7 Dirichletův princip

7.1. V krabici je dostatečné množství kuliček pěti různých barev: červené, modré, zelené, žluté a fialové. Kolik nejméně musíme vytáhnout kuliček, abychom měli jistotu, že máme alespoň dvě kuličky stejné barvy?

Využijeme Dirichletův princip. Přihrádky budou odpovídat jednotlivým barvám, mějme tedy pět přihrádek. Jestliže bude kuliček více než přihrádek, tak podle Dirichletova principu při rozdělování kuliček do přihrádek budou v alespoň jedné přihrádce alespoň dvě kuličky. Potřebujeme vytáhnout alespoň $5+1 = 6$ kuliček.

7.2. Ukažte, že v množině libovolných 12 *celých čísel existuje alespoň jedna taková dvojice čísel, jejichž rozdíl je dělitelný číslem* 10*.*

Rozdělíme libovolnou množinu 12 celých čísel do 10 přihrádek podle toho, jaký dávají zbytek po dělení číslem 10. Dle Dirichletova principu jsou v alespoň jedné přihrádce alespoň dvě čísla (dokonce je více takových přihrádek nebo je více čísel v přihrádce), která dávají stejný zbytek po dělení číslem 10. Rozdíl dvou čísel ze stejné přihrádky je pak násobkem čísla 10.

7.3. Mějme osm libovolných přirozených čísel. Dokažte, že jsou mezi nimi alespoň dvě, jejichž rozdíl je dělitelný sedmi.

Rozdělíme libovolnou množinu 8 přirozených čísel do 7 přihrádek podle toho, jaký dávají zbytek po dělení číslem 7. Dle Dirichletova principu jsou v alespoň jedné přihrádce alespoň dvě čísla, která dávají stejný zbytek po dělení číslem 7. Rozdíl dvou čísel ze stejné přihrádky je pak násobkem čísla 7.

7.4. Ve třídě je 27 studentů. Proč můžeme tvrdit, že někteří tři studenti mají jistě narozeniny ve stejném měsíci?

Využijeme zobecněný Dirichletův princip. Přihrádky budou odpovídat měsícům v roce, mějme tedy dvanáct přihrádek. Jestliže bude studentů více než **dvojnásobek** přihrádek, tak podle zobecněného Dirichletova principu budou při rozdělování studentů do přihrádek v alespoň jedné přihrádce alespoň tři studenti. Tito studenti budou mít narozeniny ve stejném měsíci. Je-li ve třídě alespoň $2 \cdot 12 + 1 = 25$ studentů, tak taková situace musí nastat. Studentů je 27, tedy dokonce více než 25, proto jistě někteří tři mají narozeniny ve stejném měsíci.

7.5. V krabici jsou kuličky čtyř různých barev: 50 červených, 60 modrých, 30 zelených a 10 žlutých. Kolik nejméně musíme vytáhnout kuliček, abychom měli jistotu

a) že máme alespoň dvě kuličky stejné barvy?

   Využijeme Dirichletův princip. Přihrádky budou odpovídat barvám kuliček, mějme tedy čtyři přihrádky. Jestliže bude kuliček více než přihrádek, tak podle Dirichletova principu budou při rozdělování kuliček do přihrádek v alespoň jedné přihrádce alespoň dvě kuličky (stejné barvy). Proto stačí vybrat $4 + 1 = 5$ kuliček.

b) že máme alespoň tři kuličky stejné barvy?

   Využijeme zobecněný Dirichletův princip. Přihrádky budou odpovídat barvám kuliček, mějme tedy čtyři přihrádky. Jestliže bude kuliček více než **dvojnásobek** přihrádek, tak podle zobecněného Dirichletova principu budou při rozdělování kuliček do přihrádek v alespoň jedné přihrádce alespoň tři kuličky (stejné barvy). Proto stačí vybrat $2 \cdot 4 + 1 = 9$ kuliček.

c) že máme alespoň čtyři kuličky stejné barvy?

   Využijeme zobecněný Dirichletův princip. Přihrádky budou odpovídat barvám kuliček, mějme tedy čtyři přihrádky. Jestliže bude kuliček více než **trojnásobek** přihrádek, tak podle zobecněného Dirichletova principu budou při rozdělování kuliček do přihrádek v alespoň jedné přihrádce alespoň čtyři kuličky (stejné barvy). Proto stačí vybrat $3 \cdot 4 + 1 = 13$ kuliček.

d) že máme alespoň jednu modrou kuličku?

Uvážíme nejhorší případ. Pokud vybereme všechny kuličky jiných barev, tak můžeme vybrat až $50 + 30 + 10 = 90$ kuliček. Jestliže však vytáhneme alespoň $90 + 1 = 91$ kuliček, alespoň jedna z nich musí být modrá.

e) že máme alespoň dvě žluté kuličky?

Uvážíme nejhorší případ. Pokud vybereme všechny kuličky jiných barev, tak můžeme vybrat až $50+60+30 = 140$ kuliček. Jestliže však vytáhneme alespoň $140+2 = 142$ kuliček, alespoň dvě z nich musí být žluté.

f) že máme kuličky alespoň dvou různých barev?

Uvážíme nejhorší případ. Pokud vybereme všechny kuličky modré kuličky, tak můžeme vytáhnout 60 kuliček a budeme mít kuličky pouze jedné barvy. Jestliže však vytáhneme alespoň $60 + 1 = 61$ kuliček, alespoň dvě z nich musí mít různou barvu.

7.6. Může mít po pěti kolech české fotbalové ligy každý tým jiný počet bodů? Týmů je 16*, za výhru jsou* 3 *body, za remízu* 1 *bod. Předpokládáme, že žádný tým nedostane trest v podobě odpočtu bodů.*

Každý tým různý počet bodů mít nemůže. Minimum je 0 bodů, maximum 15 bodů, to dává zdánlivě 16 možností. Není ale možné v 5 kolech získat 14 bodů, protože za 5 výher je 15 bodů a za 4 výhry a 1 remízu je jen 13 bodů. Čtrnáct bodů je možno získat za 4 výhry a 2 remízy, případně za méně výher, ale ještě více remíz, avšak žádná taková možnost nenastane po pěti zápasech. Počet různých možných bodových zisků je tedy nejvýše 15. (Je 15 možností přípustných počtů bodů, každou další možnost již lze dosáhnout.) Za přihrádky Dirichletova principu označíme možné počty bodů, kterých je nejvýše 15, přičemž týmů je v lize 16 plyne. Proto z Dirichletova principu plyne, že alespoň 2 týmy budou mít po 5 kolech shodný počet bodů.

7.7. Mějme posloupnost (nikoliv množinu) deseti celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Ukažte, že některý součet po sobě jdoucích členů $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j$, kde $1 \le i \le j \le 10$ je dělitelný číslem 10*.*

Sestavíme deset součtů

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_{10} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} \end{aligned}$$

Jestliže některý z těchto součtů $s_1, s_2, \ldots, s_{10}$ je dělitelný číslem 10, je tento součet hledaným řešením. Jinak součty musí dávat po dělení 10 některé z devíti zbytků $1, 2, \ldots, 9$. Dále užijeme Dirichletův princip. Přihrádky budou označovat různé zbytky, kterých je nejvýše 9 a rozdělíme do nich součty, kterých je 10. Proto v některé přihrádce budou alespoň dva součty (například s_i, s_j pro $i < j$), které dávají stejný zbytek po dělení 10. To ale znamená, že rozdíl $s_j - s_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j$ dává zbytek 0 po dělení 10. Hledané řešení je pak součet $a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j$.