10 Stupně vrcholů, Věta Havla-Hakimiho

10.1. Dokážete nakreslit graf na 9 vrcholech, ve kterém mají každé dva vrcholy různé stupně? Své rozhodnutí zdůvodněte!

Nejvyšší možný stupeň jednoduchého grafu na 9 vrcholech je 8, nejnižší možný vrchol je 0. Protože každý vrchol má být jiného stupně, musely by v hledaném grafu být vrcholy všech stupňů $0, 1, 2, \ldots, 8$ (devět různých přípustných hodnot). To však není možné, neboť v grafu nemůže být současně vrchol stupně 8 (sousední se všemi ostatními) a vrchol stupně 0, který není sousední s žádným vrcholem.

10.2. Dokážete nakreslit graf na 11 vrcholech, ve kterém jsou vrcholy pouze stupně 3 nebo 5? Své rozhodnutí zdůvodněte!

Takový graf by měl lichý počet vrcholů lichého stupně, což je ve sporu s Důsledkem Principu sudosti (viz přednáška). Proto takový graf nelze nakreslit.

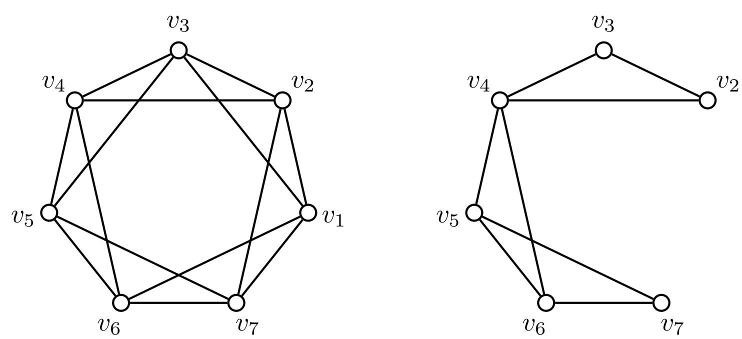
Jiné řešení:

Podle věty $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$ by bylo

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = s \cdot 3 + (11 - s) \cdot 5 = 55 - 2s.$$

Odtud je počet hran $|E| = \frac{55}{2} - s$, kde $s \in \mathbb{N}_0$, což není celé číslo a proto daný graf neexistuje.

10.3. Je graf G indukovaný podgraf grafu H? Zdůvodněte.



Obrázek 10.1: Graf H a jeho podgraf G.

Není, neboť kromě hran incidentních s odstraněným vrcholem v_1 mu ještě chybí hrany v_3v_5 a v_2v_7.

10.4. Kolik hran má graf G

(a) se 150 vrcholy stupně 3 a 1000 vrcholy stupně 4?

(b) se 130 vrcholy stupně 5 a 500 vrcholy stupně 2?

Vysvětlete!

(a) Počet hran grafu G je $|V(G)| = 150 + 1000 = 1150$. Z principu sudosti je $\sum_{i=1}^{1150} \deg(v_i) = 2|E(G)|$. Protože víme, že 150 vrcholů je stupně 3 a 1000 vrcholů stupně 4 můžeme dosadit a dostaneme $3 \cdot 150 + 4 \cdot 1000 = 2|E(G)|$. Odtud počet hran grafu G je $|E(G)| = \frac{450+4000}{2} = 2225$. Takový graf existuje, například 25 komponent $K_{3,3}$ a 200 komponent K_5.

(b) Počet hran grafu G je $|V(G)| = 130 + 500 = 630$. Z principu sudosti je $\sum_{i=1}^{630} \deg(v_i) = 2|E(G)|$. Protože víme, že 130 vrcholů je stupně 5 a 500 vrcholů stupně 2 můžeme dosadit a dostaneme $5 \cdot 130 + 2 \cdot 500 = 2|E(G)|$. Odtud počet hran grafu G je $|E(G)| = \frac{650+1000}{2} = 825$. Takový graf existuje, například 13 komponent $K_{5,5}$ a jedna komponenta C_{500}.

10.5. Máme dán graf G, jehož vrcholy jsou pouze dvou různých stupňů.

(a) Graf G má 10 vrcholů a 26 hran. Jestliže 4 vrcholy jsou stupně 4, jakého stupně jsou zbývající vrcholy?

