1 Aritmetická a geometrická posloupnost

1.1. Máme dánu posloupnost několika prvními členy. Ověřte, zda je aritmetická a určete její první člen a_1 a diferenci d.

(a) $-5, -1, 3, 7, 11, \dots$

(b) $2.1, 2.4, 2.7, 3.0, 3.3 \dots$

(c) $7, 7, 7, 7, 7, \dots$

(d) $1, 5, 9, 12, 16, \dots$

(a) $-5, -1, 3, 7, 11, \dots$ Ověříme, zda se jedná o aritmetickou posloupnost. Platí $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = 4$. První člen je $a_1 = -5$, diference je $d = 4$.

(b) $2.1, 2.4, 2.7, 3.0, 3.3 \dots$ Ověříme, zda se jedná o aritmetickou posloupnost. Platí $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = 0.3$. První člen je $a_1 = 2.1$, diference je $d = 0.3$.

(c) $7, 7, 7, 7, 7, \dots$ Ověříme, zda se jedná o aritmetickou posloupnost. Platí $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = 0$. První člen je $a_1 = 7$, diference je $d = 0$.

(d) $1, 5, 9, 12, 16, \dots$ Ověříme, zda se jedná o aritmetickou posloupnost. Platí $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_5 - a_4 = 4$, avšak $a_4 - a_3 = 3$. Nejedná se o aritmetickou posloupnost.

1.2. Máme dánu posloupnost několika prvními členy. Ověřte, zda je geometrická a určete její první člen a_1 a kvocient q.

(a) $-5, 10, -20, 40, -80, \dots$

(b) $6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8} \dots$

(c) $7, 7, 7, 7, 7, \dots$

(d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$

(a) $-5, 10, -20, 40, -80, \dots$ Ověříme, zda se jedná o geometrickou posloupnost. Platí $a_2/a_1 = a_3/a_2 = a_4/a_3 = a_5/a_4 = -2$. První člen je $a_1 = -5$, kvocient je $q = -2$.

(b) $6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8} \dots$ Ověříme, zda se jedná o geometrickou posloupnost. Platí $a_2/a_1 = a_3/a_2 = a_4/a_3 = a_5/a_4 = \frac{1}{2}$. První člen je $a_1 = 6$, kvocient je $q = \frac{1}{2}$.

(c) $7, 7, 7, 7, 7, \dots$ Ověříme, zda se jedná o geometrickou posloupnost. Platí $a_2/a_1 = a_3/a_2 = a_4/a_3 = a_5/a_4 = 1$. První člen je $a_1 = 7$, kvocient je $q = 1$.

(d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$ Ověříme, zda se jedná o geometrickou posloupnost. Platí $a_2/a_1 = \frac{2}{3}$, ale $a_3/a_2 = \frac{3}{4}$. Nejedná se o geometrickou posloupnost.

1.3. Určete první člen a diferenci následující aritmetické posloupnosti. Napište vztah pro n-tý člen.

(a) $5, 2, -1, -4, -7, \dots$

(b) $2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3, \frac{10}{3}, \dots$

(c) $\frac{1}{4}, 2, \frac{3}{4}, 3, \frac{4}{3}, \dots$

(a) $5, 2, -1, -4, -7, \dots$ Ověříme, zda se jedná o aritmetickou posloupnost. Platí $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = -3$. První člen je $a_1 = 5$, diference je $d = -3$. Vztah pro n-tý člen je $a_n = 5 - (n-1)3 = 8 - 3n$.

(b) $2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3, \frac{10}{3}, \dots$ Ověříme, zda se jedná o aritmetickou posloupnost. Platí $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = \frac{1}{3}$. První člen je $a_1 = 2$, diference je $d = \frac{1}{3}$. Vztah pro n-tý člen je $a_n = 2 + \frac{n-1}{3} = \frac{n+5}{3}$.

(c) $\frac{1}{4}, 2, \frac{3}{4}, 3, \frac{4}{3}, \dots$ Ověříme, zda se jedná o aritmetickou posloupnost. Platí $a_2 - a_1 = \frac{7}{4}$, ale $a_3 - a_2 = -\frac{5}{4}$. Nejedná se o aritmetickou posloupnost.

1.4. Rozhodněte, zda následující posloupnost je aritmetická či geometrická. Pokud ano, určete první člen a diferenci, respektive první člen a kvocient.

