4 Výběry s opakováním

4.1. Kolik existuje různých registračních značek automobilů v Severomoravském kraji? (registrační značka je tvaru ?T? ????, kde ? jsou číslice).

Značka obsahuje uspořádaných šest číslic 0 až 9 s možností opakování. $V^*(10,6) = 10^6$.

4.2. Na čerpací stanici je v řadě 12 stožárů a 12 vlajek, 3 modré, 2 zelené, 4 červené a 3 žluté. Kolika různými způsoby lze tyto vlajky umístit na stožáry? Je možné, aby každý den v průběhu 700 let bylo zavěšení jiné než dny ostatní?

Jedná se o uspořádaný výběr 12 vlajek ze 4 různých barev, přičemž počet opakování je předepsán. Počet takových výběrů je počet permutací s opakováním.

$$P^*(3,2,4,3) = \frac{(3+2+4+3)!}{3!2!4!3!} = \frac{12!}{4!(3!)^2 2!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{6\cdot 6\cdot 2} = 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 5 = 277\ 200.$$

Dále víme, že $277200/365 \doteq 759$, a tedy by byla možná různá zavěšení každý den po dobu 700 let.

Dokonce započítáme-li přestupné roky, můžeme říci že rok má méně než $365,25$ dne (ne každé 4 roky je přestupný rok). Potom $277200/365,25 > 758$, a tedy by byla možná různá zavěšení každý den po dobu delší než 700 let.

4.3. Kolik existuje takových anagramů slov KUALA LUMPUR (včetně mezery), které obsahují dvě slova?

Slova obsahují 1 mezeru, 2A, 1K, 2L 1M, 1P, 1R a 3U. Jedná se o uspořádaný výběr dvanácti písmen s předepsaným počtem opakování – permutace s opakováním. Všech anagramů je

$$P^*(1,2,1,2,1,1,1,3) = \frac{12!}{(2!)^2(3!)} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{24} = 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 2 = 19\,958\,400.$$

Mezeru na začátku obsahuje

$$P^*(2,1,2,1,1,1,3) = \frac{11!}{(2!)^2(3!)} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{24} = 11\cdot 10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 2 = 1663200$$

z nich a na konci také 1 663 200. Existuje celkem $19958400 - 2\cdot 1663200 = 16\ 632\ 000$ možností.

4.4. Kolika způsoby můžeme vybrat čtyři políčka na klasické šachovnici tak, aby žádná dvě vybraná políčka neležela v témže sloupci?

Úlohu budeme řešit jako složený výběr.

(i) Nejprve najdeme počet všech možností, jak vybrat čtyři sloupce. Jedná se neuspořádaný výběr 4 sloupců z 8. $C(8,4) = \binom{8}{4} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2} = 2\cdot 7\cdot 5 = 70$.

(ii) V každém ze čtyř vybraných sloupců nyní můžeme zvolit jedno políčko libovolně. Nyní závisí, ve kterém sloupci políčka vybíráme, proto se jedná o uspořádaný výběr s opakováním. $V^*(8,4) = 8^4$, nebo čtyři nezávislé výběry $C(8,1)^4 = \binom{8}{1}^4 = 8^4 = 4096$.

Celkem máme $70\cdot 4096 = 286\ 720$ možností.

4.5. Kolika způsoby můžete napsat jedenáct jako součet

(a) pěti nezáporných celých čísel;

(b) čtyř kladných celých čísel.

Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců, tj. například $3+1+4+0+3 = 11$ *a* $4+1+0+3+3 = 11$ *jsou různé součty.*

Počítáme, jako rozdělení jedenácti jedniček do pěti/čtyř přihrádek (přihrádky odpovídají sčítancům) s možností opakování.

(a) $C^*(5,11) = \binom{11+5-1}{5-1} = \binom{15}{4} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{24} = 15\cdot 7\cdot 13 = 1365$ možností.

