3 Výběry bez opakování

3.1. Hokejový trenér má k dispozici 5 obránců a 7 útočníků. Kolika různými způsoby je schopen sestavit útočnou pětku, pokud tato obsahuje 2 obránce a 3 útočníky?

Jedná se o neuspořádaný výběr dvou obránců z 5 a tří útočníků ze 7. Vybraný hráč se pochopitelně nemůže v jednom výběru opakovat. Dostáváme $C(5,2)C(7,3) = \binom{5}{2}\binom{7}{3} = 10 \cdot 35 = 350$.

3.2. Hokejový trenér má k dispozici 5 obránců a 6 útočníků. Kolika různými způsoby je schopen sestavit útočnou pětku (3 útočníci a 2 obránci), pokud jeden konkrétní útočník je schopen hrát i v obraně?

Opět se jedná o neuspořádané výběry bez opakování. Rozlišíme dvě možnosti: zda zmíněný útočník může hrát (hraje nebo nehraje) v útoku nebo jistě hraje v obraně.

(i) Zmíněný útočník hraje v útoku nebo nehraje: $C(6,3)C(5,2) = \binom{6}{3}\binom{5}{2} = 200$ možností.

(ii) Útočník hraje v obraně (vybíráme už jen jednoho obránce): $C(5,3)C(5,1) = \binom{5}{3}\binom{5}{1} = 50$ možností.

Tedy celkem máme $200 + 50 = 250$ možností.

3.3. Hokejový trenér má k dispozici celkem 9 hráčů, přičemž 3 z nich jsou dobří útočníci. Kolika různými způsoby je schopen sestavit útočnou pětku (3 útočníci a dva obránci) tak, aby v ní hrál alespoň jeden dobrý útočník?

Výběr hráčů je neuspořádaný výběr bez opakování, tj. kombinace.

(i) Všech možností jak vybrat útočnou pětku, je $C(9,5) = \binom{9}{5} = 126$.

(ii) Počet možností, kdy ve vybrané pětce není ani jeden dobrý útočník, je $C(6,5) = \binom{6}{5} = \binom{6}{1} = 6$

Tedy celkem je $126 - 6 = 120$ možností.
Jiné řešení:
Vybereme nezávisle i dobrých útočníků a zbývajících $5 - i$ hráčů vybíráme mezi zbývajícími šesti hráči. Pětek, kde hraje alespoň jeden dobrý útočník, pak je

$$C(3,1)C(6,4) + C(3,2)C(6,3) + C(3,3)C(6,2) = \binom{3}{1} \cdot \binom{6}{4} + \binom{3}{2} \cdot \binom{6}{3} + \binom{3}{3} \cdot \binom{6}{2} =$$

$$= 3 \cdot 15 + 3 \cdot 20 + 1 \cdot 15 = 45 + 60 + 15 = 120.$$

3.4. V oddělení mateřské školky je 12 dětí. Paní učitelka má k dispozici 12 různých hraček. Kolika způsoby je může dětem rozdat tak, aby každé dítě mělo alespoň jednu hračku? Žádné dvě děti nebudou sdílet jednu hračku.

Jedná se o uspořádaný výběr, neboť rozlišujeme, kdo dostane kterou hračku. Protože vybíráme *všechny* hračky, jedná se o permutaci množiny hraček. $P(12) = 12! = 479\,001\,600$

3.5. V oddělení mateřské školky je 12 dětí. Paní učitelka má k dispozici 18 různých hraček. Kolika způsoby je může dětem rozdat tak, aby každé dítě mělo právě jednu hračku? Žádné dvě děti nebudou sdílet jednu hračku.

Jedná se o uspořádaný výběr, neboť rozlišujeme, kdo dostane kterou hračku. Protože vybíráme 12 z 18 hraček, jedná se o 12-prvkové variace z 18 prvků bez opakovaní hraček. $V(18,12) = \frac{18!}{(18-12)!} = \frac{18!}{6!} = 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 8\,892\,185\,702\,400$.

3.6. Kolik existuje prostých zobrazení 3-prvkové množiny do 5-prvkové množiny?

Máme $C(5,3) = \binom{5}{3}$ možností jak vybrat 3 prvky z pětiprvkové množiny, na které zobrazíme všechny tři prvky množiny tříprvkové. Pak trojici prvků na druhou trojici prvků můžeme injektivně zobrazit $3!$ způsoby. Tedy celkový počet zobrazení je $\binom{5}{3}3! = 60$.

Jiné řešení:
Jedná se o jednoduchý uspořádaný výběr, kdy vybíráme třikrát z pěti prvků bez možnosti opakování. $V(5,3) = \frac{5!}{2!} = 60$.

3.7. Kolik existuje prostých zobrazení 5-prvkové množiny do 3-prvkové množiny?

Žádné. Neboť 5 prvků nelze injektivně zobrazit na 3 prvky.

3.8. Kolika způsoby mohu posnídat své oblíbené sušenky, pokud je v balíčku 10 různých sušenek a já chci sníst 6 (4 si nechávám na svačinu)? Uvažujte oba případy, tzn. jednou budu rozlišovat pořadí konzumovaných sušenek, podruhé ne. Kolikrát se zvýší počet možností, pokud budu rozlišovat pořadí?

Jestliže nerozlišujeme pořadí, tak se jedná o neuspořádané výběry šesti prvků z deseti (bez opakování). Možností je $C(10,6) = \binom{10}{6} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2} = 210$. Jestliže rozlišujeme pořadí, tak se jedná o uspořádané výběry prvků z deseti (bez opakování). Možností je $V(10,6) = \frac{10!}{(10-6)!} = 10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5 = 151\,200$. Nebo si také uvědomíme, že vybraných šest sušenek můžeme seřadit $P(6)$ způsoby, tj. $\binom{10}{6}6! = 210\cdot720 = 151\,200$. Počet možností se zvýší $6! = 720$ krát.

3.9. Kolik přímek lze proložit osmi body v rovině, jestliže žádné tři body nejsou kolineární (neleží v jedné přímce)?

Každou dvojicí bodů je možno proložit jednu přímku. Jedná se o neuspořádané výběry dvou prvků bez opakování kombinace $C(8,2) = \binom{8}{2} = \frac{8\cdot7}{2} = 28$. Můžeme proložit 28 různých přímek.

3.10. Kolika způsoby můžeme 6 diváků posadit do divadelní řady (řada má 6 sedadel) tak, aby Theofil a Angelína seděli vedle sebe?

Rozlišíme dvě možnosti: zda Angelína sedí po Theofilově levici nebo pravici. V obou případech je pak považujeme za „jediného“ diváka a počítáme, kolik existuje možností, jak posadit pět diváků do řady. Celkem máme $2\cdot P(5) = 2\cdot5! = 2\cdot120 = 240$.

3.11. Spočítejte, kterých výběrů existuje více:

(a) možností, jak z deseti daných karet vybrat 3 bez ohledu na pořadí, nebo

(b) jak seřadit různých daných pět karet do řady?

Počty obou výběrů spočítáme:

(a) $C(10,3) = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2} = 10\cdot3\cdot4 = 120$.

(b) $P(5) = 5! = 120$

Oba výběry mají stejný počet možností.