(a) $2, 0, -2, 0, 2, \dots$

(b) $15, 8, 1, -6, -13, \dots$

(c) $3, 3, 3, 3, 3, \dots$

(a) $2, 0, -2, 0, 2, \dots$ Ověříme, zda se jedná o aritmetickou posloupnost. Platí $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 2$, ale $a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = -2$. Nejedná se o aritmetickou posloupnost.

Ověříme, zda se jedná o geometrickou posloupnost. Platí $a_2/a_1 = 0$, ale $a_3/a_2 = -2/0$ není definované. Nejedná se o geometrickou posloupnost.

(b) $15, 8, 1, -6, -13, \dots$ Ověříme, zda se jedná o aritmetickou posloupnost. Platí $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = -7$. První člen je $a_1 = 15$, diference je $d = -7$.

Ověříme, zda se jedná o geometrickou posloupnost. Platí $a_2/a_1 = \frac{8}{15}$, ale $a_3/a_2 = \frac{1}{8}$. Nejedná se o geometrickou posloupnost.

(c) $3, 3, 3, 3, 3, \dots$ Ověříme, zda se jedná o aritmetickou posloupnost. Platí $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = 0$. První člen je $a_1 = 3$, diference je $d = 0$.

Ověříme, zda se jedná o geometrickou posloupnost. Platí $a_2/a_1 = a_3/a_2 = a_4/a_3 = a_5/a_4 = 1$. První člen je $a_1 = 3$, kvocient je $q = 1$.

1.5. Najděte aritmetickou posloupnost, pro kterou platí $a_3 = 0$, $a_5 = 7$. Najděte vztah pro n-tý člen této posloupnosti.

Platí $a_5 = a_3 + 2d$. Dosazením $a_3 = 0$, $a_5 = 7$ dostaneme

$$\begin{aligned} a_5 &= a_3 + 2d \\ 7 &= 0 + 2d \\ d &= \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Dále $a_3 = a_1 + 2d$, proto $a_1 = a_3 - 2d = 0 - 7 = -7$. Dostáváme vztah pro n-tý člen $a_n = a_1 + (n-1)d = -7 + (n-1)\frac{7}{2} = \frac{7n-21}{2}$.

1.6. Najděte geometrickou posloupnost, pro kterou platí $a_2 = 1$, $a_4 = 9$. Najděte vztah pro n-tý člen této posloupnosti.

Platí $a_4 = a_2 \cdot q^2$. Dosazením $a_2 = 1$, $a_4 = 9$ dostaneme

$$\begin{aligned} a_4 &= a_2 \cdot q^2 \\ 9 &= 1 \cdot q^2 \\ q &= \pm 3. \end{aligned}$$

Existují dvě různá řešení $q = 3$, $q = -3$. Dále $a_2 = a_1 \cdot q$, proto $a_1 = \frac{a_2}{q}$. Pro každé řešení dostáváme $a_1 = \frac{1}{3}$, respektive $a_1 = -\frac{1}{3}$ Dostáváme vztah pro n-tý člen $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot (3)^{n-1} = (3)^{n-2}$, respektive $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = -\frac{1}{3} \cdot (-3)^{n-1} = (-3)^{n-2}$.

1.7. Najděte geometrickou posloupnost, pro kterou platí $a_6 = 1$, $a_8 = -9$. Najděte vztah pro n-tý člen této posloupnosti.
Platí $a_8 = a_6 \cdot q^2$. Dosazením $a_6 = 1$, $a_8 = -9$ dostaneme

$$\begin{aligned} a_8 &= a_8 \cdot q^2 \\ -9 &= 1 \cdot q^2 \\ q &= \sqrt{-9}. \end{aligned}$$

Úloha nemá řešení, taková geometrická posloupnost neexistuje.

1.8. Najděte geometrickou posloupnost, pro kterou platí $a_3 = 2$, $a_6 = -16$. Najděte vztah pro n-tý člen této posloupnosti.
Platí $a_6 = a_3 \cdot q^3$. Dosazením $a_3 = 2$, $a_6 = -16$ dostaneme

$$\begin{aligned} a_6 &= a_3 \cdot q^3 \\ -16 &= 2 \cdot q^3 \\ q &= \sqrt[3]{-8} = -2. \end{aligned}$$

Dále $a_3 = a_1 \cdot q^2$, proto $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Dostáváme vztah pro n-tý člen $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot (-2)^{n-1} = -1 \cdot (-2)^{-1} \cdot (-2)^{n-1} = -(-2)^{n-2}$.