(b) Graf G má 12 vrcholů a 30 hran. Jestliže 8 vrcholů je stupně 3, jakého stupně jsou zbývající vrcholy?

(a) Víme, že $|V(G)| = 10$ a $|E(G)| = 26$. Označíme si x neznámý stupeň vrcholů a dosadíme do principu sudosti $\sum_{i=1}^{|V(G)|} \deg(v_i) = 2|E(G)|$. Po dosazení známých stupňů vrcholů a počtu hran dostáváme $4 \cdot 4 + 6 \cdot x = 2 \cdot 26$. Odtud $6x = 36$ a tedy $x = 6$. Zbývajících 6 vrcholů je stupně 6. Pomocí věty Havla-Hakimiho lze snadno ověřit, že takový graf existuje.

(b) Víme, že $|V(G)| = 12$ a $|E(G)| = 30$. Označíme si x neznámý stupeň vrcholů a dosadíme do principu sudosti $\sum_{i=1}^{|V(G)|} \deg(v_i) = 2|E(G)|$. Po dosazení známých stupňů vrcholů a počtu hran dostáváme $8 \cdot 3 + 4 \cdot x = 2 \cdot 30$. Odtud $4x = 36$ a tedy $x = 9$. Zbývající 4 vrcholy jsou stupně 9. Pomocí věty Havla-Hakimiho lze snadno ověřit, že takový graf existuje.

10.6. Máme dán graf G.

(a) Jestliže graf G má 35 hran, kolik může mít vrcholů? Uveďte všechny možnosti.

(b) Jestliže graf G má 39 hran, kolik může mít vrcholů? Uveďte všechny možnosti.

(a) Graf s největším počtem hran na daném počtu vrcholů n je kompletní graf K_n. Pro počet hran K_n platí $|E(K_n)| = \binom{n}{2}$. Proto nejmenší možný počet vrcholů n s daným počtem hran 35 zjistíme vyřešením nerovnice $\binom{n}{2} \geq 35$, kde $n \in N$. Tedy

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} &\geq 35 \\ n(n-1) &\geq 70 \\ n^2 - n - 70 &\geq 0 \\ (n - 8.8815)(n + 7.8815) &\geq 0 \\ n &\geq 9. \end{aligned}$$

Záporná řešení pochopitelně neuvažujeme. Graf který má 35 hran musí mít nejméně 9 vrcholů. Příkladem je kompletní graf K_9, ze kterého odebereme libovolnou hranu. Horní mez však pro počet vrcholů $|V(G)|$ není, protože můžeme přidávat libovolně mnoho izolovaných vrcholů.

(b) Graf s největším počtem hran na daném počtu vrcholů n je kompletní graf K_n. Pro počet hran K_n platí $|E(K_n)| = \binom{n}{2}$. Proto nejmenší možný počet vrcholů n s daným počtem hran 39 zjistíme vyřešením nerovnice $\binom{n}{2} \geq 39$, kde $n \in N$. Tedy

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} &\geq 39 \\ n(n-1) &\geq 78 \\ n^2 - n - 78 &\geq 0 \\ (n - 9.3459)(n + 8.3459) &\geq 0 \\ n &\geq 10. \end{aligned}$$

Záporná řešení pochopitelně neuvažujeme. Graf který má 39 hran musí mít nejméně 10 vrcholů. Příkladem je kompletní graf K_{10}, ze kterého odebereme libovolných 6 hran. Horní mez však pro počet vrcholů $|V(G)|$ není, protože můžeme přidávat libovolně mnoho izolovaných vrcholů.

10.7. Na tenisový turnaj se přihlásilo sedm hráčů. Každý má během turnaje odehrát právě 3 zápasy (nebude tedy hrát každý s každým). Je to možné? Pečlivě zdůvodněte.

Tenisový turnaj můžeme znázornit grafem, ve kterém vrcholy představují hráče a hrany představují zápasy. Protože se turnaje má účastnit 7 hráčů a každý hráč má odehrát tři zápasy musel by graf mít 7 vrcholů stupně 3. Tedy $\sum_{i=1}^{|V(G)|} \deg(v_i) = 7 \cdot 3 = 21 = 2|E(G)|$, což je spor s tím, že počet hran musí být celé číslo. Graf s lichým počtem vrcholů lichého stupně neexistuje, proto není možné aby každý ze sedmi hráčů odehrál v turnaji právě tři zápasy.

