5 Pravděpodobnost

5.1. Jiří má v šuplíku rozházených osm párů ponožek, dva páry jsou černé, dva páry modré, dva páry hnědé a dva páry zelené. Jiří náhodně vytáhne dvě ponožky.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vytáhne hnědý pár ponožek?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vytáhne pár ponožek ve stejné barvě?

Sestavíme pravděpodobnostní prostor, který modeluje vytažení dvou ponožek ze šuplíku. Elementární jevy jsou všechny možné dvojice ponožek, přičemž nerozlišujeme pořadí vytažených ponožek.

$$\Omega = \{\{p_1, p_2\} : p_1, p_2 \text{ jsou dvě ponožky}\}$$

Platí $|\Omega| = C(16, 2) = \binom{16}{2} = \frac{16\cdot 15}{2} = 120$. Všech ponožek je 16 a předpokládáme, že každá ze 120 dvojic má stejnou šanci být vytažena. Proto je odpovídající prostor (Ω, P) uniformní.

(a) Jev A „Jiří vytáhne hnědý pár ponožek“ je taková podmnožina $A \subseteq \Omega$, která obsahuje dvojice hnědých ponožek.

$$A = \{\{p_1, p_2\} : p_1, p_2 \text{ jsou dvě hnědé ponožky}\}$$

Takových dvojic je $|A| = C(4, 2) = 6$. Protože uvedený pravděpodobností prostor je uniformní, můžeme určit $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$.

(b) Jev B „Jiří vytáhne pár ponožek ve stejné barvě“ je taková podmnožina $B \subseteq \Omega$, která obsahuje dvojice ponožek stejné barvy. Mohou být černé, modré, hnědé, nebo zelené.

$$B = \{\{p_1, p_2\} : p_1, p_2 \text{ jsou dvě ponožky stejné barvy}\}$$

Takových dvojic je $|B| = 4C(4, 2) = 4 \cdot 6 = 24$. Protože uvedený pravděpodobností prostor je uniformní, můžeme určit $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$.

5.2. Jiří má v šuplíku rozházených devět párů ponožek, dva páry jsou černé, tři páry modré, tři páry hnědé a jeden pár zelený. Jiří náhodně vytáhne dvě ponožky.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vytáhne hnědý pár ponožek?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vytáhne pár ponožek ve stejné barvě?

Sestavíme pravděpodobnostní prostor, který modeluje vytažení dvou ponožek ze šuplíku. Elementární jevy jsou všechny možné dvojice ponožek, přičemž nerozlišujeme pořadí vytažených ponožek.

$$\Omega = \{\{p_1, p_2\} : p_1, p_2 \text{ jsou dvě ponožky}\}$$

Pravděpodobnostní prostor (Ω, P) je uniformní a platí $|\Omega| = C(18, 2) = 153$.

(a) Jev A „Jiří vytáhne hnědý pár ponožek“ je taková podmnožina $A \subseteq \Omega$, která obsahuje dvojice hnědých ponožek.

$$A = \{\{p_1, p_2\} : p_1, p_2 \text{ jsou dvě hnědé ponožky}\}$$

Takových dvojic je $|A| = C(6, 2) = 15$. Protože uvedený pravděpodobností prostor je uniformní, můžeme určit $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{15}{153} = \frac{5}{51}$.

(b) Jev B „Jiří vytáhne pár ponožek ve stejné barvě“ je taková podmnožina $B \subseteq \Omega$, která obsahuje dvojice ponožek stejné barvy. Mohou být černé, modré, hnědé, nebo zelené.

$$B = \{\{p_1, p_2\} : p_1, p_2 \text{ jsou dvě ponožky stejné barvy}\}$$

Takových dvojic je (podle počtu ponožek jednotlivých barev)

$$|B| = C(4, 2) + C(6, 2) + C(6, 2) + C(2, 2) = \binom{4}{2} + \binom{6}{2} + \binom{6}{2} + \binom{2}{2} = 6 + 15 + 15 + 1 = 37.$$

Protože uvedený pravděpodobností prostor je uniformní, můžeme určit $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{37}{153}$.

5.3. Máme balíček 32 hracích karet a náhodně je zamícháme. Jaká je pravděpodobnost, že:

(a) první čtyři karty jsou esa?

(b) první čtyři karty lze uspořádat do postupky 7,8,9,10 v jedné barvě?

(c) první čtyři karty lze uspořádat do postupky kluk, dáma, král, eso, přičemž mohou býti i v různých barvách?