(b) nejprve přidělíme do každé přihrádky jednu jedničku, aby byly neprázdné (celkem čtyři jedničky) a dále rozdělujeme 7 jedniček: $C^*(4,7) = \binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = 10\cdot 3\cdot 4 = 120$ možností.

4.6. V nápojovém automatu se prodávají tři druhy nápojů: Cola, Fanta a Sprite. Během přestávky bylo prodáno šest nápojů. Kolik je různých možností, které nápoje byly prodány?

Počítáme jako neuspořádané výběry s opakováním – kombinace s opakováním. $C^*(3,6) = \binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$.

4.7. Kolik existuje všech zobrazení 3-prvkové množiny do 5-prvkové?

Pro každý ze tří prvků vybírám obraz mezi 5 prvky s možností opakování. Jedná se o uspořádaný výběr s opakováním. $V^*(5,3) = 5^3 = 125$.

4.8. Chceme vedle sebe do řady postavit 5 dívek a 7 chlapců, přičemž nesmí vedle sebe stát 2 dívky (stále mezi sebou štěbetají. Kolik máme možností?

Nejdříve umístíme do řady 7 chlapců tj. $P(7) = 7!$ možností. Pak dívky musíme „nacpat“ do osmi mezer mezi chlapci v řadě (včetně krajů).

Do každé mezery může přijít nejvýše jedna dívka, jedná se o výběr pěti mezer z osmi možností. Osoby rozlišujeme, proto je výběr uspořádaný bez opakování. Máme $V(8,5) = \frac{8!}{(8-5)!}$ možností rozmístění dívek v mezerách. Celkový počet možností je proto $P(7)\cdot V(8,5) = 7!\frac{8!}{3!} = 7!\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 5040\cdot 56\cdot 120 = 33\,868\,800$.

4.9. V senátu USA je 100 senátorů, přičemž vždy dva jsou ze stejného státu Unie (USA má 50 států). Kolika způsoby je možné sestavit 4 členný výbor pro ochranu hospodářské soutěže, kde musí býti alespoň jedna dvojice senátorů z téhož státu?

Máme $C(50,1) = 50$ možností, jak vybrat jednu dvojici senátorů z jednoho státu Unie. Pro každou takto vybranou dvojici existuje $C(98,2) = \binom{98}{2}$ možností, jak ji doplnit na čtyřčlenný výbor. Jenže výbory, které obsahují dvě dvojice ze dvou států ($\binom{50}{2}$ možností), jsou zde započítány vždy dvakrát. Celkový počet je $50\binom{98}{2} - \binom{50}{2} = 50\cdot 49\cdot 97 - 25\cdot 49 = 237650 - 1225 = 236\,425$.

Jiné řešení:

Je-li ve výboru právě jedna dvojice z nějakého státu, tak třetího člena vybereme z 98 možností a čtvrtého z 96 možností. Nerozlišujeme pořadí třetího a čtvrtého člena a máme celkem $C(50,1)C(98,1)C(96,1)\cdot\frac{1}{2} = 50\cdot\frac{98\cdot 96}{2}$ možností. Jsou-li ve výboru dvě dvojice ze dvou států, jedná se o $\binom{50}{2}$ možností. Celkem máme $50\cdot\frac{98\cdot 96}{2} + \binom{50}{2} = 50\cdot 49\cdot 96 + 25\cdot 49 = 235200 + 1225 = 236\,425$ možností.

Jiné řešení:

Výpočet rozdělíme na dvě disjunktní možnosti: 1) dva senátoři z jednoho státu a další dva z různých států a 2) dvě dvojice senátorů ze stejných států.

Počet výběrů první možnosti spočítáme jako složený výběr, kde nejprve stát, ze kterého budou v komisi oba senátoři pak vybereme dva zbývající státy a nakonec z každého vybraného státu vybereme jednoho ze dvou senátorů. Počty jednotlivých podvýběrů násobíme dle kombinatorického pravidla součinu. Dostaneme $C(50,1)C(49,2)C(2,1)C(2,1) = \binom{50}{1}\cdot\binom{49}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{1}$.