10.8. Kolik různých faktorů má

(a) graf K_4?

(b) graf C_5?

(c) graf P_5?

Předpokládáme, že rozlišujeme vrcholy (například označením).

(a) Faktor F je podgraf daného grafu K_4, jehož množina hran $E(F)$ je nějakou podmnožinou množiny hran $E(K_4)$, a má stejnou množinu vrcholů $V(F) = V(K_4)$. Počet různých faktorů p, jestliže rozlišujeme vrcholy, je roven počtu všech různých podmnožin množiny hran $E(K_4)$. Počet všech různých podmnožin dané množiny je roven velikosti potenční množiny, tedy $p = |2^{|E(K_4)|}| = 2^6 = 64$. Kompletní graf na 4 vrcholech má 64 různých faktorů.

(b) Faktor F je podgraf daného grafu C_5, jehož množina hran $E(F)$ je nějakou podmnožinou množiny hran $E(C_5)$, a má stejnou množinu vrcholů $V(F) = V(C_5)$. Počet různých faktorů p, jestliže rozlišujeme vrcholy, je roven počtu všech různých podmnožin množiny hran $E(C_5)$. Počet všech různých podmnožin dané množiny je roven velikosti potenční množiny, tedy $p = |2^{|E(C_5)|}| = 2^5 = 32$. Cyklus na 5 vrcholech má 32 různých faktorů.

(c) Faktor F je podgraf daného grafu P_5, jehož množina hran $E(F)$ je nějakou podmnožinou množiny hran $E(P_5)$, a má stejnou množinu vrcholů $V(F) = V(P_5)$. Počet různých faktorů p, jestliže rozlišujeme vrcholy, je roven počtu všech různých podmnožin množiny hran $E(P_5)$. Počet všech různých podmnožin dané množiny je roven velikosti potenční množiny, tedy $p = |2^{|E(P_5)|}| = 2^4 = 16$. Cesta na 5 vrcholech má 16 různých faktorů.

10.9. Existuje graf

(a) se stupňovou posloupností $(6,5,3,3,3,2,2,2,1,1)$*?*

(b) se stupňovou posloupností $(6,4,4,3,3,2,2,2,1,1)$*?*

(c) se stupňovou posloupností $(6,4,4,3,3,3,2,2,2,1)$*?*

(d) se stupňovou posloupností $(6,6,6,6,5,5,3)$*?*

(e) se stupňovou posloupností $(6,6,6,6,4,3,3)$*?*

(f) se stupňovou posloupností $(6,6,6,6,5,4,3)$*?*

Své rozhodnutí zdůvodněte!

(a) Pomocí věty Havel–Hakimi budeme nejdříve postupně redukovat posloupnost $(6,5,3,3,3,2,2,2,1,1)$ tak dlouho, až dojdeme k posloupnosti o níž dokážeme rozhodnout, zda je nebo není grafová.

$$(6,5,3,3,3,2,2,2,1,1) \sim (4,2,2,2,1,1,2,1,1) \sim (4,2,2,2,2,1,1,1,1) \sim (1,1,1,1,1,1,1,1).$$

K této posloupnosti jistě graf nakreslit umíme. Je to osm vrcholů spárovaných čtyřmi nezávislými hranami. Je-li tedy posloupnost $(1,1,1,1,1,1,1,1)$ grafová, pak je i posloupnost $(6,5,3,3,3,2,2,2,1,1)$ grafová.

(b) Podobně jako v předchozím případě dostaneme

$$(6,4,4,3,3,2,2,2,1,1) \sim (3,3,2,2,1,1,2,1,1) \sim (3,3,2,2,2,1,1,1,1) \sim (2,1,1,2,1,1,1,1) \sim$$

$$(2,2,1,1,1,1,1,1) \sim (1,0,1,1,1,1,1) \sim (1,1,1,1,1,1,0),$$

což je grafová posloupnost grafu K_1 spolu se třemi kopiemi K_2. Proto je i původní posloupnost $(6,4,4,3,3,2,2,2,1,1)$ grafová.

