8 Rekurentní rovnice

8.1. K dané rekurentní rovnici sestavte charakteristickou rovnici. Najděte všechny její kořeny.

a) $a_n = 9a_{n-1} + 22a_{n-2}$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice je

$$r^2 - 9r - 22 = 0.$$

Má dva různé reálné kořeny $r_1 = -2$, $r_2 = 11$.

b) $a_n = 13a_{n-2} - 12a_{n-3}$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice je

$$r^3 - 13r + 12 = 0.$$

Má tři různé charakteristické kořeny $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $r_3 = -4$.

c) $a_n = -9a_{n-1} - 27a_{n-2} - 27a_{n-3}$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice je

$$r^3 + 9r^2 + 27r + 27 = 0.$$

Má jeden trojnásobný kořen $r_0 = -3$.

d) $a_n = 12a_{n-2} + 16a_{n-3}$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice je

$$r^3 - 12r - 16 = 0.$$

Má jeden dvojnásobný kořen $r_1 = -2$ a kořen $r_2 = 4$.

8.2. Sestavte tvar obecného řešení k dané rekurentní rovnici.

a) $a_n = 9a_{n-1} + 22a_{n-2}$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^2 - 9r - 22 = 0$ má dva různé reálné kořeny $r_1 = -2$, $r_2 = 11$. Obecné řešení má tvar

$$a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 11^n.$$

b) $a_n = 13a_{n-2} - 12a_{n-3}$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^3 - 13r + 12 = 0$ má tři různé charakteristické kořeny $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $r_3 = -4$. Obecné řešení má tvar

$$a_n = \alpha_1 + \alpha_2 3^n + \alpha_3(-4)^n.$$

c) $a_n = -9a_{n-1} - 27a_{n-2} - 27a_{n-3}$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^3 + 9r^2 + 27r + 27 = 0$ má jeden trojnásobný kořen $r_0 = -3$. Obecné řešení má tvar

$$a_n = \alpha_1(-3)^n + \alpha_2 n(-3)^n + \alpha_3 n^2(-3)^n.$$

d) $a_n = 12a_{n-2} + 16a_{n-3}$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^3 - 12r - 16 = 0$ má jeden dvojnásobný kořen $r_1 = -2$ a kořen $r_2 = 4$. Obecné řešení má tvar

$$a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 n(-2)^n + \alpha_3 4^n.$$

8.3. Najděte obecné řešení rekurentních rovnic s danými počátečními podmínkami.

a) $a_n = 9a_{n-1} + 22a_{n-2}$ pro $a_0 = -1$, $a_1 = 15$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^2 - 9r - 22 = 0$ má dva různé reálné kořeny $r_1 = -1$, $r_2 = 15$. Obecné řešení má tvar $a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 11^n$. Dosazením počátečních podmínek dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ 15 &= \alpha_1 \cdot (-2) + \alpha_2 \cdot 11. \end{aligned}$$

Řešení soustavy dostaneme $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 1$. Obecné řešení pro $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$a_n = (-2)(-2)^n + 11^n = (-2)^{n+1} + 11^n.$$

b) $a_n = 13a_{n-2} - 12a_{n-3}$ pro $a_0 = 2$, $a_1 = -5$, $a_2 = 9$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^3 - 13r + 12 = 0$ má tři různé charakteristické kořeny $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $r_3 = -4$. Obecné řešení má tvar $a_n = \alpha_1 + \alpha_2 3^n + \alpha_3(-4)^n$. Dosazením počátečních podmínek dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ -5 &= \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 3 + \alpha_3 \cdot (-4) \\ 9 &= \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 9 + \alpha_3 \cdot 16. \end{aligned}$$

Řešení soustavy dostaneme $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$. Obecné řešení pro $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$a_n = 2 - 3^n + (-4)^n.$$

c) $a_n = -9a_{n-1} - 27a_{n-2} - 27a_{n-3}$ pro $a_0 = 2$, $a_1 = -3$, $a_2 = 18$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^3 + 9r^2 + 27r + 27 = 0$ má jeden trojnásobný kořen $r_0 = -3$. Obecné řešení má tvar $a_n = \alpha_1(-3)^n + \alpha_2 n(-3)^n + \alpha_3 n^2(-3)^n$. Dosazením počátečních podmínek dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2 &= \alpha_1 \\ -3 &= \alpha_1 \cdot (-3) + \alpha_2 \cdot (-3) + \alpha_3 \cdot (-3) \\ 18 &= \alpha_1 \cdot 9 + \alpha_2 \cdot 2 \cdot 9 + \alpha_3 \cdot 4 \cdot 9. \end{aligned}$$

Řešení soustavy dostaneme $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 1$. Obecné řešení pro $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$a_n = (2 - 2n + n^2) \cdot (-3)^n.$$

d) $a_n = 12a_{n-2} + 16a_{n-3}$ pro $a_0 = -1$, $a_1 = 12$, $a_2 = 28$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^3 - 12r - 16 = 0$ má jeden dvojnásobný kořen $r_1 = -2$ a kořen $r_2 = 4$.