Počet výběrů druhé možnosti spočítáme snadněji, stačí vybrat dva státy, ze kterých budou v komisi oba senátoři. Počet takových výběrů je $C(50,2) = \binom{50}{2}$.

Nakonec podle kombinatorického pravidla součtu počty obou disjunktních možností sečteme a dostaneme $\binom{50}{1}\cdot\binom{49}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{1} + \binom{50}{2} = 50\cdot\frac{49\cdot 48}{2}\cdot 2\cdot 2 + \frac{50\cdot 49}{2} = 50\cdot 49\cdot 96 + 25\cdot 49 = 236\,425$.

4.10. Matyáš má 7 bílých dresů s čísly $2,4,7,22,68,77$ *a* 88. *Tři z nich chce obarvit na červeno, dva na modro a dva chce nechat bílé. Kolika různými způsoby to může provést?*

Vybere ze sedmi dresů zcela libovolně tři a ty obarví červeně ($\binom{7}{3}$ možností). Ze zbývajících 4 dresů pak vybere libovolné dva ($\binom{4}{2}$ možností), které obarví modře a zbylé dva nechá bílé. Celkově tedy máme $\binom{7}{3}\binom{4}{2} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{6}\cdot 6 = 210$ možností.

Jiné řešení:

Seřadí si dresy dle čísel od nejmenšího po největší. Každé obarvení můžeme charakterizovat „slovem“ neboť obsahuje 3 č, 2 m a 2 b. Například slovo „bččmbmč“, říká, že dvojka je bílá, čtyřka červená, sedmička červená, dvacetdvojka modrá, šedesátosmička bílá, sedmdesátsedmička modrá a osmdesátosmička červená. Tedy různých obarvení je tolik, kolik je anagramů předchozího slova. Proto máme $P^*(3,2,2) = \frac{7!}{3!2!2!}$ možností. Nyní počet možností je $P^*(3,2,2) = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{2\cdot2} = 210$.

Všimněte si, že $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} = \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = \frac{7!}{3!2!2!}$.

4.11. Kolik je všech šesticiferných čísel, která jsou dělitelná pěti? Šesticiferná čísla samozřejmě nemohou začínat nulou.

Čísla dělitelná pětkou vždy mají poslední cifru 0 nebo 5. S využitím kombinatorického pravidla součinu dostaneme celkový počet jako součin tří počtů podvýběrů: první cifry z 9 možností (ne 0), další čtyři cifry z 10 možností a poslední cifry ze dvou možností. $V^*(9,1)V^*(10,4)V^*(2,1) = 9 \cdot 10^4 \cdot 2 = 180\ 000$.

Jiné řešení:

Uvědomíme si, že se jedná o šesticiferná čísla, kterých je $999999 - 100000 + 1$. Dělitelné 5 je každé páté, proto hledaných čísel je $(999999 - 100000 + 1)/5 = 900000/5 = 180000$.

4.12. Máme 8 stejných kuliček a čtyři různé barvy. Každou kuličku chceme natřít přesně jednou z těchto čtyř barev. Kolik máme různých možností?

Jedná se o neuspořádaný výběr, kdy ze 4 barev vybíráme 8 krát. Výběry se mohou opakovat, jedná se proto o kombinace s opakováním. $C^*(4,8) = \binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = 165$.

4.13. Mějme výraz $(4x^2 - 7y)^9$. Jaký koeficient bude po umocnění u členu x^8y^5?

Z binomické věty $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ plyne, že pro člen obsahující $x^8y^5 = (x^2)^4y^5$ platí $k = 4$ a $n-k = 9-4 = 5$. Proto tento člen po umocnění dvojčlenu $(4x^2+(-7y))^9$ vypadá následovně $\binom{9}{4}4^4x^8(-7)^5y^5$ a hledaný koeficient tedy je $\binom{9}{4}4^4(-7)^5 = 126 \cdot 256 \cdot (-16807) = -542126592$.