(c) Podobně jako v předchozím případě dostaneme

$$(6,4,4,3,3,3,2,2,2,1) \sim (3,3,2,2,2,1,2,2,1) \sim (3,3,2,2,2,2,2,1,1) \sim (2,1,1,2,2,2,1,1) \sim$$

$$(2,2,2,2,1,1,1,1) \sim (1,1,2,1,1,1,1) \sim (2,1,1,1,1,1,1) \sim (0,0,1,1,1,1),$$

což je grafová posloupnost grafu se dvěma kopiemi K_1 spolu se dvěma kopiemi K_2. Proto je i původní posloupnost $(6,4,4,3,3,3,2,2,2,1)$ grafová.

(d) Takový graf neexistuje, protože podle principu sudosti musí být součet stupňů vrcholů grafu sudé číslo. V našem případě je ale $6+6+6+6+5+5+3=37$, což je liché číslo.

(e) Takový graf neexistuje, což ukážeme užitím Věty Havel-Hakimi. $(6,6,6,6,4,3,3) \sim (5,5,5,3,2,2) \sim (4,4,2,1,1) \sim (3,1,0,0) \sim (0,-1,-1)$. Protože evidentně $(0,-1,-1)$ není stupňovou posloupností žádného grafu, tak podle Věty Havel-Hakimi není ani posloupnost $(6,6,6,6,4,3,3)$ stupňovou posloupností žádného grafu.

(f) Takový graf neexistuje, což ukážeme užitím Věty Havel-Hakimi. $(6,6,6,6,5,4,3) \sim (5,5,5,4,3,2) \sim (4,4,3,2,1) \sim (3,2,1,0) \sim (1,0,-1)$. Protože evidentně $(1,0,-1)$ není stupňovou posloupností žádného grafu, tak podle Věty Havel-Hakimi není ani posloupnost $(6,6,6,6,5,4,3)$ stupňovou posloupností žádného grafu.

10.10. Rozhodněte, zda je daná posloupnost grafová a pokud ano, tak nakreslete graf s touto stupňovou posloupností.

(a) $(6,5,3,3,3,2,2,2,1,1)$

(b) $(4,4,3,3,2,2)$

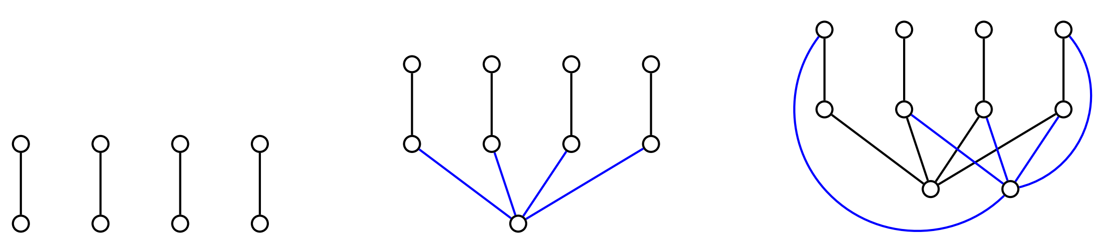
(c) $(5,4,2,2,2,1)$

(a) Pomocí věty Havel–Hakimi budeme nejdříve postupně redukovat posloupnost $(6,5,3,3,3,2,2,2,1,1)$ tak dlouho, až dojdeme k posloupnosti o níž dokážeme rozhodnout, zda je nebo není grafová.

$(6,5,3,3,3,2,2,2,1,1) \sim (4,2,2,2,1,1,2,1,1) \sim (4,2,2,2,2,1,1,1,1) \sim (1,1,1,1,1,1,1,1)$.

K této posloupnosti jistě graf nakreslit umíme. Je to osm spárovaných vrcholů. Je-li tedy posloupnost $(1,1,1,1,1,1,1,1)$ grafová, pak je i posloupnost $(6,5,3,3,3,2,2,2,1,1)$ grafová.

Opačným postupem zrekonstruujeme z grafu se stupňovou posloupností $(1,1,1,1,1,1,1,1)$ graf se stupňovou posloupností $(6,5,3,3,3,2,2,2,1,1)$.

