DISKRÉTNÍ MATEMATIKA
a
ÚVOD DO TEORIE GRAFŮ

Řešené příklady k procvičení

Petr Kovář

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Úvodem

Tento text je koncipován jako pomůcka pro výuku i studium diskrétní matematiky a teorie grafů. Text je rozdělen do několika tématických okruhů, které odpovídají členění témat v předmětu Diskrétní matematika. Najdete zde jednak motivační příklady, při jejichž řešení se využijí postupy a metody diskrétní matematiky a jednak typové příklady, které mají studenta připravit na řešení klasických úloh. Do textu jsou zahrnuta i témata z oblastí, která jsou zařazena do osnov předmětu až od roku 2019.

Na webu `homel.vsb.cz/~kov16/predmety.php` je navíc k dispozici celá řada interaktivních ukázek a dále na webu `dim.vsb.cz` jsou pak typové úlohy k dispozici v multimediální formě tzv. „pencastů“.

Chtěl bych poděkovat studentům a později kolegům Pavle Kabelíkové a Tomáši Kupkovi, kteří pomáhali s přípravou některých příkladů a také Michalu Kubesovi, ktery pozorně prošel část řešených příkladů. Poděkování patří i dalším studentům a kolegům: Martinu Čermákovi, Oldřichu Vlachovi, Tereze Kovářové, Adamu Silberovi, Lukáši Rapantovi, Mateji Krbečkovi a Jirkovi Fialovi, kteří odhalili celou řadu chyb a překlepů.

Řešené a neřešené příklady

Pro studenty jsou připraveny soubory dva. Jeden obsahuje pouze zadání příkladů a žádné výsledky, druhý soubor pak obsahuje u většiny příkladů postup řešení, nebo alespoň číselný výsledek pro kontrolu. Při studiu doporučujeme řešit především příklady ze souboru bez řešení a teprve vlastní postupy a výsledky srovnat s druhým souborem. Pro přehlednost je číslování příkladů v obou souborech totožné.

K použitým symbolům

Příklady označené „*“ patří k náročnějším. Jejich řešení obvykle vyžaduje delší výpočet nebo pečlivější rozbor. Při řešení příkladů označených „**“ je třeba nějaký nápad nebo výsledek z jiné oblasti matematiky. Zdůrazněme ale, že hvězička neznamená nutně „to nikdy nevyřeším“.

Naproti tomu příklady označené „$^\heartsuit$“ jsou tak lehké, že jejich řešení je možné zpaměti jen s užitím základních pojmů.

V Ostravě 29. října 2020.

Obsah

Motivační příklady

V této části uvedeme několik typických příkladů, které se během semestru naučíme řešit. Ukazují, čím se diskrétní matematika odlišuje od disciplin, se kterými se studenti už během studia setkali: od matematické analýzy, algebry a geometrie. Všimněte si, že pro řešení příkladů v této sekci sice používáme počty a digramy, avšak nikoliv metody algebry, ani analýzy ani geometrie. Příklady tak vymezují diskrétní matematiku vůči klasickým disciplínám.

0.0.1. Devět kamarádů si na Vánoce dalo dárky. Každý dal dárky třem svým kamarádům. Ukažte, že není možné, aby každý dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal.

Situaci si znázorníme grafem. Vrcholy grafu budou kamarádi, máme tedy celkem 9 vrcholů. Hrana bude mezi těmi dvěma vrcholy (kamarády), kteří si navzájem dali dárky.

Pokud by řešení existovalo, tak bychom měli pravidelný graf stupně 3 na 9-ti vrcholech, což není možné. Platí že součet stupňů vrcholů grafu $G(V,E)$ je roven dvojnásobku počtu hran:

$$\sum_{v\in V(G)} \deg(v) = 2|E(G)|$$

a součet stupňů je tedy *sudé* číslo, neboť každá hrana přispívá do celkového součtu jedničkou za každý koncový vrchol. Avšak v našem grafu by bylo

$$\sum_{v\in V(G)} \deg(v) = \sum_{v\in V(G)} 3 = 9\cdot 3 = 27.$$

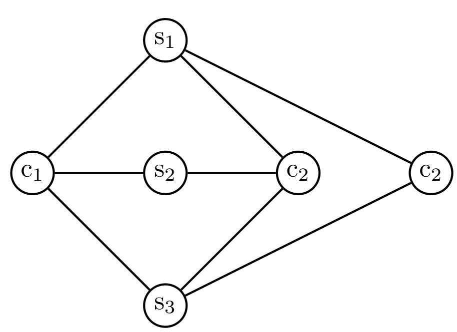
Jiné řešení:

Pokud nechceme využít pojmů teorie grafů, tak stačí si uvědomit, že vzájemné posílání dárků znamená vytváření dvojic. Dárků je celkem $9\cdot 3 = 27$. V každé dvojici si přátelé vymění dva dárky. Dojde proto vždy k výměně *sudého* počtu dárků. Předat 27 dárků není možné.

Vytvoříme-li 13 dvojic, předá se $2\cdot 13 = 26$ dárků. Vytvoříme-li 14 dvojic, předá se $2\cdot 14 = 28$ dárků.

0.0.2. „Tři domy a tři studny." Podle pověsti žily v Temném hvozdu tři čarodejnice. Každá bydlela ve své vlastní sluji a každá potřebovala k provozování své živnosti vodu ze tří studánek: s živou vodou, s mrtvou vodou a s pitnou vodou. Jenomže cestou ke studánkám se čarodejnice nesmí potkat, ani zkřížit vyšlapanou cestičku jiné čarodejnice. Jak mohla vypadat mapa lesa se slujemi, studnami a cestičkami? Pokud řešení neexistuje, pečlivě zdůvodněte.

Libovolně si nakreslíme v rovině tři studny, označíme si body s_1, s_2 a s_3. Nakreslíme sluj čarodejnice $\check{c}_1$ a spojíme cestičkami se všemi studnami. Podobně přidáme sluj čarodejnice $\check{c}_2$, viz obrázek 0.1. Nyní máme roviny rozdělenou na tři oblasti.



Obrázek 0.1: *Tři domy a tři studny.*

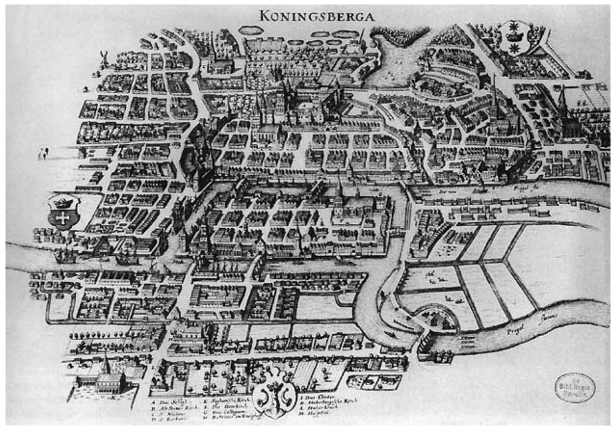
Do něketé z nich přidáme sluj $\check{c}_3$. Nyní

- pokud přidáme sluj do oblasti ohraničené $\check{c}_1$, s_3, $\check{c}_2$, s_1, nelze bez křížení vést pěšinku ke studánce s_2 (viz obrázek 0.1)
- pokud přidáme sluj do oblasti ohraničené $\check{c}_1$, s_2, $\check{c}_2$, s_1, nelze bez křížení vést pěšinku ke studánce s_3
- pokud přidáme sluj do oblasti ohraničené $\check{c}_1$, s_2, $\check{c}_2$, s_3, nelze bez křížení vést pěšinku ke studánce s_1

Jiné řešení:
Ukážeme, že graf $K_{3,3}$ není planární. Víme, že planární graf bez trojúhelníků má nejvýše $2n-4$ hran (odvozeno z Eulerova vztahu). Protože $K_{3,3}$ je bipartitní, tak neobsahuje trojúhelníky a pokud by byl planární, tak má nejvýše $2 \cdot 6 - 4 = 8$ hran. Avšak $K_{3,3}$ má 9 hran a proto není planární.

Další podrobnosti viz přednášky a skripta.

0.0.3. „Sedm mostů města Královce“ Městem Královec (nyní Kaliningrad na území Ruska) teče řeka Pregola, která vytváří dva ostrovy. V 18. století byly ostrovy spojeny s oběma břehy i navzájem celkem sedmi mosty. Otázka zní, zda je možné všechny mosty přejít tak, aby ten, kdo se o to pokouší, vstoupil na každý most pouze jednou.



Obrázek 0.2: *Sedm mostů města Královce v 18.století.*

Ukážeme, že graf, jehož vrcholy jsou ostrovy a břehy a jehož hrany jsou mosty, není možno nakreslit jedním tahem, graf není Eulerovský. Řešení úlohy proto neexistuje.

0.0.4. „Dokonalý kompresní algoritmus“ Najděte alespoň jeden příklad dokonalého bezztrátového kompresního a dekompresního algoritmu, (máte najít dva algoritmy):

1. postup, jak z libovolné posloupnosti bajtů $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sestavit kratší posloupnost $c_1, c_2, \ldots, c_m$, kde $m < n$, a současně
2. postup, jak z posloupnosti $c_1, c_2, \ldots, c_m$ sestavit zpět posloupnost $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Pokud takový algoritmus neexistuje, pečlivě zdůvodněte.
Označíme B množinu všech libovolných n-prvkových posloupností $b_1, b_2, \ldots, b_n$ a C množinu všech zkompresovaných m-prvkových posloupností $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Hledáme alespoň jednu bijekci mezi množinami B a C.

Avšak obě množiny jsou konečné. Víme, že $|B| = 256^n$ a $|C| \leq 256^m$. Pokud by hledaný algoritmus měl exsitovat, musí být

$$|C| \geq |B| \quad \Rightarrow \quad 256^m \geq |C| \geq 256^n \quad \Rightarrow \quad m \geq n.$$

To však podle zadání není možné a proto hledný algoritmus neexistuje.

