VŠB – TUO

Datum ____________

Diskrétní matematika

Projekt

číslo zadání ____

Příklad	Poznámky
1	
2	

Osobní číslo ____________

Jméno ____________

Abstrakt

V první části projektu se věnujeme hře s koláčky. Problém existence vítězné strategie pro prvního hráče vyřešíme dvěma způsoby. Jednak podáme popis vítězné strategie pro čtvercovou hrací síť $n \times n$ koláčků a jednak podáme existenční důkaz existence vítězné strategie pro obecnou obdélníkovou hrací síť $m \times n$ koláčků, kde m, n jsou kladná celá čísla.

V druhé části projektu máme vypočítat kolik oblastí vznikne uvnitř n-úhelníku, jestliže nakreslíme všechny úhlopříčky tab, aby se žádné tři neprotínaly v jednom bodě. Úlohy převedeme na rovinný graf a pro výpočet použijeme Eulerův vzorec.

1 Kombinatorika

Na stole leží n^2 koláčků uspořádaných do pravidelné sítě (n řad po n koláčcích), kde $n \geq 2$. Koláček v levém horním rohu je otrávený. Dva hráči střídavě jedí koláčky a ten, který sní otrávený koláček, prohrál. V každém tahu vezme hráč některý koláček a sní jej společně se všemi koláčky, které se nachází napravo a dolů od vybraného koláčku. Kdyby například vybral koláček v páté řadě a čtvrtém sloupci, tak sní celkem $(n-4)(n-3)$ koláčků. Ukažte, že hra není spravedlivá a první hráč může vždy vyhrát.

Řešení

První hráč má jednoduchou strategii: sní koláček v druhé řadě a druhém sloupci a spolu s ním celkem $(n-1)^2$ koláčků ze stolu.

Potom je na tahu druhý hráč. Pokud sní koláček vlevo nahoře, prohrál. Pokud sní jiný koláček, řekněme i-tý koláček v prvním sloupci, bude na tahu první hráč a „zopakuje“ jeho tah tak, že sní i-tý koláček v první řadě. Má tak zaručeno, že dokud bude jíst druhý hráč neotrávené koláčky, může i první hráč jíst neotrávené koláčky. Tento postup bude opakovat, dokud druhý hráč nesní otrávený koláček.

Jiné řešení

Není nutné najít vítěznou strategii, stačí ukázat, že taková strategie existuje. Podáme existenční důkaz vítězné strategie. Nejprve si všimneme, že hra nemůže skončit remízou. Některý hráč vždy vyhraje, protože v každém kole se sní alespoň jeden z celkového počtu mn koláčků.

Předpokládejme nejprve, že první hráč sní v prvním tahu jen jediný koláček v pravém dolním rohu. Nyní nastane jedna ze dvou možností. Buď se jednalo o první tah vítězné strategie a nebo druhý hráč nyní může udělat první tah vítězné strategie snědením koláčku s. Pokud se jedná o druhý případ, mohl první hráč sníst v prvním tahu koláčku s a pokračovat ve vítězné strategii.

Uvedený argument existence vítězné strategie platí nejen pro čtvercové hrací schéma $n \times n$ koláčků, ale pro obecné obdélníkové hrací schéma $m \times n$, kde m, n jsou kladná celá čísla. Tento důkaz je však pouze existenční, otázka nalezení konkrétní vítězné strategie tím zůstává nezodpovězena.

2 Teorie grafů

Máme dán konvexní n-úhelník a v něm všechny úhlopříčky. Žádné tři úhlopříčky se neprotínají v jednom bodě (uvnitř n-úhelníku). Vypočítejte počet oblastí uvnitř n-úhelníku, které takto vzniknou.
Návod: *Využijte Eulerův vzorec a další známá tvrzení z teorie grafů.*

Řešení

Využijeme Eulerovu větu o mapách

$$v - e + o = 2,$$

kde v je počet vrcholů, e je počet hran hran a o je počet oblastí.

Představme si, že v každém průsečíku dvou tětiv je vrchol. Potom můžeme počet vrcholů snadno spočítat: n jich je na obvodu n-úhelníku a za každou čtveřici bodů na obvodu kruhu započítáme jednu dvojici tětiv, které se protnou. Vrcholů je celkem n na obvodu a $\binom{n}{4}$ uvnitř n-úhelníku.

$$v = n + \binom{n}{4}.$$

Hrany grafu jsou části tětiv. Jejich počet snadno určíme z principu sudosti. Všechny vrcholy na obvodu jsou stupně $n-1$ a všechny ostatní vrcholy jsou jako průsečíky dvou tětiv stupně 4. Celkem máme

$$2e = 4\binom{n}{4} + n(n-1) \quad \Rightarrow \quad e = 2\binom{n}{4} + \frac{n(n-1)}{2} = 2\binom{n}{4} + \binom{n}{2}.$$

Dosadíme do Eulerova vzorce a vyjádříme počet oblastí. Dostaneme

$$\begin{aligned}
v - e + o &= 2\\
o &= e - v + 2\\
o &= 2\binom{n}{4} + \binom{n}{2} - \left(n + \binom{n}{4}\right) + 2\\
o &= \binom{n}{4} + \binom{n}{2} - \binom{n}{1} + 2\\
o &= \binom{n}{4} + \binom{n}{2} - n + 2.
\end{aligned}$$

Nás však nezajímá vnější oblast, proto je počet oblastí je o jedna menší:

$$o = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} - n + 1,$$

což lze zapsat jako

$$o = \underline{\underline{\binom{n}{4} + \binom{n-1}{2}}}.$$

Poznámka k hodnocení

Tento projekt „pro ty, kteří se chtějí něco naučit“ je ohodnocen $10+5 = 15$ bodů. V první příkladu nejenže je vyřešen zadaný problém, ale dokonce je uvedeno druhé obecné řešení pro obdélníkovou hrací síť. Proto vyučující využije možnost přidělení bonusových bodů.

Druhý příklad obsahuje správné a dobře okomentované řešení. Tento příklad je ohodnocen pěti body.