8, v_1$. Tak obdržíme výše zmíněnou komponentu.

(b) V 5-pravidelném grafu má každý vrchol právě pět sousedů. Nejmenší komponenta musí proto mít alespoň šest vrcholů. Taková komponenta může existovat, například K_6. Na 30 vrcholech může být maximálně $\lfloor \frac{34}{6} \rfloor = 5$ komponent. Ukážeme, že takový graf existuje. Stačí vzít čtyři komponenty K_6 a na 10 vrcholech sestrojíme pátou komponentu tak, že do cyklu $C_{10} = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_1$ přidáme hrany dvou cyklů $C_5' = v_1, v_3, v_5, v_7, v_9, v_1$ a $C_5'' = v_2, v_4, v_6, v_8, v_{10}, v_2$. Dále přidáme pět hran v_1v_6, v_2v_7, v_3v_8, v_4v_9, v_5v_{10} a dostaneme tak (souvislou) 5-pravidelnou komponenty na 10 vrcholech.

12.3. Kolik existuje neizomorfních 2-pravidelných grafů na 9 vrcholech?

Protože hledaný graf je 2-pravidelný, každá komponenta grafu musí být cyklus. Tedy každá komponenta musí míti alespoň 3 vrcholy, proto námi hledané grafy budou mít nejvýše tři komponenty. Souvislý graf je jediný, a to C_9, grafy s dvěma komponentami jsou tyto: $C_3 \cup C_6$ a $C_4 \cup C_5$. Graf se třemi komponentami je opět jediný, a to $C_3 \cup C_3 \cup C_3$. Celkově máme 4 neizomorfní grafy.

12.4. Kolik nejvýše hran může mít nesouvislý graf na 23 *vrcholech?*

Postupujeme následující úvahou. Nesouvislý graf má vždy alespoň dvě komponenty. Má-li takový graf mít co nejvíce hran, tak

- má právě dvě komponenty, jinak bychom mohli přidat hrany mezi dva vrcholy některých dvou komponent a počet komponent se sníží o 1 (hrana má právě dva koncové vrcholy),
- každá komponenta je kompletní graf, jinak bychom mohli přidat další hrany.

Máme-li dvě komponenty K_x a K_y, tak odebráním jednoho vrcholu v z menší komponenty (bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x \le y$), tak odebereme $x-1$ hran a přidáním v do větší komponenty přidáme $y > x-1$ hran. Nejvíce hran bude mít nesouvislý graf s n vrcholy a dvěma komponentami K_1 a K_{n-1}. Pro $n = 23$ dostáváme nejvyšší počet hran $\binom{22}{2} = 11 \cdot 21 = 231$.

12.5. Sestavíme graf H, jehož vrcholy jsou všechny dvouprvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Vrchol $\{x_1, x_2\}$ spojíme hranou s vrcholem $\{y_1, y_2\}$, jestliže nastane alespoň jedna z následujících možností:

- *oba součty $x_1 + x_2$ a $y_1 + y_2$ jsou sudá čísla,*
- *oba součty $x_1 + x_2$ a $y_1 + y_2$ jsou dělitelné třemi,*
- *oba součty $x_1 + x_2$ a $y_1 + y_2$ jsou stejné.*

Kolik komponent souvislosti má graf H? Nakreslete jej a zvlášť vykreslete také každou jeho komponentu.

Graf H má tři komponenty. Dvě komponenty jsou grafem K_2 a třetí komponentou jsou dvě kopie K_4 sdílející dva vrcholy.

12.6. Kolik komponent může mít graf se 7 vrcholy a 15 hranami. Pečlivě zdůvodněte.

a) Graf může mít jednu komponentu. Příkladem takového grafu je graf K_7, ze kterého vynecháme $\binom{7}{2} - 15 = 21 - 15 = 6$ hran, tak aby zůstal souvislý. Například vynecháním hran nějakého cyklu C_6.

b) Graf může mít i dvě komponenty. Musí se jednat o komponentu K_1 a komponentu K_6, protože K_6 má $\binom{6}{2} = 15$ hran a každé dvě jiné komponenty grafu na 7 vrcholech mají menší počet hran (řešený příklad 7.0.1. ve cvičení).

c) Graf nemůže mít 3 a více komponent, neboť už graf se dvěma komponentami z části b) má 15 hran a při rozdělení na více komponent bychom museli odebrat další hrany.