0.0.5. „Lámání čokolády“ Tabulka čokolády se skládá z $m \times n$ čtverečků. Chceme ji nalámat na jednotlivé čtverečky. Najděte (a dokažte) jaký je *nejmenší* počet zlomů, abychom čokoládu $m \times n$ rozdělili na jednotlivé čtverečky?
Pro tabulku čokolády 1×2 stačí jediný zlom. Pro tabulku o třech čtverečcích je potřeba právě dva zlomy. Ukážeme, že pro tabulku čokolády o rozměru $m \times n$ stačí právě $m \cdot n - 1$ zlomů. Tvrzení dokážeme *silnou* matematickou indukcí vzhledem k počtu čtverečků $m \cdot n$.

Jako základ indukce vezmeme tvrzení, že tabulku čokolády 1×1 umíme rozdělit pomocí 0 zlomů. Je zřejmé, že vztah $1 \cdot 1 - 1 = 0$ platí.

Nyní indukčním předpokladem *silné* indukce je tvrzení, že *každou* tabulku čokolády s počtem k a méně čtverečků ($k \geq 1$) a umíme rozdělit pomocí maximálně $k-1$ zlomů. Ukážeme, že tvrzení platí i pro čokoládu s $k+1$ čtverečky. Jediným zlomem rozdělíme tabulku o $k+1$ čtverečcích na dvě menší části. Protože $k \geq 1$, tak to je vždy možné. Počet dílků v obou částech označíme k_1 a k_2. (Platí $k_1+k_2 = k$.) Každá z částí splňuje indukční předpoklad a tak je umíme rozdělit pomocí $k_1 - 1$ resp. $k_2 - 1$ zlomů na jednotlivé čtverečky. Celkem je potřeba

$$(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + 1 = k_1 + k_2 - 1 = k - 1$$

zlomů. Z principu silné matematické indukce plyne platnost tvrzení pro libovolné $k \geq 1$.

Pro rozdělení čokolády o rozměru $m \times n$ stačí vždy právě $mn - 1$ zlomů.

Jiné řešení:

Stačí si všimnout, že na začátku máme jedinou část=celek (tabulka čokolády). Při *každém* dělení se z jedné části stanou dvě menší části. Při prvním dělení vzniknou vzniknou dvě části, při druhém celkem tři části, atd. Při n-tém dělení bude $n + 1$ částí.

Jakmile budou všechny části rozděleny na čtverečky, budeme mít $m \cdot n$ čtverečků po $m \cdot n - 1$ děleních. Celkem bude potřeba $mn - 1$ dělení=zlomů.

0.0.6. „Handshaking problem“ Máme skupinu n lidí ($n \geq 2$) z nichž někteří si podali ruce. Ukažte, že ve skupině jsou alespoň dva lidé, kteří podali ruku stejnému počtu lidí ve skupině.

Každý z n lidí mohl podat ruku nejvýše $n-1$ krát a nejméně 0 krát. To je celkem n možných různých počtů. Avšak nemůže se současně stát, že pokud někdo podá ruku všem $n - 1$ ostatním a někdo jiný si nepodá ruku s nikým. Proto máme nejvýše $n - 1$ různých počtů podání rukou mezi n lidmi. Podle Dirichletova principu musí alespoň dva lidé podat ruku stejnému počtu lidí ve skupině.

0.0.7. „Krabice“ Mějme n krabic poskládaných do jednoho vysokého sloupce. Nyní máme za úkol tento sloupec rozložit na menší hromádky, přičemž za každé rozložení sloupce o výšce $a + b$ na dva menší sloupce o výškách a, b dostáváme $a \cdot b$ bodů. Postup končí, jakmile žádné dvě krabice neleží na sobě. Cílem je zvolit takový postup rozkládání sloupců krabic, aby součet bodů za všechny kroky by co největší.

Ukážeme, že celkový počet získaných bodů je vždy $\binom{n}{2} = n(n - 1)/2$ bez ohledu na postup rozkládání. Tvrzení ukážeme silnou indukcí.

Základ indukce: Pro sloupec jediné krabice je počet bodů za rozložení 0, což odpovídá vztahu $n(n-1)/2 = 0$ pro $n = 1$. Pro hromádku dvou krabic je počet bodů za rozložení 1, což odpovídá vztahu $n(n - 1)/2 = 2$ pro $n = 2$.

Indukční krok: Mějme n krabic, kde $n \geq 2$ a předpokládejme, že pro všechny menší počty k krabic, kde $1 \leq k < n$ ve sloupci je získaný počet bodů $\binom{k}{2} = k(k-1)/2$. Nyní rozdělíme sloupec n krabic na dva menší sloupce o výšce k a $n - k$. Dostaneme $k(n - k)$ bodů a k tomu přičtemepodle indukčního předpokladu $\binom{k}{2}$ bodů za rozložení sloupce k krabic a $\binom{n-k}{2}$ bodů za rozložení sloupce $n - k$ krabic. Celkem dostaneme

$$k(n-k) + \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} = k(n-k) + k(k-1)/2 + (n-k)(n-k-1)/2 =$$

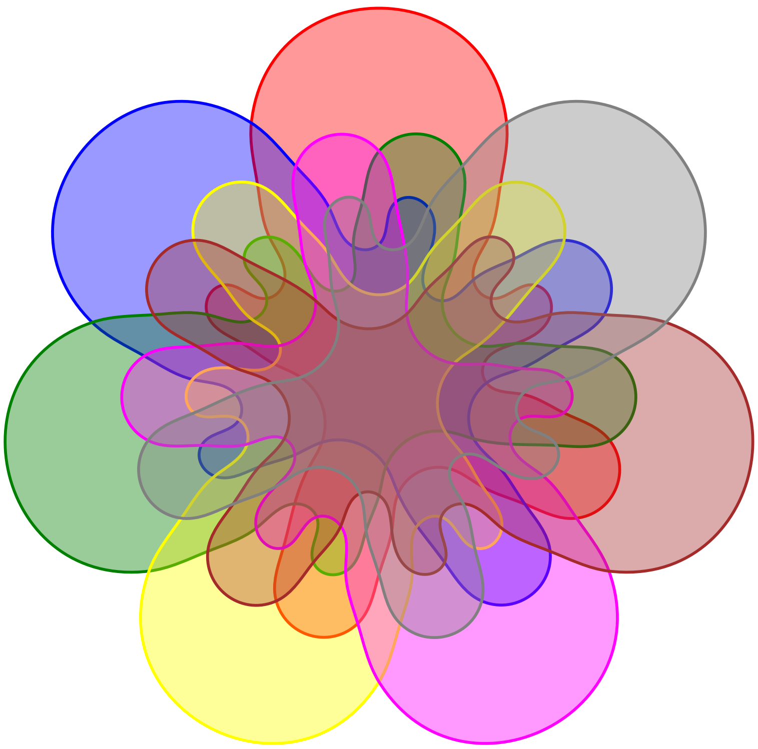
$$= nk - k^2 + (k^2 - k + n^2 - 2nk + k^2 - n + k)/2 = nk - k^2 + k^2 - nk + (n^2 - n)/2 =$$

$$= n(n-1)/2 = \binom{n}{2}$$

Podle principu matematické indukce je počet získaných bodů roven $\binom{n}{2}$ pro všechna $n \geq 1$.

Část I

Základy diskrétní matematiky



Kolik různých oblastí na obrázku najdete?

1 Posloupnosti, sumy a produkty, zaokrouhlování

Nejprve připomeneme, že známý vztah pro součet prvních n kladných celých čísel je

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1). \qquad (1)$$

Podrobněji si o základních kombinatorických pojmech přečtete v úvodní kapitole skript [ZDM].

1.1 Posloupnosti

1.1.1. Najděte vztah pro n-tý člen následujících posloupností.

a) $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$

Všimneme si, že posloupnost je geometrická, neboť podíl každých dvou po sobě následujících členů je $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = 2$. První člen je $a_1 = 3$. Dostáváme $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

b) $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

Nejedná se o geometrickou ani aritmetickou posloupnost. Můžeme však n-tý člen zapsat například $a_n = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{2}$.

c) $0, 1, 3, 7, 15, 31, \ldots$

Všimneme-li si, že každé číslo je o 1 menší než mocnina dvojky, tak ihned dostaneme $a_n = 2^{n-1} - 1$.

1.1.2. Na účet je vložena částka 50 000 č. Částka bude každoročně úrokována dvěma procenty. Kolik bude na účtu za n let?

Částka po n letech odpovídá n-tému členu geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 1 + 0.02 = 1.02$. Dostáváme $a_n = 50\,000 \cdot 1.02^n$.

1.1.3. Na účet je vložena částka 50 000 č. Částka bude úrokována úrokem dvě procenta ročně. Úroky jsou však připisovány každý měsíc. Kolik bude na účtu za n měsíců?

Částka po n měsících odpovídá n-tému členu geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 1 + \frac{0.02}{12} = \frac{601}{600}$. Dostáváme $a_n = 50\,000 \cdot \left(\frac{601}{600}\right)^n$.