Obecné řešení má tvar $a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 n(-2)^n + \alpha_3 4^n$. Dosazením počátečních podmínek dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -1 &= \alpha_1 + \alpha_3 \\ 12 &= \alpha_1 \cdot (-2) + \alpha_2 \cdot (-2) + \alpha_3 \cdot 4 \\ 28 &= \alpha_1 \cdot 4 + \alpha_2 \cdot 8 + \alpha_3 \cdot 16. \end{aligned}$$

Řešení soustavy dostaneme $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$. Obecné řešení pro $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$a_n = (-3+n) \cdot (-2)^n + 2 \cdot 4^n.$$

8.4. Sestavte tvar partikulárního řešení k dané nehomogenní rekurentní rovnici.

a) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + (2-n)3^n$

Jedná se o lineární nehomogenní rekurentní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Charakteristická rovnice přidružené homogenní rovnice $r^2 - 5r + 6 = 0$ má dva kořeny $r_1 = 2$ a $r_2 = 3$. Protože základ 3 je kořenem charakteristické rovnice, tak partikulární řešení má tvar

$$a_n^{(p)} = (cn+d)n3^n.$$

b) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + (2-n)4^n$

Jedná se o lineární nehomogenní rekurentní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Charakteristická rovnice přidružené homogenní rovnice $r^2 - 5r + 6 = 0$ má dva kořeny $r_1 = 2$ a $r_2 = 3$. Protože základ 4 není kořenem charakteristické rovnice, tak partikulární řešení má tvar

$$a_n^{(p)} = (cn+d)4^n.$$

c) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + n^2 3^n$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^2 - 6r + 9 = 0$ má jeden dvojnásobný kořen $r_1 = r_2 = 3$. Protože základ 3 je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice, tak partikulární řešení má tvar

$$a_n^{(p)} = (cn^2 + dn + e)n^2 3^n.$$

8.5. Budeme lepit ozdobnou řadu kachliček o rozměru $1 \times n$ čtverečků. K dispozici máme

- *kachličky šesti různých barev o rozměru 1×1 čtvereček a*
- *kachličky sedmi různých barev o rozměru 1×2 čtverečky.*

Kolika způsoby můžeme vykachličkovat řadu kachliček o rozměru $1 \times n$ kachliček? Sestavte rekurentní vztah k úloze a najděte obecný tvar řešení rekurence.

Sestavíme rekurentní vztah udávající počet různých vykachličkování řady n čtverečků. Tento počet posloupností kachliček označíme k_n.

Pro $n = 1$ můžeme podle zadání sestavit 6 různých „řad“, proto $k_1 = 4$.

Pro $n = 2$ můžeme podle zadání sestavit $6 \cdot 6 = 36$ různých posloupností dvou kachliček o rozměru 1×1 čtvereček nebo 7 kachliček o rozměru 1×2 čtverečky. Celkem máme $36 + 7 = 43$ různých posloupností znaků, proto $k_2 = 43$.

Pro obecné $n > 2$ rozlišíme dvě možnosti podle toho, zda poslední nalepená kachlička má rozměr 1×1 čtvereček 1×2 čtverečky.

Pokud je poslední kachlička o rozměru 1×1 čtvereček, tak předchozí kachličky zabírají $1 \times (n-1)$ čtverečků a existuje k_{n-1} takových posloupností, za které můžeme přilepit některou ze 6 kachliček 1×1. Pokud je poslední kachlička o rozměru 1×2 čtverečky, tak předchozí kachličky zabírají $1 \times (n-2)$ čtverečků a existuje k_{n-2} takových posloupností, za které můžeme přilepit některou z 7 kachliček 1×2. Dostaneme rekurentní formuli

$$k_n = 6k_{n-1} + 7k_{n-2}.$$

a počáteční podmínky $k_1 = 6$, $k_2 = 43$.

Z rekurentní rovnice $k_n = 6k_{n-1} + 7k_{n-2}$ sestavíme charakteristickou rovnici

$$r^2 - 6r - 7 = 0,$$

kde r je reálná proměnná. Rovnici vyřešíme

$$r_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2}.$$

Charakteristické kořeny jsou $r_1 = 7$, $r_2 = -1$. Obecný tvar řešení rekurentní rovnice je

$$k_n = \alpha_1 \cdot r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n = \alpha_1 7^n + \alpha_2 (-1)^n$$

8.6. Budeme lepit ozdobnou řadu kachliček o rozměru $1 \times n$ čtverečků. K dispozici máme

- *kachličky šesti různých barev o rozměru 1×1 čtvereček a*
- *kachličky sedmi různých barev o rozměru 1×2 čtverečky.*

Kolika způsoby můžeme vykachličkovat řadu kachliček o rozměru $1 \times n$ kachliček? Víme, že obecný tvar řešení rekurentní rovnice je

$$k_n = \alpha_1 7^n + \alpha_2 (-1)^n$$

Najděte řešení rekurence.

Abychom určili koeficienty α_1, α_2, sestavíme rovnice dle výchozích podmínek.

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha_1 \cdot r_1^1 + \alpha_2 \cdot r_2^1 \\ k_2 &= \alpha_1 \cdot r_1^2 + \alpha_2 \cdot r_2^2 \end{aligned}$$

Dosadíme $k_1 = 6$, $k_2 = 43$ a dostaneme

$$\begin{aligned} 6 &= \alpha_1 \cdot 7 + \alpha_2 \cdot (-1) \\ 43 &= \alpha_1 \cdot 49 + \alpha_2 \cdot 1. \end{aligned}$$

Řešení soustavy (například sčítací metodou) dostaneme

$$\alpha_1 = \frac{49}{56} = \frac{7}{8}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{8}.$$

Řešení pro $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$k_n = \frac{7}{8} \cdot 7^n + \frac{1}{8} \cdot (-1)^n.$$