12.7. Kolik komponent může mít graf G s 11 vrcholy, které jsou všechny stupně 2. Vysvětlete. Komponenty nakreslete.

Protože každý vrchol grafu G je stupně 2, musí mít vždy dva sousedy. Tuto vlastnost mají právě grafy, které sestávají z několika disjunktních cyklů. Na 1 vrcholech můžeme mít:

a) Jednu komponentu, která je cyklem na 11 vrcholech C_{11}.

b) Dvě komponenty, buď C_3 a C_8, nebo C_4 a C_7, nebo C_5 a C_6.

c) Nejvíce tři komponenty, protože nejkratší cyklus existuje na třech vrcholech a graf se čtyřmi komponentami by musel mít alespoň 12 vrcholů. Na jedenácti vrcholech můžeme mít například dva cykly C_3 a jeden cyklus C_5.

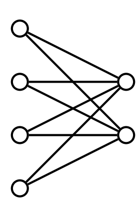
12.8. Jaký je

a) hranový,

b) vrcholový

stupeň souvislosti grafu $K_{4,2}$. Graf $K_{4,2}$ nakreslete a svou odpověď pečlivě zdůvodněte.

Nejmenší stupeň vrcholu $\delta(K_{4,2}) = 2$. Hranový stupeň i vrcholový stupeň souvislosti je tedy menší nebo roven číslu 2.

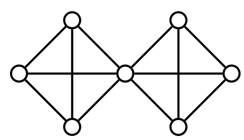


a) Protože vynecháním jedné libovolné hrany souvislost neporušíme (až na izomorfismus existuje jediná možnost, jak vynechat hranu), tak $K_{4,2}$ je hranově 2-souvislý. Vynecháním obou hran incidentních s některým vrcholem větší partity dostaneme nesouvislý graf, proto $K_{4,2}$ není hranově 3-souvislý. Hranový stupeň souvislosti je 2.

b) Protože vynecháním jednoho libovolného vrcholu souvislost neporušíme (stačí ověřit dvě možnosti: vynechat vrchol v menší nebo větší partitě), tak $K_{4,2}$ je vrcholově 2-souvislý. Vynecháním obou vrcholů v menší partitě dostaneme nesouvislý graf, proto $K_{4,2}$ není vrcholově 3-souvislý. Vrcholový stupeň souvislosti je 2.

12.9. Nakreslete graf na alespoň 7 vrcholech a nejvýše na 10 vrcholech, jehož hranový stupeň souvislosti je 3 a vrcholový stupeň souvislosti je 1. Popište vrcholy navrženého grafu a vypište hrany a vrcholy, které je potřeba odebrat, aby se graf stal nesouvislým.

Existuje více řešení. Řešením jsou například dvě kopie grafu K_4 s jedním společným vrcholem. Graf je souvislý a stačí odebrat jediný vrchol stupně 6, abychom dostali nesouvislý graf. Proto stupeň vrcholové souvislosti je 1. Odebrání libovolných dvou hran neporušíme souvislost, neboť „levá i pravá část“ jsou kompletní grafy K_4, které jsou hranové 3-souvislé a odebrání libovolných dvou hran incidentních s „prostředním“ vrcholem také neporuší souvislost. Ale odebráním tří hran incidentních s libovolným vrcholem stupně 3 dostaneme nesouvislý graf, proto stupeň hranové souvislosti je 3.



12.10. Nakreslete graf na alespoň 6 a nejvýše 9 vrcholech, jehož hranový stupeň souvislosti je 3 a vrcholový stupeň souvislosti je 2. Popište vrcholy navrženého grafu a vypište hrany a vrcholy, které je potřeba odebrat, aby se graf stal nesouvislým.

Existuje více řešení. Řešením jsou například dvě kopie grafu K_4 se dvěma společnými vrcholy. Odebráním jednoho vrcholu souvislost neporušíme a stačí odebrat oba vrcholy stupně 5 a dostaneme nesouvislý graf. Proto stupeň vrcholové souvislosti je 2. Odebrání libovolných dvou hran neporušíme souvislost, neboť odebráním hran „vnějšího“ hamiltonovského cyklu dostaneme souvislý podgraf, proto mezi každými dvěma vrcholy existují tři hranově disjunktní cesty. Ale odebráním tří hran incidentních s libovolným vrcholem stupně 3 dostaneme nesouvislý graf, proto stupeň hranové souvislosti je 3.