(d) všechny karty jsou seřazeny střídavě červená, černá, červená, černá,... atd.?

Sestavíme pravděpodobnostní prostor, který modeluje výběr prvních čtyř karet. Elementární jevy jsou všechny možné čtveřice karet a každá má stejnou pravděpodobnost.

$$\Omega = \{\{k_1, k_2, k_3, k_4\} : k_1, k_2, k_3, k_4 \text{ jsou různé karty}\}$$

Takový pravděpodobnostní prostor je uniformní a platí $|\Omega| = C(32, 4) = \binom{32}{4} = 35960$.

(a) Jev A obsahuje jedinou možnost, jak z 32 karet vybrat čtveřici esa. Platí $|A| = 1$. Hledaná pravděpodobnost je $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{\binom{32}{4}} = \frac{1}{35960}$.

(b) Jev A je tvořen čtyřmi čtveřicemi, které odpovídají vybrané čtveřici 7, 8, 9, 10. Pro každou z jedné ze čtyř barev je čtveřice jediná. Platí $|A| = \binom{4}{1}$. Hledaná pravděpodobnost je $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{\binom{32}{4}} = \frac{4}{35960} = \frac{1}{8990}$.

(c) Jev A je tvořen čtveřicemi J, Q, K, A v různých barvách. Každou hodnotu můžeme nezávisle vybrat ze čtyř barev, proto takových čtveřic je $|A| = \binom{4}{1}^4$. Hledaná pravděpodobnost je $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{1}^4}{\binom{32}{4}} = \frac{4^4}{35960} = \frac{32}{4495}$.

(d) Sestavíme jiný pravděpodobnostní prostor Ω', který obsahuje různá možná pořadí černých a červených karet, přičemž nerozlišujeme hodnoty karet. Existuje $|\Omega'| = \binom{32}{16}$ možností, jak vybrat které karty v posloupnosti 32 karet jsou červené. Mezi nimi je jen jedna, která odpovídá zadání. Proto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega'|} = \frac{1}{\binom{32}{16}} = \frac{1}{601080390}$.

Jiné řešení:
Sestavíme pravděpodobnostní prostor, který je výrazně větší a který modeluje rozmíchání celého balíčku karet. Elementární jevy jsou všechna možná rozmíchání balíčku 32 karet a každé má stejnou pravděpodobnost $\frac{1}{32!}$.

$$\Omega = \{(k_1, k_2, \ldots, k_{32}) : k_1, k_2, \ldots, k_{32} \text{ jsou různé karty}\}$$

Takový pravděpodobnostní prostor je uniformní a platí $|\Omega| = P(32) = 32!$.

(a) 4 esa můžeme na první čtyři pozice umístit $P(4) = 4!$ způsoby a zbývajících 28 karet můžeme zamíchat $P(28) = 28!$ způsoby. Tedy počet zamíchání, kde jsou první čtyři karty esa je $4!28!$, proto $P(A) = \frac{4!28!}{32!} = \frac{1}{35960}$.

(b) Máme $P(4) \cdot 4 \cdot P(28) = 4! \cdot 4 \cdot 28!$ možností zamíchání, kde první čtyři karty jsou 7,8,9,10 v libovolném pořadí v jedné barvě. Tedy $P(A) = \frac{4! \cdot 4 \cdot 28!}{32!} = \frac{1}{8990}$.

(c) Máme $V(4, 4) = 4^4$ možností, jak na prvních čtyřech pozicích vytvořit postupku J, Q, K, A. Ke každé takto vytvořené postupce je 28! možností jak zamíchat zbývajících 28 karet a 4! možností jak je uspořádat. Tedy $P(A) = \frac{4^4 \cdot 4! \cdot 28!}{32!} = \frac{96}{13485} = \frac{32}{4495}$.

(d) Jev A obsahuje všechna rozmíchání, kde se pravidelně střídají červené a černé karty. Takových rozmíchání je $|A|$. Nejdříve rozmístíme 16 červených karet na liché pozice, tj. 16! možností. Ke každému takovému rozmístění červených karet máme 16! možností, jak rozmístit 16 černých karet. Tedy $P(A) = \frac{(16!)^2}{32!} = \frac{1}{601080390}$.

5.4. Házíme čtyřikrát šestistěnnou hrací kostkou. Já jsem vsadil na možnost, že padne právě jedna šestka a můj protivník, že nepadne žádná šestka. Kdo z nás dvou má větší pravděpodobnost výhry?