1.2 Sumy a produkty

1.2.1. Vypočtěte $\sum_{i=-3}^{4} \frac{3+i}{2}$.

Pro přehlednost si sumu rozepíšeme, což zkušenější počtář dělat nemusí.

$$\sum_{i=-3}^{4} \frac{3+i}{2} \quad = \quad 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2} + \frac{7}{2}$$

Dále postupujeme substitucí $j = i + 3$.

$$\sum_{i=-3}^{4} \frac{3+i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=-3}^{4} (3+i) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{7} j$$

S využitím vztahu (1) dostaneme

$$\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{7} j = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2}(1+7) = 14.$$

1.2.2. Najděte obecný vztah pro součet prvních k lichých čísel.

Sestavíme a vypočítáme sumu

$$\sum_{i=1}^{k} (2i-1) = 2\sum_{i=1}^{k} i - \sum_{i=1}^{k} 1 = 2 \cdot \frac{k}{2}(k+1) - k = k^2 + k - k = k^2.$$

1.2.3. Najděte obecný vztah pro součet prvních k sudých kladných čísel.
Sestavíme a vypočítáme sumu

$$\sum_{i=1}^{k}(2i) = 2\sum_{i=1}^{k} i = 2 \cdot \frac{k}{2}(k+1) = k(k+1).$$

1.2.4. Najděte obecný vztah pro součin prvních k přirozených čísel.
Sestavíme a vypočítáme produkt

$$\prod_{i=1}^{k} i = 1 \cdot 2 \cdots k = k!.$$

1.2.5. Najděte obecný vztah pro součin prvních k sudých kladných čísel.
Sestavíme a vypočítáme sumu

$$\prod_{i=1}^{k}(2i) = 2^k \prod_{i=1}^{k} i = 2^k \cdot k!.$$

1.2.6. Zapište a zjednodušte součet $12 + \frac{12}{100} + \frac{12}{10000} + \frac{12}{10000} + \cdots$
Jedná e o součet nekonečné geometrické posloupnosti s prvním členem 12 a kvocientem $\frac{1}{100}$. Víme, že součet nekonečné geometrické posloupnosti s prvním členem a a kvocientem q je $\frac{12}{1-q}$. Dosazením do vztahu dostaneme

$$12 + \frac{12}{100} + \frac{12}{10000} + \frac{12}{10000} + \cdots = \frac{12}{1-\frac{1}{100}} = \frac{12}{\frac{99}{100}} = \frac{1200}{99} = \frac{400}{33}.$$

1.2.7. Ukažte, že aritmetický průměr libovolného sudého počtu po sobě jdoucích čísel není celé číslo.
Sestavíme a vypočítáme aritmetický průměr $2k$ po sobě jdoucích čísel $a, a+1, \ldots, a+2k-1$.

$$\frac{\sum_{i=1}^{2k}(a+i-1)}{2k} = \frac{2ka - 2k + \sum_{i=1}^{2k} i}{2k} = \frac{2ka - 2k + \frac{1}{2}2k(2k+1)}{2k} =$$

$$= \frac{2k\left(a - 1 + \frac{1}{2}(2k+1)\right)}{2k} = a - 1 + \frac{1}{2}(2k+1) = a - 1 + k + \frac{1}{2}.$$

1.2.8. Mějme čtyři libovolná reálná čísla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Sestavte předpis posloupnosti a_n pro $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$, $a_4 = d$
Lze využít například Lagrangeův interpolační polynom v bodech $[1,a]$, $[2,b]$, $[3,c]$, $[4,d]$. Dostaneme

$$a_n = a\cdot\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + b\cdot\frac{(n-1)(n-3)(n-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + c\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + d\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

1.3 Aritmetická posloupnost

1.3.1. Zjistěte, zda daná posloupnost je aritmetická, nebo ne.

a) $33, 36, 39, 42, 45, \ldots$

Ověříme $a_2 - a_1 = 36 - 33 = 3$, a také $a_3 - a_2 = 39 - 36 = 3$, $a_4 - a_3 = 42 - 39 = 3$, $a_5 - a_4 = 45 - 42 = 3$. Protože $a_n - a_{n-1} = 3$ a protože předpokládáme, že podle tohoto schématu posloupnost pokračuje dále, tak se jedná o aritmetickou posloupnost

b) $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

Ověříme $a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$, ale $a_3 - a_2 = 4 - 2 = 2 \neq 1$. Nemusíme dále ověřovat, máme různé rozdíly dvou po sobě jdoucích členů, nejedná se o aritmetickou posloupnost.

c) $7, 7, 7, 7, 7, \ldots$

Ověříme $a_2 - a_1 = 7 - 7 = 0$ a stejně $a_n - a_{n-1} = 7 - 7 = 0$. Konstantní posloupnost je aritmetická posloupnost s diferencí 0.

d) $7, -7, 7, -7, 7, -7, \ldots$

Ověříme $a_2 - a_1 = 7 - (-7) = 14$, ale $a_3 - a_2 = -7 - 7 = -14 \neq 14$. Nemusíme dále ověřovat, máme různé rozdíly dvou po sobě jdoucích členů, nejedná se o aritmetickou posloupnost.

1.3.2. Rozhodněte, zda posloupnost daná vztahem pro n-tý člen je aritmetická, nebo ne.

a) $a_n = \frac{n}{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Vypočítáme diferenci dvou po sobě následujících členů.

$$a_n - a_{n-1} = \frac{n}{n-1} - \frac{n-1}{n-2} = \frac{n(n-2) - (n-1)^2}{(n-1)(n-2)} = \frac{n^2 - 2n - n^2 + 2n - 1}{(n-1)(n-2)} = \frac{1}{(n-1)(n-2)}.$$

Protože rozdíl $a_n - a_{n-1}$ není konstantní (závisí na hodnotě n), tak uvedená posloupnost není aritmetická.

b) $a_n = \frac{n+1}{2}$ pro $n \in \mathbb{N}$

Vypočítáme diferenci dvou po sobě následujících členů.

$$a_n - a_{n-1} = \frac{n+1}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n+1-n}{2} = \frac{1}{2}.$$

Protože rozdíl $a_n - a_{n-1}$ je konstantní (nezávisí na hodnotě n), tak uvedená posloupnost je aritmetická.

c) $a_n = \frac{2}{n+1}$ pro $n \in \mathbb{N}$

Vypočítáme diferenci dvou po sobě následujících členů.

$$a_n - a_{n-1} = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = \frac{2n - 2(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)}.$$

Protože rozdíl $a_n - a_{n-1}$ není konstantní (závisí na hodnotě n), tak uvedená posloupnost není aritmetická.

d) $a_n = 3 + 4n$ pro $n \in \mathbb{N}$

Vypočítáme diferenci dvou po sobě následujících členů.

$$a_n - a_{n-1} = 3 + 4n - (3 + 4(n-1)) = 4.$$

Protože rozdíl $a_n - a_{n-1}$ je konstantní (nezávisí na hodnotě n), tak uvedená posloupnost je aritmetická.

1.3.3. Najděte vztah pro n-tý člen následujících aritmetických posloupností.

a) $4, 7, 10, 13, 16, \ldots$

Snadno nahlédneme, že uvedená posloupnost je aritmetická posloupnost s prvním členem $a_1 = 7$ a diferencí $d = 3$. Proto

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 4 + (n-1)3 = 3n + 1$$

pro $n \in \mathbb{N}$.

b) $1, 0, -1, -2, -3, -4, \ldots$

Ihned vidíme, že se jedná o aritmetickou posloupnost s prvním členem $a_1 = 1$ a diferencí $d = -1$. Proto

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)(-1) = 2 - n$$

pro $n \in \mathbb{N}$.

c) $1, 0, -1, -2, -3, -4$

Postupujeme stejně jako u předchozího příkladu, avšak posloupnost je konečná a platí $a_n = 2 - n$ pro $n \in [1, 6]$.

1.3.4. U dané aritmetické posloupnosti určete její první člen, její diferenci a vztah pro n-tý člen, víte-li

a) $a_2 = 4$, $a_4 = -2$.

Protože $a_4 = a_2 + 2d$, tak dosazením určíme diferenci.

$$\begin{aligned} a_4 &= a_2 + 2d \\ -2 &= 4 + 2d \\ 2d &= -6 \\ d &= -3 \end{aligned}$$

A protože $a_2 = a_1 + d$, tak dosazením určíme a_1.

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ 4 &= a_1 - 3 \\ a_1 &= 4 + 3 = 7. \end{aligned}$$

Daná posloupnost má první člen $a_1 = 7$, diferenci $d = -3$ a vztah pro n-tý člen $a_n = a_1 + (n-1)d = 7 - (n-1)3 = 10 - 3n$.

b) $a_1 + a_3 = 4$ a součet prvních pěti členů je $s_5 = -5$.

Protože $s_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = 5a_1 + 10d = -5$. Podobně $a_1 + a_3 = a_1 + (a_1 + 2d) = 2a_1 + 2d = 4$. Dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 5a_1 + 10d &= -5 \\ 2a_1 + 2d &= 4 \end{aligned}$$

Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 + 2d &= -1 \\ a_1 + d &= 2 \end{aligned}$$

Odečtením obou rovnice dostaneme $d = -3$ a dosazením do druhé rovnice pak $a_1 = 5$. Vztah pro n-tý člen je $a_n = a_1 + (n-1)d = 5 - (n-1)3 = 8 - 3n$.

1.3.5. Najděte takovou aritmetickou posloupnost (a_n), že $a_1 + a_6 = 24$, $a_4 + a_5 = 12$.
Pro n-tý člen aritmetické posloupnosti platí $a_n = a_1 + (n-1)d$, kde a_1 je první člen a d je diference. Rovnice ze zadání přepíšeme jako soustavu.

$$a1 + (a_1 + 5d) = 24 \wedge (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d)$$

Proto

$$2a_1 + 5d = 24 \wedge 2a_1 + 7d = 12.$$

Odečtením obou rovnic dostaneme $2d = -12$ a proto $d = -6$. Dosazením do první rovnice vypočítáme $2a_1 - 30 = 24$, proto $a_1 = 27$. Hledaná posloupnost je dána vztahem pro n-tý člen $a_n = 27 - 6(n-1) = 33 - 6n$.

1.3.6. Určete součet prvních deseti členů aritmetické posloupnosti, víte-li

a) $a_2 = 4$, $d = 2.5$.

Protože $a_1 = a_2 - d = 4 - 2.5 = 1.5$, tak dosazením do vztahu pro součet $s_n = n(2a_1 + (n-1)d)/2$ určíme hledaný součet.

$$\begin{aligned} s_n &= n(2a_1 + (n-1)d)/2 \\ s_{10} &= 10(3 + 9 \cdot 2.5)/2 \\ s_{10} &= 5 \cdot 22.5 \\ s_{10} &= 112.5 \end{aligned}$$

b) $a_1 + a_3 = 24$ a $s_5 = 35$.

