2 Sumy a produkty

2.1. Vypočítejte, čemu se rovná $\prod_{i=1}^{5} i^2$?
$\prod_{i=1}^{5} i^2 = (\prod_{i=1}^{5} i)^2 = (5!)^2 = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)^2 = (120)^2 = 14400$

2.2. Čemu se rovná $\sum_{i \in J} i$, kde $J = \{2^n : n \in \mathbb{N}, 1 \le n \le 8\}$? Své rozhodnutí zdůvodněte!
$\sum_{i \in J} i = 2 + 4 + 8 + \cdots + 256$. Jde o součet prvních osmi členů geometrické posloupnosti, kde $a_1 = 2$ a $q = 2$. Proto $\sum_{i \in J} i = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 2\frac{1-2^8}{1-2} = -2 \cdot (-255) = 510$.

2.3. Platí rovnost $\sum_{i=1}^{n}(i-3) = \sum_{i=1}^{n} i - 3$? Pokud ne, upravte pravou stranu této rovnosti netriviálním způsobem tak, aby platila rovnost. Své rozhodnutí zdůvodněte!
Rovnost neplatí! $\sum_{i=1}^{n}(i-3) = (1-3) + (2-3) + \cdots + (n-3) = (1 + 2 + \cdots + n) - 3n = \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 3$.
Jiné řešení:
Ukážeme, že obecně rovnost neplatí.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(i-3) &= \sum_{i=1}^{n} i - 3 \\
\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 3 &= \sum_{i=1}^{n} i - 3 \\
-\sum_{i=1}^{n} 3 &= -3 \\
-3n &= -3 \\
n &= 1.
\end{aligned}$$

Rovnost nastává pouze pro $n = 1$. Jinak je potřeba rovnost upravit například následujícím způsobem $\sum_{i=1}^{n}(i-3) = \sum_{i=1}^{n} i - 3 - (n-1)3 = \sum_{i=1}^{n} i - 3n$.

2.4. Platí rovnost $\prod_{i=1}^{n}(i-1) = \prod_{i=1}^{n} i - 1$? Své rozhodnutí zdůvodněte!
Rovnost neplatí. První činitel součinu $\prod_{i=1}^{n}(i-1)$ je nula, proto $\prod_{i=1}^{n}(i-1) = 0$. Druhý součin upravíme $\prod_{i=1}^{n} i - 1 = n! - 1$, což se rovná nule pouze pro $n = 1$. Pro $n > 1$ je součin na pravé staně kladný, na levé nulový. Pro $n < 1$ jsou oba součiny prázdné, proto je levá strana rovna 1 a pravá nule.

2.5. Čemu je roven výraz $\sum_{i=1}^{n} j$?
$\sum_{i=1}^{n} j = j + j + \cdots + j = nj$.

2.6. Čemu je roven výraz $\prod_{i=1}^{n} a$?
$\prod_{i=1}^{n} a = a \cdot a \cdots a = a^n$.

2.7. Čemu se rovná $\sum_{i \in J} i$, kde $J = \{5n : n \in \mathbb{N},\ 1 \le n \le 6\}$? Zdůvodněte!
$\sum_{i \in J} i = 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30$. Jde o součet prvních šesti členů aritmetické posloupnosti, kde $a_1 = 5$ a $d = 5$. Proto $\sum_{i \in J} i = \frac{1}{2}6 \cdot (5 + 30) = 3 \cdot 35 = 105$.

2.8. Čemu je roven výraz $\sum_{i=1}^{n}(4i-1)$?
$\sum_{i=1}^{n}(4i-1) = 4\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 = 4 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n = 2n^2 + 2n - n = 2n^2 + n = n(2n+1)$.

2.9. Čemu je roven výraz $\prod_{i=1}^{n}(a+2)i$?
$\prod_{i=1}^{n}(a+2)i = \prod_{i=1}^{n}(a+2) \cdot \prod_{i=1}^{n} i = (a+2)^n \cdot n!$.