Zkonstruujme konečný uniformní pravděpodobnostní prostor Ω, který popisuje všechny možné hody čtyřmi kostkami. Platí $\Omega = [1,6]^4 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_i \in [1,6] \wedge i = 1,2,3,4\}$ a tedy $|\Omega| = 6^4$. Uspořádaných čtveřic, které neobsahují 6 je $|B| = 5^4$ a uspořádaných čtveřic, které obsahují přesně jednu šestku je $|A| = 4\cdot 5^3$. Tedy pravděpodobnost, že vyhraje protivník je $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{5^4}{6^4}$ a pravděpodobnost, že vyhraji já je $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4\cdot 5^3}{6^4}$. A vidíme, že $\frac{5^4}{6^4} > \frac{4\cdot 5^3}{6^4}$.

5.5. Házíme třemi šestistěnnými hracími kostkami a sledujeme součet hozených hodnot. Jaká je pravděpodobnost, že je součet

(a) 6?

(b) lichý?

(c) sudý?

Sestavíme konečný uniformní pravděpodobnostní prostor, který popisuje všechny možné výsledky pro tři různé kostky. Máme $\Omega = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{N}^3 | 1 \le x_i \le 6, i = 1,2,3\}$, přičemž každý elementární jev má stejnou pravděpodobnost $\frac{1}{6^3}$. Platí $|\Omega| = 6^3$.

(a) Jev A, kdy součet hozených hodnot je 6, je podmnožina $A \subseteq \Omega$ všech uvedených uspořádaných trojic, kde $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. V úvahu přicházejí tyto trojice čísel $1,1,4$ resp. $1,2,3$ resp. $2,2,2$, z nichž vytvoříme $\frac{3!}{2!} + 3! + 1 = 10$ uspořádaných trojic. Proto $|A| = 10$. Tedy $P(A) = \frac{10}{6^3} = \frac{5}{2^2\cdot 3^3} = \frac{5}{108}$.

(b) Jev B, že padne lichý součet $x_1 + x_2 + x_3$ odpovídá uspořádaným trojicím, kdy je buď právě jeden sčítanec lichý nebo jsou všechny tři sčítance liché.

Nejprve určíme počet trojic, které mají přesně jednu složku lichou. Lichý sčítanec je jeden ze tří, tj. $\binom{3}{1}$ možností, pak máme vždy $V^*(3,2) = 3^2$ možností, jak sudými čísly doplnit zbývající 2 pozice. Tedy uspořádaných trojic (x_1,x_2,x_3), které obsahují přesně jedno liché číslo, je $\binom{3}{1}\cdot 3^2 = 3^4$.

Snadno zjistíme, že uspořádaných trojic (x_1,x_2,x_3), které obsahují jen liché složky, je $|B| - 3^3$.

Tedy uspořádaných trojic (x_1,x_2,x_3), kde $x_1+x_2+x_3$ je liché číslo, bude $3^4 + 3^3 = 4\cdot 3^3$. Proto $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4\cdot 3^3}{6^3} = \frac{2^2\cdot 3^3}{2^3\cdot 3^3} = \frac{1}{2}$.

Jiné řešení:

Vezmeme (uniformní) pravděpodobnostní prostor všech hodů $\Omega = \{(i,j,k) : 1 \le i,j,k \le 6\}$. Je zřejmé, že množina S všech hodů se sudým součtem a množina L všech hodů s lichým součtem tvoří rozklad Ω. Ukážeme, že $|S| = |L|$, protože ke každému hodu se sudým součtem na horních stěnách odpovídá právě jeden hod s lichým součtem (na spodních stěnách). Protože jevy S a L jsou doplňkové, tak dostáváme

$$P(S) + P(L) = 1 \quad \wedge \quad P(S) = P(L).$$

Odtud dosazením je $P(S) + P(S) = 2P(S) = 1$ a proto $P(S) = \frac{1}{2}$. Podobně $P(L) = \frac{1}{2}$.

(c) Tento náhodný jev je doplňkový (komplementární) k jevu B z příkladu (b). Označíme jej $\overline{B}$. Víme, že $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$, a proto $P(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

5.6. Házíme dvakrát šestistěnnou hrací kostkou. Náhodný jev A je „v součtu padne 6“, náhodný jev B je „součin hozených hodnot je 8“, náhodný jev C je „v prvním hodu padlo 1 nebo 3“, náhodný jev D je „v prvním hodu padlo 1 nebo 2 nebo 4“.

