Diskrétní matematika 457 – 519/1 **Vzorová zkoušková písemka**

Přečtěte si pozorně zadání. U každého příkladu uveďte také postup výpočtu!

1. Trenér Brückner má k dispozici 3 brankáře, 7 záložníků, 6 obránců a 5 útočníků. Ví, že 2 záložníci mohou hrát také v útoku. Kolika způsoby může sestavit reprezentační fotbalové mužstvo pro zápas s USA, pokud chce hrát systém 4–4–2? (4 obránci, 4 záložníci, 2 útočníci) 10 b

Řešení

Označíme dva výjimečné záložníky jako X a Y. Řešení se rozpadne na čtyři případy

(i) Počet výběrů, kdy ani X ani Y nehrají v útoku. To znamená, že buď alespoň jeden z hráčů X, Y hraje v záloze nebo X, Y nehrají vůbec.

$$\binom{3}{1}\binom{7}{4}\binom{6}{4}\binom{5}{2} = 3 \cdot 35 \cdot 15 \cdot 10 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$$

(ii) Počet výběrů, kdy X i Y hrají v útoku.

$$\binom{3}{1}\binom{5}{4}\binom{6}{4} = 3 \cdot 5 \cdot 15 = 3^2 \cdot 5^2$$

(iii) Počet výběrů, kdy X nehraje v útoku, ale Y v útoku hraje.

$$\binom{3}{1}\binom{6}{4}\binom{6}{4}\binom{5}{1} = 3 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 5 = 3^3 \cdot 5^3$$

(iv) Počet výběrů, kdy Y nehraje v útoku, ale X v útoku hraje.
stejně jako (iii): $3^3 \cdot 5^3$.

Pokud chceme jednotlivé případy správně formulovat, musíme dávat pozor, aby byly disjunktní a jejich sjednocení pokrývalo všechny možné případy!

Dostaneme celkem

$$2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 + 3^2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = 3^2 \cdot 5^2(70 + 1 + 30) = 225 \cdot 101 = 2225 + +225 = 22725.$$

2. Kolik existuje různých prostých zobrazení tříprvkové množiny do sedmiprvkové množiny? 10 b

Řešení

Každé zobrazení můžeme popsat pomocí *uspořádané* trojice obrazů tří prvků. Protože má zobrazení být injektivní, bude se jednat o variace *bez opakování*.

$$V(7,3) = \binom{7}{3} \cdot 3! = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

3. Buď nakreslete graf s touto stupňovou posloupností nebo zdůvodněte proč takový graf neexistuje.

$$D = (5, 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$$

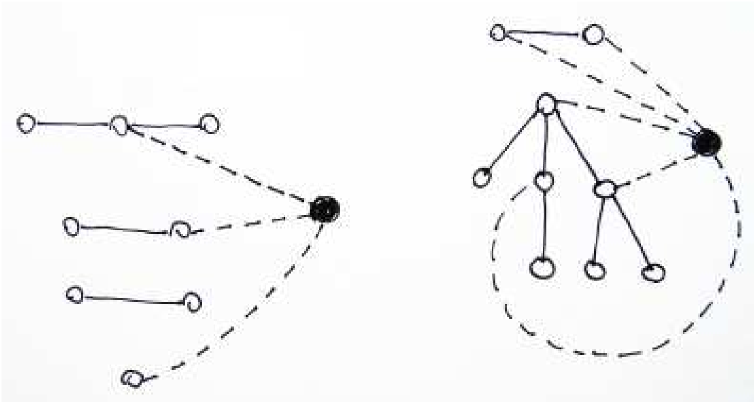
10 b

Řešení

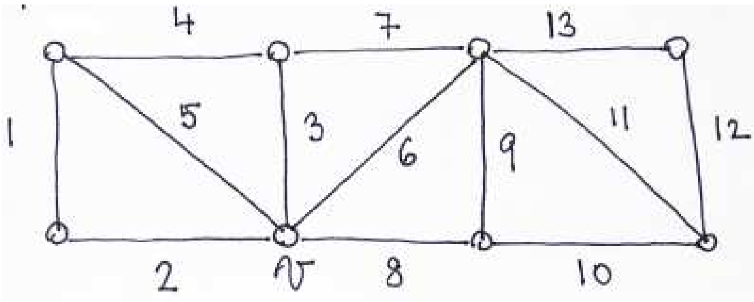
Užitím Havlovy-Hakimiho věty dostaneme

$$\begin{aligned}
&(5, 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1)\\
&(3, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)\\
&(2, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1)\\
&(2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0).
\end{aligned}$$

Graf se stupňovou posloupností $(2,1,1,1,1,1,1,0)$ snadno sestrojíme, proto graf se stupňovou posloupností D existuje. Potom postupným přidáním vrcholů stupně 3 a 5 sestavíme hledaný graf.