Protože $s_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = 5a_1 + 10d = 35$. Podobně $a_1 + a_3 = a_1 + (a_1 + 2d) = 2a_1 + 2d = 24$. Dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 5a_1 + 10d &= 35 \\ 2a_1 + 2d &= 24 \end{aligned}$$

Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 + 2d &= 7 \\ a_1 + d &= 12 \end{aligned}$$

Odečtením obou rovnice dostaneme $d = -5$ a dosazením do druhé rovnice pak $a_1 = 17$. Součet prvních deseti členů pak je

$$\begin{aligned} s_n &= n(2a_1 + (n-1)d)/2 \\ s_{10} &= 10(34 + 9 \cdot (-5))/2 \\ s_{10} &= 5(34 - 45) \\ s_{10} &= -55. \end{aligned}$$

1.3.7. Dokažte, že pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$ jsou čísla $c_1 = (a-b)^2$, $c_2 = a^2 + b^2$, $c_3(a+b)^2$ tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

Porovnáme rozdíl $c_2 - c_1$ a s rozdílem $c_3 - c_2$.

$$c_2 - c_1 = a^2 - b^2 - (a-b)^2 = a^2 - b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 2ab.$$

$$c_3 - c_2 = (a+b)^2 - (a^2 - b^2) = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2 = 2ab.$$

Protože jsou rozdíly stejné, jsou čísla c_1, c_2 a c_3 tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

1.4 Geometrická posloupnost

1.4.1. Zjistěte, zda daná posloupnost je geometrická, nebo ne.

a) $33, 36, 39, 42, 45, \ldots$

Ověříme $a_2/a_1 = 36/33 = 12/11$, ale $a_3/a_2 = 39/36 = 13/12 \neq 12/11$. Nemusíme dále ověřovat, máme různé podíly dvou po sobě jdoucích členů, nejedná se o geometrickou posloupnost.

b) $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

Ověříme $a_2/a_1 = 2/1 = 2$, a také $a_3/a_2 = 4/2 = 2$, $a_4/a_3 = 8/4 = 4$, $a_5/a_4 = 16/8 = 2$. Protože $a_n/a_{n-1} = 2$ a protože předpokládáme, že podle tohoto schématu posloupnost pokračuje dále, tak se jedná o geometrickou posloupnost s kvocientem 2.

c) $7, 7, 7, 7, 7, \dots$

Ověříme $a_2/a_1 = 7/7 = 1$ a stejně $a_n/a_{n-1} = 7/7 = 1$. Konstantní posloupnost je geometrická posloupnost s kvocientem 1.

d) $7, -7, 7, -7, 7, -7, \dots$

Ověříme $a_2/a_1 = (-7)/7 = -1$ a také $a_3/a_2 = 7/(-7) = -1$, $a_4/a_3 = (-7)/7 = -1$, $a_5/a_4 = 7/(-7) = -1$. Protože $a_n/a_{n-1} = -1$ a protože předpokládáme, že podle tohoto schématu posloupnost pokračuje dále, tak se jedná o geometrickou posloupnost s kvocientem -1.

1.4.2. Rozhodněte, zda posloupnost daná vztahem pro n-tý člen je geometrická, nebo ne.

a) $a_n = \frac{n}{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Vypočítáme podíl dvou po sobě následujících členů.

$$a_n/a_{n-1} = \frac{n}{n-1} : \frac{n-1}{n-2} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-2}{n-1} = \frac{n(n-2)}{(n-1)^2}.$$

Protože podíl a_n/a_{n-1} není konstantní (závisí na hodnotě n), tak uvedená posloupnost není geometrická.

b) $a_n = \frac{1}{3^n}$ pro $n \in \mathbb{N}$

Vypočítáme podíl dvou po sobě následujících členů.

$$a_n/a_{n-1} = \frac{1}{3^n} : \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{3^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3}.$$

Protože podíl $a_n - a_{n-1}$ je konstantní (nezávisí na hodnotě n), tak uvedená posloupnost je geometrická.

1.4.3. Najděte vztah pro n-tý člen následujících geometrických posloupností.

a) $3, 6, 12, 24, 48, \dots$

Snadno nahlédneme, že uvedená posloupnost je geometrická posloupnost s prvním členem $a_1 = 3$ a kvocientem $q = 2$. Proto

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$$

pro $n \in \mathbb{N}$.

b) $2, -\sqrt{2}, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \dots$

Všimneme si, že podíl dvou po sobě následujících členů je vždy $a_2/a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} = a_3/a_2 = a_4/a_3 = a_5/a_4$ a předpokládáme, že posloupnost pokračuje stejným způsobem. Platí $a_1 = 2$, $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Proto

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}.$$

pro $n \in \mathbb{N}$.

c) $500, 50, 5, \frac{1}{2}, \frac{1}{20}, \dots$

Snadno nahlédneme, že uvedená posloupnost je geometrická posloupnost s prvním členem $a_1 = 500$ a kvocientem $q = \frac{1}{10}$. Proto $a_n = 500 \cdot \frac{1}{10^{n-1}} = \frac{5000}{10^n}$

d) $54, 18, 6, 2$

Postupujeme stejně jako u předchozích příkladů, avšak posloupnost je konečná a platí $a_n = \frac{54}{3^{n-1}} = \frac{162}{3^n}$ pro $n \in [1, 4]$.

1.4.4. U dané geometrické posloupnosti určete její první člen, její kvocient a vztah pro n-tý člen, víte-li

a) $a_1 \cdot a_3 = -9$, $a_2 \cdot a_4 = 9$

Z první rovnice víme, že $a_1 \cdot a_1 \cdot q^2 = -9$ a z druhé rovnice dostaneme že $a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^3 = 9$. Odtud dostaneme dvě rovnice

$$\begin{aligned} a_1^2 \cdot q^2 &= -9 \\ a_1^2 \cdot q^4 &= 9 \end{aligned}$$

Vydělením druhé rovnice první rovnicí ihned pro $a_1 \neq 0$ dostáváme $q^2 = -1$. Taková rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel, proto hledaná geometrická posloupnost neexistuje.

b) $a_1 \cdot a_3 = 9$, $a_2 \cdot a_5 = -9$

Z první rovnice víme, že $a_1 \cdot a_1 \cdot q^2 = 9$ a z druhé rovnice dostaneme že $a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^4 = -9$. Odtud dostaneme dvě rovnice

$$\begin{aligned} a_1^2 \cdot q^2 &= 9 \\ a_1^2 \cdot q^5 &= -9 \end{aligned}$$

Vydělením druhé rovnice první rovnicí ihned pro $a_1 \neq 0$ dostáváme $q^3 = -1$. Případ $a_1 = 0$ nemá řešení. V oboru reálných čísel máme jediné řešení $q = -1$ a dosazením do první (nebo druhé) rovnice dostaneme $a_1^2 = 9$. Pro první člen posloupnosti proto existuje dvě přípustná řešení $a_1 = \pm 3$.

1.4.5. Horkovzdušný balón vystoupá za minutu po startu 25 metrů vysoko. Za každou další minutu vystoupá 75 % výšky, kterou vystoupal za předchozí minutu. Jak dlouho potrvá balónu, než bude alespoň 110 metrů vysoko?

Dle zadání víme, že úseky, které balón za každou minutu vystoupá, tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $q = \frac{3}{4}$ a prvním členem 25 m. Jednotky ve výpočtu nebudeme uvádět. Můžeme využít vztah pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

a řešit nerovnici, kdy $s_n \geq 110$. Dostaneme

$$110 \leq 25 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\frac{3}{4} - 1} = 25 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{-\frac{1}{4}} = -4 \cdot 25 \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1\right),$$

odkud

$$\begin{aligned} \frac{110}{100} - 1 &\leq -\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ \frac{10}{100} &\leq -\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ -\frac{10}{100} &\geq \left(\frac{3}{4}\right)^n. \end{aligned}$$

Rovnice nemá žádné řešení, protože kladného čísla mocnina nemůže být záporná. Poto balón tak vysoko nikdy nevystoupá.

1.4.6. Vypočtěte součet prvních čtyř členů posloupnosti $\left(\frac{2^{n+1}}{5^{n-3}}\right)$.

Jedná se o geometrickou posloupnost, neboť podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ je konstantní.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+2}}{5^{n-2}}}{\frac{2^{n+1}}{5^{n-3}}} = \frac{2^{n+2}}{5^{n-2}} \cdot \frac{5^{n-3}}{2^{n+1}} = \frac{2}{5}.$$

Kvocient je $q = \frac{2}{5}$ a první člen je $a_1 = \frac{2^2}{5^{-2}} = 4 \cdot 25 = 100$. Podle vztahu $s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ dostaneme

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = 100 \cdot \frac{1 - \frac{2^4}{5^4}}{1 - \frac{2}{5}} = 100 \cdot \frac{\frac{5^4-2^4}{5^4}}{\frac{3}{5}} = 2^2 \cdot 5^2 \cdot \frac{5^4 - 2^4}{5^4} \cdot \frac{5}{3} = 2^2 \cdot \frac{5^4 - 2^4}{3 \cdot 5} =$$

$$= 2^2 \cdot \frac{625 - 16}{3 \cdot 5} = \frac{2^2 \cdot 609}{3 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 203}{5} = \frac{812}{5}.$$

1.4.7. Dokažte, že pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$, pro která $a + b \neq 0$, $a - b \neq 0$, jsou čísla $c_1 = (a-b)^2$, $c_2 = \frac{a-b}{a+b}$, $c_3 = \frac{1}{(a+b)^2}$ tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.

Porovnáme podíl $\frac{c_2}{c_1}$ a s podílem $\frac{c_3}{c_2}$. Protože jsou podíly stejné, jsou čísla c_1, c_2 a c_3 tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.

1.4.8. Odvoďte vztah pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti s prvním členem a_1 a kvocientem q.

Lze postupovat přímo. Označíme si součet prvních n členů jako S_n.

$$S_n = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

Vynásobíme rovnici q.

$$S_n q = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

Obě rovnice odečteme, na pravé straně se téměř všechny členy odečtou.

$$S_n - S_n q = a_1 + a_1 q^n$$

Odtud vyjádříme S_n.