(a) Jsou A a B nezávislé jevy?

(b) Jsou C a D závislé jevy?

(c) Jsou A a C nezávislé jevy?

(d) Jsou B a C závislé jevy?

Vysvětlete.

Sestavíme uniformní pravděpodobnostní prostor, který popisuje všechny možné výsledky při hodu dvěma kostkami. Mějme $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 | 1 \le x_i \le 6, i = 1, 2\}$. Platí $|\Omega| = 6^2$ a proto pravděpodobnost každého elementárního jevu je $\frac{1}{36}$.

(a) Jev $A = \{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}$. Proto $P(A) = \frac{5}{6^2} = \frac{5}{36}$. Jev $B = \{(2,4),(4,2)\}$, což dává $P(B) = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$. Dále $A \cap B = \{(2,4),(4,2)\}$, a tedy $P(A \cap B) = \frac{1}{18}$.

Z toho vidíme, že $P(A \cap B) = \frac{1}{18} \neq \frac{1}{18} \cdot \frac{5}{36} = P(A) \cdot P(B)$. Jevy A, B tedy nejsou nezávislé, a proto jim říkáme *závislé.*

(b) Jev $C = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(3,1),(3,2),\ldots,(3,6)\}$, proto $P(C) = \frac{12}{6^2} = \frac{1}{3}$. Jev $D = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(2,6),(4,1),(4,2),\ldots,(4,6)\}$, což dává $P(D) = \frac{18}{6^2} = \frac{1}{2}$. Dále $C \cap D = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6)\}$, a tedy $P(C \cap D) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$.

Z toho vidíme, že $P(C \cap D) = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = P(C) \cdot P(D)$. Jevy C, D jsou nezávislé.

(c) Už víme, že $P(A) = \frac{5}{36}$, $P(C) = \frac{1}{3}$. Dále a $A \cap C = \{(1,5),(3,3)\}$, proto $P(A \cap C) = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$. Z toho vidíme, že $P(A \cap C) = \frac{1}{18} \neq \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{3} = P(A) \cdot P(C)$. Jevy A, C jsou závislé.

(d) Už víme, že $P(B) = \frac{1}{18}$, $P(C) = \frac{1}{3}$ a $B \cap C = \emptyset$. Platí $P(B \cap C) = 0$.

Z toho vidíme, že $P(B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{3} = P(B) \cdot P(C)$. Jevy B, C jsou závislé.

5.7. Házíme osmistěnnou hrací kostkou. Jaká je průměrná hozená hodnota?

Pro náhodnou proměnnou X platí $X \in [1, 8]$. Nechť pravděpodobnost, že padne číslo i, $i \in [1, 8]$, je p_i. Předpokládáme spravedlivou kostku, proto $p_i = \frac{1}{8}$ pro každé i. Dále $EX = \sum_{i=1}^{8} p_i \cdot i = \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 2 \ldots + \frac{1}{8} \cdot 8 = \frac{1}{8}(1 + 2 \ldots + 8) = \frac{1}{8} \cdot 4 \cdot 9 = \frac{9}{2} = 4,5$.

5.8. Házíme šestistěnnou a osmistěnnou hrací kostkou. Jaká je průměrná hodnota součtu a součinu hozených hodnot?

Náhodné proměnné X, Y definujme takto: X je hodnota hozená na šestistěnné kostce a Y je hodnota hozená na osmistěnné kostce. Platí $X \in [1, 6]$ a $Y \in [1, 8]$. Vidíme, že X, Y jsou nezávislé proměnné, proto $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ a $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$, přičemž $E(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + \ldots + 6) = 3,5$ a $E(Y) = 4,5$ (viz příklad (7)). Proto $E(X + Y) = 3,5 + 4,5 = 8$, $E(X \cdot Y) = 3,5 \cdot 4,5 = 15,75$.

5.9. Máme šestistěnnou hrací kostku, která není spravedlivá (poctivá). Malá čísla 1, 2 a 3 mají všechna stejnou šanci, že padnou. Také velká čísla 4, 5 a 6 mají všechna stejnou šanci, že padnou, avšak dvojnásobnou než malá čísla. Jaká je střední hodnota počtu ok, která padnou při hodu touto kostkou?