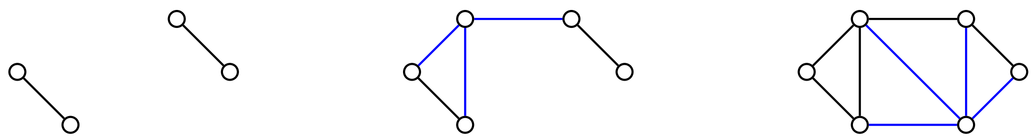


Obrázek 10.2: *Rekonstrukce grafu se stupňovou posloupností* $(6,5,3,3,3,2,2,2,1,1)$.

(b) Pomocí věty Havel-Hakimi ověříme, zda je nebo není posloupnost grafová.

$$(4,4,3,3,2,2) \sim (3,2,2,1,2) \sim (3,2,2,2,1) \sim (1,1,1,1)$$

Zřejmě poslední posloupnost grafová je a tedy i původní posloupnost $(4,4,3,3,2,2)$ je grafová. Zpětně z grafu s posloupností $(1,1,1,1)$ opačným postupem zrekonstruujeme graf se stupňovou posloupností $(4,4,3,3,2,2)$.

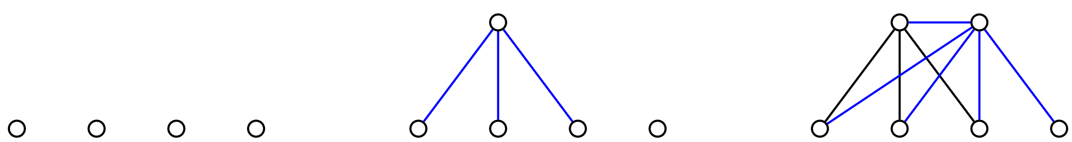


Obrázek 10.3: *Rekonstrukce grafu se stupňovou posloupností* $(4,4,3,3,2,2)$.

(c) Pomocí věty Havel-Hakimi ověříme, zda je nebo není posloupnost grafová.

$$(5,4,2,2,2,1) \sim (3,1,1,1,0) \sim (0,0,0,0)$$

Zřejmě poslední posloupnost grafová je a tedy i původní posloupnost $(5,4,2,2,2,1)$ je grafová. Zpětně z grafu s posloupností $(0,0,0,0)$ opačným postupem zrekonstruujeme graf se stupňovou posloupností $(5,4,2,2,2,1)$.



Obrázek 10.4: *Rekonstrukce grafu se stupňovou posloupností* $(5,4,2,2,2,1)$.

10.11. Mějme k-pravidelný graf G na n vrcholech, kde $k \geq 3$. Pro jaké k a n je počet hran grafu G násobek čísla k? Své rozhodnutí zdůvodněte!

Je-li graf $G = (V, E)$ k-pravidelný, pak $\forall v \in V : \deg_G(v) = k$. Proto $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = k|V| = 2|E|$. Odtud dostáváme $|V| = \frac{2|E|}{k}$. Tedy $2|E|$ je dělitelné k.

Nyní rozlišíme dva případy:

(i) k je liché: Protože je $k \geq 3$ liché, tak nedělí 2, tedy musí dělit $|E|$. Počet hran je tedy dělitelný k.

(ii) k je sudé: Označíme si $k = 2t$. Nyní rozlišíme dva případy.

Je-li počet vrcholů grafu G sudý je $\frac{2|E|}{k} = \frac{|E|}{t} = |V|$ sudé číslo a $\frac{|E|}{2t} = \frac{|E|}{k}$ je celé číslo. To znamená, že k dělí počet hran.

Je-li ale počet vrcholů grafu G lichý, tak $\frac{2|E|}{k} = \frac{|E|}{t} = |V|$ je liché číslo a proto $\frac{|V|}{2} = \frac{|E|}{2t} = \frac{|E|}{k}$ není celé číslo a k nedělí počet hran.

Jiné řešení:

Je-li graf $G = (V, E)$ k-pravidelný, pak $\forall v \in V : \deg_G(v) = k$. Proto $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = k|V| = 2|E|$. Odtud dostáváme $\frac{|E|}{k} = \frac{|V|}{2}$.

Nyní rozlišíme dva případy. Je-li počet vrcholů v grafu sudý ($|V|$ je sudé číslo), potom $\frac{|V|}{2}$ je celé číslo a proto k dělí $|E|$. Je-li počet vrcholů v grafu lichý ($|V|$ je liché číslo), potom $\frac{|V|}{2}$ není celé číslo a k nedělí $|E|$.