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} \qquad S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$$

1.4.9. Dokažte nebo vyvraťte: každá aritmetická posloupnost s alespoň třemi členy, která je současně geometrická, je konstantní.

Ukážeme, že tvrzení platí. Označme některé tři po sobě jdoucí členy a_1, a_2, a_3. Protože posloupnost je aritmetická, platí $a_2 - a_1 = d$, $a_3 - a_2 = d$, a proto porovnáním, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, což dává $2a_2 = a_1 + a_3$. Podobně, protože posloupnost je geometrická, platí $a_2/a_1 = q$, $a_3/a_2 = q$, a proto porovnáním $a_2/a_1 = a_3/a_2$, což dává $a_2^2 = a_1 a_3$.

Nyní protože $4a_2^2 = (a_1 + a_3)^2$ a současně $4a_2^2 = 4a_1 a_3$, tak porovnáním dostaneme $(a_1 - a_3)^2 = 0$. To znamená, že $a_1 = a_3$ a $a_2 = (a_1 + a_3)/2 = a_1$.

Dostáváme, že $a_1 = a_2 = a_3$, a proto je taková posloupnost konstantní.

1.4.10. Dokažte nebo vyvraťte: každá konstantní posloupnost s alespoň třemi členy je současně aritmetická posloupnost i geometrická posloupnost.

Mějme konstantní posloupnost $(a_i)_{i=1}^n = a$, tedy $a, a, a, \ldots, a$, případně nekonečná konstantní posloupnost $(a_i)_{i=1}^\infty = a$, tedy $a, a, a, \ldots$. Ukážeme, že posloupnost je aritmetická, neboť pro každé i, $1 < i \leq n$ platí $a_n - a_{n-1} = a - a = 0$. Diference je $d = 0$, a protože nezávisí na n, jedná se o aritmetickou posloupnost.

1.4.11. Najděte nekonečně mnoho posloupností, které nejsou konstantní a jsou aritmetické i geometrické současně.

Podle Cvičení 9 je každá posloupnost s alespoň třemi členy, která je aritmetická i geometrická současně, konstantní. Dále prázdnou i jednoprvkovou posloupnost lze za konstantní považovat triviálně. Avšak také každá (nekonstantní) dvouprvková posloupnost a_1, a_2 je aritmetická (neboť $a_2 - a_1 = d$ je jediný rozdíl) i geometrická (neboť $a_2/a_1 = q$ je jediný podíl).

1.5 Funkce horní a dolní celé části

1.5.1. Upravte na celočíselný zlomek $31,2\overline{71}$.
Označíme si $a = 31,2\overline{71}$. Protože se za desetinou čárkou opakují číslice 71, vynásobíme číslo a číslem 100, dostaneme $100a = 3127,1\overline{71}$. Nyní odečteme čísla tak, aby se periodický rozvoj odečetl. Dostaneme

$$\begin{aligned} 100a - a &= 3127,1\overline{71} - 31,2\overline{71} \\ 99a &= 3095,9 \\ 990a &= 30959 \\ a &= \frac{30959}{990}. \end{aligned}$$

Proto $31,2\overline{71} = \frac{30959}{990}$.

1.5.2.* Zapište funkci $\lfloor\rfloor$ pomocí $\lceil\rceil$. $[\lfloor x\rfloor = -\lceil -x\rceil]$

1.5.3.* Zapište funkci $\lceil\rceil$ pomocí $\lfloor\rfloor$. $[\lceil x\rceil = -\lfloor -x\rfloor]$

1.5.4. Upravte na celočíselný zlomek $1,\overline{23}$. $\left[\frac{122}{99}\right]$

1.5.5.* Ukažte, že $\lfloor 1.\overline{9}\rfloor = 2$ [úpravou na celočíselný zlomek]

1.5.6.* Ukažte, že $\lceil 1.\overline{9}\rceil = 2$ [úpravou na celočíselný zlomek]

1.5.7. Ukažte, že $\lceil\lceil x\rceil\rceil = \lceil x\rceil$ [$\lceil x\rceil$ je celé číslo]

1.5.8. Jak vyjádříte klasické zaokrouhlení pomocí $\lfloor\rfloor$? $[\lfloor x + 0.5\rfloor]$

1.5.9.* Jak vyjádříte klasické zaokrouhlení pomocí $\lceil\rceil$? $[-\lceil -0.5 - x\rceil]$

1.5.10. Nakreslete graf funkcí $\lfloor\sin x\rfloor$, $\lceil\cos x\rceil$ a $\lfloor\tan x\rfloor$.

1.5.11. Kolik prvků má $2^{\{1,2,3,4\}}$? Rozepište.
Dostaneme 16 prvků,

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\},$$
$$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$$

Ověření: $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$.

1.6 Příklady k procvičení

1.6.1. Vypočítejte následující sumy nebo produkty.

a) Vypočtěte $\sum_{i=2}^{5} \frac{1}{2j}$. $\left[\frac{2}{j}\right]$

b) Vypočtěte $\sum_{j=2}^{5} \frac{1}{2j}$. $\left[\frac{77}{120}\right]$

c) Vypočtěte $\sum_{i=1}^{4} i^3$. $[100]$

d) Vypočtěte $\prod_{i=0}^{n} \frac{i}{i+1}$. $[0]$

e) Vypočtěte $\prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}$. $\left[\frac{1}{n+1}\right]$

1.6.2. Najděte vztah pro n-tý člen následujících posloupností

a) $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$.

$$a_n = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

b) $0, 1, 3, 7, 16, 31, \ldots$.

Všimneme si, že se jedná o hodnoty o jedničku menší než mocnina dvojky, proto

$$a_n = 2^{n-1} - 1$$

1.6.3. Existuje taková posloupnost $(a_i)_{i=1}^n$, že $\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{i=1}^n (-a_i)$? Pokud ano, uveďte příklad!
Stačí vzít takovou posloupnost, jejíž součet je záporné číslo.

1.6.4. Existuje taková posloupnost $(a_i)_{i=1}^n$, že $\sum_{i=1}^n a_i > 0$ a $\prod_{i=1}^n a_i < 0$? Pokud ano, uveďte příklad!
Stačí vzít takovou posloupnost s kladným součtem, která obsahuje lichý počet záporných čísel.

1.6.5. Existuje taková posloupnost *kladných* čísel $(a_i)_{i=1}^n$, že $\sum_{i=1}^n a_i > \prod_{i=1}^n a_i$? Pokud ano, uveďte příklad!
Stačí vzít posloupnost, která obsahuje jen členy $0 < a_i < 1$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$.

1.6.6.♡ Zapište funkci součet prvků množiny $A = \{18, 25, 31, 67, 202, 301, 356\}$ pomocí sumy. $\left[\sum_{i\in A} i = \sum_{i\in\{18,25,31,67,202,301,356\}} i\right]$

1.6.7. Do čtverce o straně 1 je vepsán čtverec, jehož vrcholy jsou středy stran původního čtverce, do tohoto vepsaného čtverce je opět stejným způsobem vepsán další čtverec, ... Jaký je obsah desátého čtverce?
Všimneme si, že pokud a_i udává obsah nějakého čtverce v posloupnosti čtverců, tak obsah a_{n+1} je poloviční Proto $a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

1.6.8.♡ Vypočítejte

a) $\lfloor 2.7 \rfloor$. $[2]$

b) $\lfloor -2.7 \rfloor$. $[-3]$

c) $\lfloor \frac{22}{10} \rfloor$. $[2]$

d) $\lfloor -\frac{22}{10} \rfloor$. $[-3]$

e) $\lfloor -\pi \rfloor$. $[-4]$

f) $\lfloor -e \rfloor$. $[-3]$

g) $P = \lfloor \frac{n+1}{n} \rfloor$, pro $n \in \mathbb{N}$ [pro $n = 0$ nemá smysl, pro $n = 1$ vyjde $P = 2$, jinak $P = 1$]

1.6.9. Dělové koule si dělostřelci stavěli do pyramid.

a) Pyramida buď měla čtvercovou základnu např. 4×4 koule, na ní dali vrstvu 3×3 koule, pak 2×2 koule a na vrchol 1 kouli. Tato pyramida měla celkem 30 koulí. Kolik celkem koulí by měla pyramida o základně $n \times n$ koulí?

V i-té vrstvě (počítáno shora) je i^2 koulí. Hledáme součet $\sum_{i=1}^n i^2$. Jedná se o známý kombinatorický vztah (viz cvičení na straně **??**). Výsledek je $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

b) Pyramida mohla mít založenou podstavu ve tvaru rovnoramenného trojúhelníku z 15 koulí, na ní byla další vrstva 10 koulí, další vrstva měla 6 koulí, pak 3 koule a na vrcholu byla 1 koule. Celkem měla taková pyramida 35 koulí. Kolik celkem koulí by měla pyramida o základně s hranou z n koulí?

V i-té vrstvě (počítáno shora) je $\sum_{j=1}^i j = \frac{1}{2}i(i+1)$ koulí. Hledáme součet $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}i(i+1)$. Při řešení opět využijeme známý kombinatorický vztah $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ (viz cvičení na straně **??**).

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}i(i+1) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (i^2+i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{4}n(n+1) =$$
$$= \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1) + \frac{3}{12}n(n+1) = \frac{1}{12}n(n+1)(2n+4) = \frac{2}{12}n(n+1)(n+2) =$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

Výsledek je $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}i(i+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) = \binom{n+2}{3}$.