4. Popište stručně Kruskalův algoritmus a s jeho pomocí vyhledejte nejlevnější kostru v grafu G. 10 b



Řešení

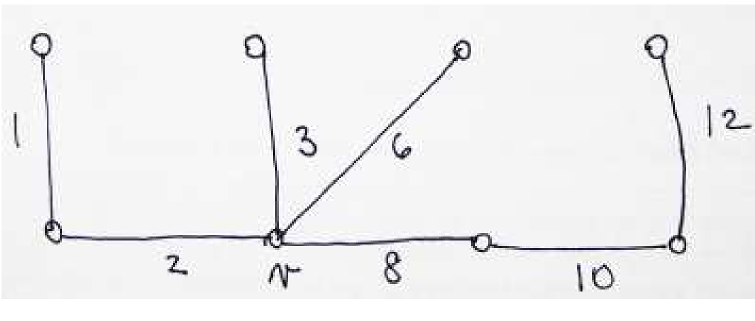
Označíme T_i les z i-tého kroku algoritmu.

$$V(T_0) = \{v\}, v \in V(G)$$

V každém kroku i ($i = 1, \dots, n-1$) nechť e_i je nejlevnější hrana mezi $V(T_{i-1})$ a $V(G) \setminus V(T_{i-1})$. Bude tedy $e_i = xy$, kde $x \in V(T_{i-1})$ a $y \in V(G) \setminus V(T_{i-1})$. Potom

$$V(T_i) = V(T_{i-1}) \cup \{y\} \qquad E(T_i) = E(T_{i-1}) \cup \{e_i\}.$$

V příkladu dostaneme kostru s váhou $w(T) = 42$.



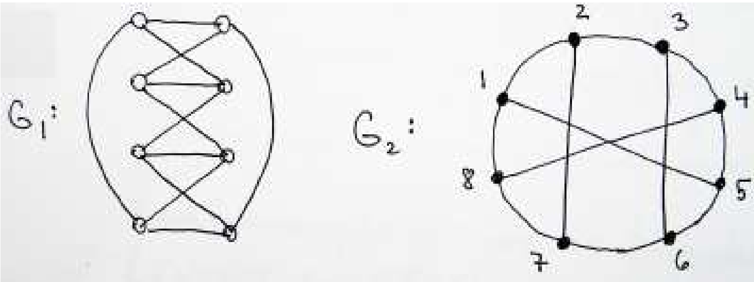
5. Dokažte, že graf G na n vrcholech s $\delta(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ je souvislý. 10 b

Řešení

Tvrzení ukážeme sporem.

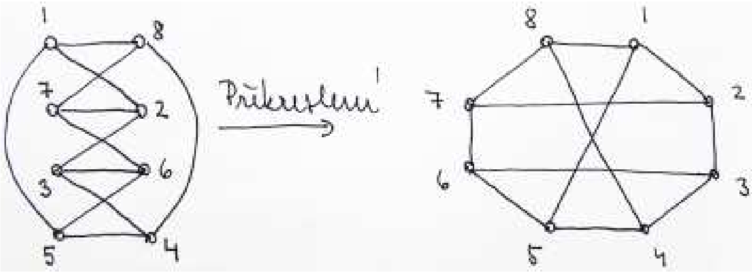
Předpokládejme, že graf G je nesouvislý. Pak ovšem G obsahuje alespoň 2 komponenty a nemůže se stát, že by dva sousední vrcholy byly v různých komponentách. Mezi komponentami našeho grafu však musí býti alespoň jedna, označme ji L, která obsahuje nejvýše $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vrcholů. (Pokud rozdělíme n prvkovou množinu na alespoň dvě disjunktní množiny, pak alespoň jedna bude míti nejvýše $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ prvků.) Potom libovolný vrchol $v \in V(L)$ z této komponenty může míti nejvýše $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ sousedů, a tedy jeho stupeň může býti nejvýše $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$. Což je spor s předpokladem $\delta(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

6. Potvrďte nebo vyvraťte, že $G_1 \cong G_2$. Své rozhodnutí pečlivě zdůvodněte. 10 b



Řešení

Najdeme isomorfismus (bijekci) f (viz obrázek). Předpis bijekce $f : V(G_1) \to V(G_2)$ je $f(i) = i$, kde na levé straně dosazujeme vrcholy grafu G_1 a na pravé straně jsou vrcholy G_2.



7. Dokažte, že každý rovinný graf bez trojúhelníků lze dobře vrcholově obarvit čtyřmi barvami. 10 b

Řešení

Ukážeme indukcí vzhledem k počtu vrcholů.

Pro $|V(G)| = 1$ je tvrzení zřejmé.

Mějme graf na n vrcholech a předpokládejme, že pro každý rovinný graf bez trojúhelníků na $n-1$ vrcholech tvrzení platí. Nechť graf $G(V, E)$ bez trojúhelníků je rovinný. Potom existuje $v \in V$ takový, že $\deg v \leq 3$ (probraná věta).

Vytvoříme graf $G' = G - v$ na $n-1$ vrcholech. Graf G' samozřejmě také neobsahuje trojúhelník a je rovinný. Podle předpokladu G' lze dobře obarvit čtyřmi barvami. Protože v má nejvýše tři sousedy v $V(G')$, zbývá vždy alespoň jedna barva na jeho obarvení. Tedy G lze obarvit čtyřmi barvami.