Nejprve sestavíme pravděpodobnostní prostor, který modeluje hod takovou kostkou. Vypočítáme pravděpodobnosti jednotlivých jevů. Pravděpodobnost, že padne hodnota i označme p_i. Podle zadání platí, že $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{2}p_4 = \frac{1}{2}p_5 = \frac{1}{2}p_6$, tj. například $p_4 = 2p_1$. Navíc z definice pravděpodobnostní funkce je $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$. Dosazením a úpravou dostaneme $3 \cdot p_1 + 2 \cdot 3p_1 = 1$, odkud je ihned $p_1 = \frac{1}{9}$. Další pravděpodobnosti snadno dopočítáme.

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{9}, \quad p_4 = p_5 = p_6 = \frac{2}{9}$$

Zavedeme náhodnou proměnnou X udávající číslo, které padne. Platí $X \in [1, 6]$ Nyní z definice střední hodnoty je

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot p_i = \frac{1}{9}(1 + 2 + 3) + \frac{2}{9}(4 + 5 + 6) = \frac{6 + 30}{9} = \frac{36}{9} = 4.$$

Střední hodnota počtu ok při hodu kostkou je 4.

5.10. V kapse je pět mincí: jedna desetikoruna a čtyři dvoukoruny. Náhodně vytáhneme dvě mince. Kolik korun v průměru vytáhneme?

Zavedeme náhodnou veličinu, která udává hodnotu, kterou vytáhneme. Veličina X může nabývat hodnot

- 4, jestliže vytáhneme dvě dvoukoruny
- 12, jestliže vytáhneme desetikorunu a jednu dvoukorunu.

Proto $X \in \{4, 12\}$. Dále zavedeme pravděpodobnostní prostor popisující možné tažené dvojice mincí. Protože existuje celkem $\binom{5}{2} = 10$ možných tahů, tak $|\Omega| = 10$. Příslušné pravděpodobnosti obou hodnot náhodné proměnné označíme p_4 a p_{12}. Možností, kdy vytáhneme 4 koruny je $\binom{4}{2} = 6$ a možností, kdy vytáhneme 12 korun je $\binom{4}{1} \cdot \binom{1}{1} = 4$. Předpokládáme, že každá dvojice má stejnou šanci se objevit, proto $p_4 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ a $p_{12} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Střední hodnota veličiny X je podle definice

$$E(X) = 4 \cdot p_4 + 12 \cdot p_{12} = 4 \cdot \frac{3}{5} + 12 \cdot \frac{2}{5} = \frac{12 + 24}{5} = \frac{36}{5} = 7,2.$$

5.11. V osudí je jeden žeton s hodnotou 4, dva žetony s hodnotou 3, tři žetony s hodnotou 2 a čtyři žetony s hodnotou 1. Vylosujeme jeden žeton. Jaká je střední hodnota taženého žetonu? [2]

5.12. Hodíme čtyřmi kostkami. Jsou jevy A „padne postupka čtyř po sobě jdoucích čísel (v libovolném pořadí)“ a B „padne sudý součet“ nezávislé? Vysvětlete.

Zavedeme pravděpodobnostní prostor $\Omega = [1, 6]^4$, který je uniformní. Platí $|\Omega| = 6^4 = 1296$.

Postupky můžeme dostat buď $1, 2, 3, 4$ nebo $2, 3, 4, 5$ nebo $3, 4, 5, 6$, každou celkem $P(4) = 4! = 24$ způsoby. Jev A obsahuje všechny příslušné čtveřice a platí $|A| = 3 \cdot P(4) = 3 \cdot 24 = 72$. Protože Ω je uniformní, tak $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{72}{1296} = \frac{1}{18}$.

Mezi všemi čtveřicemi v Ω je polovina těch, které mají sudý součet, protože otočením každé kostky „vzhůru nohama“ dostaneme jinou čtveřici a změní se parita součtu. Proto $|B| = \frac{|\Omega|}{2}$ a $P(B) = \frac{1}{2}$.

Konečně $A \cap B = A$, protože součet čísel postupky je vždy sudý: buď $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, nebo $2 + 3 + 4 + 5 = 14$, nebo $3 + 4 + 5 + 6 = 18$. Pro nezávislé jevy musí platit $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$, avšak $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{36}$, ale $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{18}$. Oba jevy proto nejsou nezávislé (jsou závislé).

Jiné řešení:

Padne-li postupka, obsahuje dvě sudá a dvě lichá čísla a součet takových čísel je jistě sudý. Oba jevy nejsou nezávislé, protože víme-li, že padla postupka, je součet jistě sudý. Tj. $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1$ a neplatí $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(\Omega)}$.