1.6.10. Strany pravoúhlého trojúhelníka tvoří geometrickou posloupnost. Jaký je kvocient této poslopnosti?
Označme postupně délky strany trojúhelníka a, b, c, přičemž c je délka přepony. Platí $b = aq$, $c = aq^2$ Protože trojúhelník je pravoúhlý, platí $a^2 + b^2 = c^2$. Dosazením dostaneme pro $a \neq 0$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ a^2 + a^2q^2 &= a^2q^4 \\ 1 + q^2 &= q^4 \\ q^4 - q^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Substitucí $t = q^2$ dostaneme kvadratickou rovnici $t^2 - t - 1 = 0$, jejíž kořeny snadno určíme. Diskriminant je $D = (-1)^2 + 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$ a $t_{1,2} = \frac{+1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Protože $t = q^2$ je nezáporné, tak záporný kořen nepřipadá v úvahu. Dosazením a řešením dostaneme $q = \pm\sqrt{t} = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. Všechny délky stran jsou kladné, proto záporný kvocient nepřipadá v úvahu, proto hledaný kvocient je $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

2 Výběry prvků s opakováním i bez opakování prvků

Podrobněji si o základních o kombinatorických výběrech přečtete ve skriptech [ZDM].

2.1 Výběry bez opakování

2.1.1.$^\heartsuit$ Pro jaké hodnoty n a k je více k-prvkových podmnožin z n prvkové množiny než $(n-k)$-prvkových podmnožin?
Protože pro všechna $k \le n \in \mathbb{N}$ platí $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, tak je počet obou typů podmnožin vždy stejný.

2.1.2. Pro jaké hodnoty n a k je více k-prvkových variací z n prvkové množiny než $(n-k)$-prvkových variací?
Počet k-prvkových variací z n prvkové množiny je $\frac{n!}{(n-k)!}$. Počet $(n-k)$-prvkových variací z n prvkové množiny je $\frac{n!}{k!}$. Odtud porovnáním

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-k)!} &> \frac{n!}{k!} \\ \frac{1}{(n-k)!} &> \frac{1}{k!} \\ k! &> (n-k)! \\ k &> n-k \\ 2k &> n \\ k &> \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

2.1.3. Vyjádřete bez kombinačních čísel $\binom{3n}{3}$.
kombinační číslo rozepíšeme podle definice a zjednodušíme.

$$\binom{3n}{3} = \frac{3n \cdot (3n-1) \cdot (3n-2)}{6} = \frac{1}{2} n(3n-1)(3n-2)$$

Protože vybíráme trojice, výsledkem je polynom třetího stupně v proměnné n.

2.1.4. Tenisový turnaj se hraje systémem každý s každým. Kolik se bude hrát zápasů, jestliže

a) se turnaje zúčastní 8 hráčů?
   Jedná se o neuspořádané výběry dvojic: $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 4 \cdot 7 = 28$.

b) se turnaje zúčastní 21 hráčů? [210]

2.1.5. Máme prázdnou množinu $\emptyset$.

a) Kolika způsoby můžeme seřadit prvky $\emptyset$ do posloupnosti? [1]

b) Kolika způsoby můžeme vybrat $\emptyset$ z nějaké množiny? [1]

c) Jak by se tyto počty změnily, kdyby $0! \neq 1$?
   Otázka je trochu zavádějící. Počet výběrů se nezmění. Nebylo by ale možno použít vztah $n!$ pro počet pořadí n prvkové množiny v případě, že $n = 0$. Podobně výpočet $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{1}{0!} = 1$ dává správný výsledek 1 jen proto, že $0! = 1$.

2.1.6. Tenisového turnaje se účastní 8 hráčů. Kolik je různých pořadí na stupních vítězů?
Jedná se o uspořádané tříprvkové výběry (variace) z osmi prvků.

$$V(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

2.1.7. Upravte a porovnejte $\binom{6n}{3}$ a $\binom{3n}{6}$.
Oba výrazy mají smysl pouze pro $n \geq 2$. Rozepíšeme

$$\binom{6n}{3} = \frac{6n \cdot (6n-1) \cdot (6n-2)}{6} = n(6n-1)(6n-2)$$

$$\binom{3n}{6} = \frac{3n \cdot (3n-1) \cdot (3n-2) \cdot (3n-3) \cdot (3n-4) \cdot (3n-5)}{6!}$$

Je zřejmé, že pro velká n poroste $\binom{3n}{6}$ rychleji, neboť se jedná o polynom vyššího stupně. Pro $n = 2, 3, 4$ je však větší $\binom{6n}{3}$.

2.1.8.♡ Kolik způsoby se může postavit pět artistů na sebe? [$P(5) = 5! = 120$]

2.1.9. Kolika způsoby je možné napsat číslo k jako součet n sčítanců 1 a 2? (počet sčítanců n je pěvně dán) Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.
Ze zadání plyne, že $\lceil \frac{k}{2} \rceil \leq n \leq k$ (neboli $n \leq k \leq 2n$), jinak by úloha neměla řešení. Hledáme počet celočíselných řešení rovnice

$$k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

kde $1 \leq x_i \leq 2$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Představíme si číslo k je součet jedniček. do každé z n proměnných $x_1, \ldots, x_n$ přiřadíme jednu jedničku a zbývajících $k - n$ jedniček rozdělíme do *různých* proměnných jako do různých přihrádek. Výběr přihrádek je neuspořádaný, bez možnosti opakování (jinak by sčítance mohly být i větší než 2. Hledaný počet možností pak je

$$C(n, k-n) = \binom{n}{k-n}.$$

2.1.10. Máme n lidí. Jak velké skupinky vybírat, aby byl počet možností co největší?
Podíváme se na kombinační číslo udávající počet k-prvkových výběrů z n prvků.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pro různá k je čitatel stejný a ve jmenovateli je vždy je n součinitelů. Aby byl zlomek co největší, musí být jmenovatel co nejmenší. Volíme proto k tak, aby se čísla k a $n-k$ co nejméně lišila, tj. hledám $k = n - k$ a odtud dostaneme $k = \frac{n}{2}$. Největší počet možností bude $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

2.1.11. Ukažte několika způsoby, že $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
Algebraický důkaz:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-n+k)!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

Jiné řešení:
Kombinatorický důkaz (metodou dvojího počítání): Podle definice je počet k-prvkových kombinací n-prvkové množiny roven $\binom{n}{k}$. Jiným způsobem můžeme k-prvkovou podmnožinu vybrat tak, že z n-prvkové množiny odstraníme $n-k$ prvků. Proto pro počet podmnožin platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

2.1.12. Ukažte několika způsoby, že $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
Algebraický důkaz:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n! \cdot (k+1) + n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot ((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

□

Kombinatorický důkaz (metodou dvojího počítání). Jednak je počet $(k+1)$-prvkových kombinací $(n+1)$-prvkové množiny roven kombinačnímu číslu $\binom{n+1}{k+1}$.

Nyní mezi $n+1$ prvky označme jeden významný prvek q. Každou $(k+1)$-prvkovou podmnožinu vybrat tak, že buď prvek q vybereme a k němu přidáme k prvků z n zbývajících prvků, nebo prvek q nevybereme a pak vybíráme $k+1$ prvků z n zbývajících prvků. Celkem máme $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ možností. Protože jsme dvěma způsoby počítali stejný výběr ($k+1$ prvků z $(n+1)$-prvkové množiny), máme

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

2.1.13.* Hokejový trenér má k dispozici 13 útočníků a 9 obránců. Kolika způsoby vybereme pětku (2 obránce + 3 útočníci), jestliže jeden konkrétní útočník může hrát i v obraně?

Rozdělíme si všechny možnosti podle toho, zda univerzální hráč X hraje v útoku, obraně nebo zda nehraje. Výběry útočníků a obránců jsou nezávislé

- X hraje v útoku (vybereme zbývající dva útočníky)

$$\binom{12}{2} \cdot \binom{9}{2} = 66 \cdot 36 = 2376.$$

- X hraje v obraně

$$\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{1} = 220 \cdot 9 = 1980.$$

- X nehraje

$$\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{2} = 220 \cdot 36 = 7920.$$

Celkem dostaneme

$$7920 + 1980 + 2376 = 12276 \text{ možností.}$$

2.1.14. Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá z deseti číslic vyskytuje nejvýše jednou. Kolik z nich je menších než 50 000?

$V(9,1) \cdot V(9,4) = 9 \cdot 3024 = 27\,216$, $V(4,1) \cdot V(9,4) = 4 \cdot 3024 = 12\,096$.

2.1.15. Na konferenci vystoupí šest přednášejících: A, B, C, D, E, F. Určete počet

a) všech možných pořadí jejich vystoupení;

   $P(6) = 6! = 720$

b) všech pořadí, v nichž vystoupí A po E;

   $P(6)/2 = \frac{6!}{2} = 360$

c) všech pořadí, v nichž vystoupí A ihned po E.

   $P(5) = 5! = 120$

2.1.16. Kolika způsoby můžeme n lidí posadit

a) do řady

   Jedná se o seřazení všech prvků n-prvkové množiny, proto se jedná o permutaci $P(n) = n!$.

b) do řady, v níž je člověk A na kraji; $[2(n-1)!]$

c) do řady tak, aby lidé A a B neseděli vedle sebe;

Podíváme se na AB jako na jednoho člověka (dvě různá pořadí AB a BA!)

$$P(n) - 2P(n-1) = n! - 2(n-1)! = n \cdot (n-1)! - 2(n-1)! = (n-2) \cdot (n-1)!$$

d) kolem kulatého stolu (dvě rozesazení považujeme za různá, pokud se alespoň jednomu člověku změní soused po pravé či levé ruce). $[(n-1)!]$

2.1.17. Kolika způsoby můžeme ze sedmi mužů a čtyř žen vybrat šestičlennou skupinu, tak aby v ní byly

a) právě dvě ženy;

$$\binom{7}{4} \cdot \binom{4}{2} = 35 \cdot 6 = 210$$

b) alespoň dvě ženy;

$$\binom{7}{4} \cdot \binom{4}{2} + \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{3} + \binom{7}{2} \cdot \binom{4}{4} = 35 \cdot 6 + 35 + \cdots + 4 + 21 \cdot 1 = 371$$

c) nejvýše dvě ženy;

$$\binom{7}{4} \cdot \binom{4}{2} + \binom{7}{5} \cdot \binom{4}{1} + \binom{7}{6} = 35 \cdot 6 + 21 + \cdots + 4 + 7 = 301$$

2.1.18. Vlajka má být sestavena ze tří různobarevných vodorovných pruhů. K dispozici jsou látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté.

a) Kolik různých vlajek můžeme sestavit? [60]

b) Kolik z nich má modrý pruh? [36]

c) Kolik jich má modrý pruh uprostřed? [12]

d) Kolik jich nemá uprostřed červený pruh? [48]

2.2 Výběry s opakováním

2.2.1. Kolika způsoby můžeme postavit šest artistů do pyramidy 3 + 2 + 1? Rozlišujeme pouze kdo stojí na zemi, kdo v první vrstvě a kdo nahoře, ale už nerozlišujeme, komu stojí další řada na levém a komu na pravém rameni. $\left[P^*(3,2,1) = \frac{720}{6 \cdot 2} = 60\right]$

2.2.2. Kolik existuje anagramů slova MISSISSIPPI?

Slovo MISSISSIPPI obsahuje 4I, 4S, 2P, 1M. Jedná se o permutace s opakováním

$$P^*(4,4,2,1) = \frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} = 34650.$$

2.2.3. Kolik existuje anagramů slova MISSISSIPPI, které neobsahují IIII?

Slovo MISSISSIPPI obsahuje 4I, 4S, 2P, 1M. Od počtu všech anagramů odečteme ty, které obsahují všechna čtyři za sebou. Představíme si IIII jako jediné písmeno $\mathcal{I}$. Takových anagramů je $P^*(4,2,1,1)$. Celkem dostaneme

$$P^*(4,4,2,1) - P^*(4,2,1,1) = \frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} - \frac{8!}{4! \cdot 2!} = 34650 - 840 = 33810.$$

2.2.4. Kolik existuje anagramů slova MISSISSIPPI, které neobsahují II?
Slovo MISSISSIPPI obsahuje 4I, 4S, 2P, 1M. Každý anagram musí obsahovat čtyři písmena I, která jsou oddělena jiným písmenem. Místa pro tato písmena si znázorníme mezerou.

I_I_I_I

Poloha zbývajících čtyř mezer ($7 - 3 = 4$) je libovolná, každé se může nacházet na libovolném z 3+2=5 míst (i na začátku a na konci). Vybíráme (s opakováním) čtyřikrát z pěti možností, kam dát písmena různá od I. Počet možností vypočítáme užitím kombinací s opakováním

$$C^*(5,4) = \binom{4+5-1}{5-1} = \binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70.$$

Na sedmi volných místech mohou být písmena rozmístěna libovolně. Jedná se o permutace s opakováním

$$P^*(4,2,1) = \frac{7!}{4! \cdot 2! \cdot 1!} = 105.$$

Celkem dostaneme

$$C^*(5,4) \cdot P^*(4,2,1) = 70 \cdot 105 = 7350 \text{ možností.}$$

2.2.5. Na patnáct stožárů v řadě budou pověšeny vlajky pěti zemí, každá třikrát. Kolik existuje možností?
Jedná se o permutace s opakováním

$$P^*(3,3,3,3,3) = \frac{15!}{(3!)^5} = 168168000.$$

2.3 Příklady k procvičení

2.3.1. Vypočítejte, kolika způsoby lze na klasické šachovnici (8×8 polí) vybrat

a) trojici libovolných políček,

   Jedná se o neuspořádaný výběr (nezáleží na pořadí, v jakém políčka vybereme) tří políček z 64. $C(64,3) = \binom{64}{3} = \frac{64 \cdot 63 \cdot 62}{6} = 32 \cdot 21 \cdot 62 = 41\,664$.

b) trojici políček tak, že žádné dvě neleží v témže sloupci,

   Nejprve vybereme tři sloupce z osmi. Jedná se o neuspořádaný výběr $C(8,3)$, protože nezáleží který sloupec vybereme nejdřív a který později.

   Potom, podle principu nezávislých výběrů, v každém sloupci vybereme jedno políčko. Bude se jednat o upořádaný výběr s opakováním tří políček z osmi, protože v každém sloupci můžeme vybrat libovolné z osmi políček. $C(8,3) \cdot V^*(8,3) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot 8^3 = 28\,672$.

   Stejný výsledek bychom dostali, pokud bychom nejprve vybrali tři řady.

c) trojici políček tak, že žádné dvě neleží v témže sloupci ani v téže řadě,

   Opět nejprve vybereme tři sloupce z osmi, což je celkem $C(8,3)$ možností.

   Potom, opět podle principu nezávislých výběrů, v každém sloupci vybereme jedno políčko. Bude se jedna o upořádaný výběr bez opakování tří políček z osmi, protože v každé řadě můžeme vybrat nejvýše jedno políčko. $C(8,3) \cdot V(8,3) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 56^2 \cdot 6 = 18\,816$.

   Stejný výsledek bychom dostali, pokud bychom nejprve vybrali tři řady.

d) trojici políček, která jsou všechna téže barvy.

Máme dvě možnosti, jaké barvy budou políčka. Podle principu nezávislých výběrů můžeme pro každou barvu vybrat tři libovolná políčka z množiny 32 políček stejné barvy. proto počet možností je dán součinem $C(2,1) \cdot C(32,3) = 2 \cdot \binom{32}{3} = 2 \cdot \frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{6} = 32 \cdot 31 \cdot 10 = 9\ 920$.

2.3.2. Kolika způsoby je možné napsat k jako součet n sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.

Hledáme počet přirozených řešení rovnice

$$k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Představíme si k je součet jedniček. Nyní každé z těchto k jedniček přiřadíme jednu z n přihrádek. Výběr přihrádek (sčítanců) je neuspořádaný s možností opakování:

$$C^*(n,k) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Dostaneme různé způsoby, jak sestavit číslo k jako součet n sčítanců, přičemž pořadí sčítanců hraje roli, protože jsme rozlišovali přihrádky (sčítance) při výběru.

2.3.3. Kolika způsoby můžeme na šachovnici rozestavit všech 32 figur? Započítáme i ty možnosti, které nemohou nastat během regulérní hry (pěšec v první řadě, dva králové na sousedních polích, dva bílí střelci na černých polích, ...).

Protože se jedná o rozmístění *všech* figur na šachovnici, úlohu snadno vyřešíme pomocí permutací s opakováním (uspořádaný výběr, kde počet opakování každé figury je přesně dán). Na šachovnici je

- 1 bílý a 1 černý král,
- 1 bílá 1 černá královna,
- 2 bílé a 2 černé věže,
- 2 bílí a 2 černí střelci,
- 2 bílí a 2 černí jezdci,
- 8 bílých a 8 černých pěšců

a 32 neobsazených polí. Šachovnici si můžeme představit jako posloupnost 64 polí (pole rozlišujeme podle toho, kde se na šachovnici nebo v posloupnosti nachází). Sestavíme vščhna možná pořadí z 32 figur a 32 neobsazených polí. Nerozlišíme pořadí dvojice věží, jezdců ani střelců, nerozlišíme pořadí pěšců stejné barvy ani pořadí neobsazených polí. Pro pořet různých rozestavení dostaneme vztah

$$P^*(1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,8,8,32) = \frac{64!}{(1!)^4(2!)^6(8!)^2 32!} = \frac{64!}{2^6(40320)^2 32!} = \frac{64 \cdot 63 \cdots 33}{2^6 40320^2} =$$

$$= 4634726695587809641192045982323285670400000 \doteq 4.6347 \cdot 10^{42}.$$

2.3.4. Kolika způsoby je možné napsat číslo 7 jako součet právě čtyř přirozených sčítanců? (dovolíme i nulové sčítance!) Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.

Hledáme počet celočíselných řešení rovnice

$$7 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4.$$

Představíme si sedmičku je součet jedniček a každé jedničce přiřadíme (s opakováním) jednu proměnnou $x_1, \ldots, x_4$. Jedná se o kombinace s opakováním

$$C^*(4,7) = \binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = 120.$$

2.3.5. Kolika způsoby je možné napsat číslo 7 jako součet právě čtyř kladných přirozených sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.
Hledáme počet kladných řešení rovnice

$$7 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4.$$

Představíme si sedmičku je součet jedniček, Po jedné jedničce dáme do každé proměnné přiřadíme $x_1, \ldots, x_4$. Zbylým třem jedničkám přiřadíme (s opakováním) jednu proměnnou $x_1, \ldots, x_4$. Jedná se o kombinace s opakováním

$$C^*(4,3) = \binom{3+4-1}{4-1} = \binom{6}{3} = 20.$$

2.3.6. Kolika způsoby je možné napsat k jako součet n kladných sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.
Hledáme počet kladných řešení rovnice

$$k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Představíme si k je součet jedniček. Po jedné jedničce dáme do každé proměnné přiřadíme $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (úloha má řešení pouze pro $k \geq n$). Nyní přiřadíme zbylým $k-n$ jedničkám jednu z n přihrádek. Výběr to je neuspořádaný s možností opakování:

$$C^*(n, k-n) = \binom{n+k-n-1}{n-1} = \binom{k-1}{n-1}.$$

2.3.7. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit?
Každé figurce (bez ohledu na pořadí figurek) přiřadíme jednu ze čtyř barev. Jedná se o kombinace s opakováním deseti prvků ze čtyř.

$$C^*(4,10) = \binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} = 286.$$

2.3.8. Máme 7 *různých* figurek a tři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit?
Každá figurka může být obarvena jednou ze tří barev. Jedná se o variace s opakováním sedmi prvků ze tří.

$$V^*(3,7) = 3^7 = 2187.$$

2.3.9. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak některé figurky obarvit?
Neobarvené figurky můžeme považovat na obarvené pátou barvou. Každé figurce (bez ohledu na pořadí figurek) přiřadíme jednu z pěti barev. Jedná se o kombinace s opakováním sedmi prvků z pěti.

$$C^*(5,10) = \binom{10+5-1}{5-1} = \binom{14}{4} = 1001.$$

2.3.10. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit, přičemž od každé barvy by měla být alespoň jedna figurka?
Čtyři figurky jistě obarvíme vždy jinou barvou. Zbylé figurky nabarvíme tak, že volíme opakovaně (bez ohledu na pořadí) ze čtyř barev.

$$C^*(4,10-4) = C^*(4,6) = \binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = 84.$$

2.3.11. Kolika způsoby můžeme posadit n lidí kolem kulatého stolu? Ve dvou rozdílných rozesazeních má některý člověk jiného souseda po levé nebo po pravé ruce.
Pokud by stůl byl řadou židlí, tak existuje $P(n) = n!$ možností. Avšak n možností nerozlišíme, jedná se pouze o pootočení o jednu židli, přičemž sousedé zůstávají stejní. Mohli bychom také jednoho (např. nejstaršího) posadit na jednu pevně zvolenou židli. Dostaneme tak

$$P(n-1) = (n-1)!.$$

2.3.12. Kolika způsoby můžeme posadit n manželských párů kolem kulatého stolu tak, aby manželé seděli vždy vedle sebe? Ve dvou rozdílných rozesazeních má některý člověk jiného souseda po levé nebo po pravé ruce.
Máme sice $2n$ lidí, ale pouze n dvojic. Protože manželé sedí vždy vedle sebe, stačí posadit n dvojic $(n-1)!$ způsoby. Každá dvojice může sedět dvěma způsoby (muž/žena vpravo). Dostaneme tak

$$2^n \cdot P(n-1) = 2^n(n-1)!.$$

2.3.13. Dříve byly státní poznávací značky osobních automobilů tvořeny uspořádanou sedmicí, jejíž první tři členy byly písmena a další čtyři číslice. Kolik poznávacích značek bylo možno sestavit, jestliže pro první část značky bylo možno použít každé z 26 písmen (každá možnost povolena nebyla).
Jedná se o složený výběr:

$$V^*(26,3) \cdot V^*(10,4) = 26^3 \cdot 10^4 = 175760000.$$

2.3.14. Určete počet všech *nejvýše* k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny.
r-prvkových podmnožin je $\binom{n}{r}$. Celkem dostaneme

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}$$

2.3.15. Kolik je všech pěticiferných přirozených čísel? Kolik z nich je menších než 50 000? [90000, 40000]

2.3.16. Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel dělitelných 9, v jejichž dekadickém zápisu mohou být pouze číslice 0, 1, 2, 5, 7.
Cifry hledaných čtyřciferných čísel si označíme a, b, c, d. Aby bylo číslo dělitelné devíti, musí být ciferný součet dělitelný devíti. Cifry mohou být

$$7+2+0+0=9,$$

$$5+2+2+0=9, 7+1+1+0=9$$

$$5+2+1+1=9, 7+5+5+1=18, 7+7+2+2=18.$$

V prvním, druhém, a třetím případě nemůže číslo začínat nulou. Proto od celkového počtu permutací s opakováním $P^*(2,1,1) = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$ odečteme v prvním případě $P^*(1,1,1) = 6$ možností a ve druhém a třetím odečteme $P^*(1,2) = 3$ možností. Ve čtvrtém případě máme opět $P^*(2,1,1) = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$ možností, v pátém také 12. Pro poslední možnost je celkem $P^*(2,2) = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$ možností. Dohromady máme

$$5 \cdot 12 + 6 - 2 \cdot 3 - 6 = 54 \text{ čísel.}$$

2.3.17. V sáčku jsou červené, modré a zelené kuličky (kuličky téže barvy jsou nerozlišitelné). Určete, kolika způsoby lze vybrat pět kuliček, jestliže v sáčku je

a) aspoň pět kuliček od každé barvy;

$$C^*(3,5) = \binom{3+5-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21.$$

b) pět červených, čtyři modré a čtyři zelené kuličky.

Od všech 21 možností odečteme ty, které nemohou nastat: 5 modrých nebo 5 zelených kuliček (2 možnosti). Celkem je $21 - 2 = 19$ možností.

2.3.18.* Kolika způsoby je možné napsat číslo k jako součet sčítanců 1 a 2? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.

Podobně jako u předchozího příkladu označíme n počet sčítanců. Hledáme počet celočíselných řešení rovnice

$$k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Víme, že $\lceil \frac{k}{2} \rceil \le n \le k$. Vezmeme proto

$$\sum_{n=\lceil \frac{k}{2} \rceil}^{k} \binom{n}{k-n}.$$

Pokud bychom nerozlišovali pořadí sčítanců, tak existuje jediné řešení.

2.3.19.* Jaký je počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a každá jejich strana má velikost vyjádřenou některým z čísel $n+1, n+2, n+3, \ldots 2n$, kde n je přirozené číslo.

Jedná se o neuspořádané tříprvkové výběry, kde se prvky mohou opakovat. o kombinace s opakováním

$$C^*(n,3) = \binom{n+3-1}{n-1} = \binom{n+2}{n-1} = \binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}.$$

Žádné dva nebudou shodné, protože nezávisí na pořadí vybíraných stran – vždy vybereme jenom jednu.

2.3.20. Kolik přímek lze proložit 7 body, jestliže žádné tři body neleží v přímce?

Každou dvojicí bodů je proložena jedna přímka: $\binom{7}{2} = 21$.

2.3.21. Kolik přímek lze proložit 7 body, jestliže právě tři body leží v přímce?

Každou dvojicí bodů je proložena jedna přímka, avšak jednou trojicí bodů je proložena pouze jedna přímka: $\binom{7}{2} - \binom{3}{2} + 1 = 21 - 3 + 1 = 19$.

2.3.22. Máme dány dvě mimoběžky. Na jedné je m bodů, na druhé n bodů. Kolik lze sestrojit čtyřstěnů s vrcholy v daných bodech? $\left[\binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2}\right]$

2.3.23. Kolika způsoby můžete seřadit v poličce pět učebnic angličtiny, čtyři učebnice matematiky a dvě učebnice českého jazyka, jestliže mají zůstat rozděleny do skupin po jednotlivých předmětech?

Seřadíme zvlášť učebnice angličtiny (5! způsobů), zvlášť učebnice matematiky (4! způsobů) a zvlášť učebnice češtiny (2! způsobů). Dále tyto skupiny můžeme do poličky umístit $P(3) = 3!$ způsoby Celkem máme $5! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 3! = 34560$ způsobů.

2.3.24. Na hlídku půjdou 4 vojáci z čety. Kolik vojáků má četa, jestliže výběr je možno provést 210 způsoby?

Porovnáme $\binom{n}{4} = 210$ odtud $n(n-1)(n-2)(n-3) = 210 \cdot 4!$ Tabelací (vypsáním hodnot pro několik různých n) nebo substitucí $m = n - \frac{3}{2}$ $(m+\frac{3}{2})(m+\frac{1}{2})(m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2}) = 210 \cdot 24$ a zbývá vyřešit bikvadratickou rovnici $(m^2 - \frac{9}{4})(m^2 - \frac{1}{4}) = 210 \cdot 24$. Vyjde 10.

2.3.25. Palindrom je slovo, které se píše stejně jako pozpátku. Anglická abeceda má 26 písmen. Kolik existuje palindromů (i nesmyslných) délky n z písmen anglické abecedy?

Pro sudá n můžeme zvolit prvních $\frac{n}{2}$ znaků slova libovolně, zbylých $\frac{n}{2}$ je již určeno jednoznačně. Podobně pro lichá n můžeme zvolit prvních $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ znaků. Volbu prvních $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ znaků můžeme udělat $V(\lceil \frac{n}{2} \rceil, 26) = 26^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ způsoby.

2.3.26. Házíme třikrát kostkou. Kolik existuje takových možností, kdy v každém dalším hodu padají větší a větší čísla?
Je šest různých čísel, která mohou padnout. Musí padnout tři různá, tj. vybereme 3 ze šesti čísel $\binom{6}{3} = 20$. Existuje 20 možností, kdy házíme třikrát kostkou a padají větší a větší čísla.

2.3.27. Byli jsme čtyři, seděli v baru a popíjeli. Trápilo nás špatné svědomí, že místo abychom v životě dělali něco pořádného, jsme závislí na alkoholu. Tu k nám přistoupil rozjařený barman a namíchal nám sedm různých drinků tak, aby každý dostal alespoň jeden. Kolika způsoby to mohl provést, jestliže rozlišujeme pořadí drinků, které jsme vypili.
Představme si, že sedíme v řadě u baru a barman postupně míchá sedm drinků. Různých pořadí, ve kterém může drinky namíchat, je $P(7) = 7!$. Postupně podá drinky prvnímu, druhému, třetímu i čtvrtému z nás.

Pokaždé, když začal nalévat někomu dalšímu, musel se posunout o jedno místo. Posunul se celkem třikrát a to nejříve po nalití prvního drinku a nejpozději před nalitím sedmého drinku. Bylo šest možností, kdy se mohl posunout, vybral si tři z nich, tj. $C(6,3) = \binom{6}{3}$ možností.

Celkem dostáváme $7! \cdot \binom{6}{3} = 5040 \cdot 20 = 100800$ možností, jak drinky rozdal.

2.3.28. Počítač Kecálek ve filmu Rumburak dostal za úkol najít všechny dvojice slov složené z dvanácti písmen (mezeru nepočítáme). Kolik takových slov z 26 písmen existuje?
Posloupností z 26 písmen je $V^*(26,12) = 26^{12}$. Mezeru můžeme vložit na libovolné z jedenácti míst mezi dvanácti písmeny. Dohromady máme $11 \cdot 26^{12} \doteq 1.0497 \cdot 10^{18}$.

2.3.29. Zaklínadlo pro přesun do říše pohádek ve filmu Rumburak zní HUBERO KORORO. Kolik existuje anagramů tohoto zaklínadla složených ze dvou šestipísmených slov?
Mezeru nemusíme počítat, každý anagram jednoduše rozdělíme na dvě šestipísmenné části. K dispozici máme 1H, 1U, 1D, 1E, 1K, 3R a 4O. Celkem máme $P^*(4,3,1,1,1,1,1) = \frac{12!}{4!3!} = 3\ 326\ 400$ různých anagramů.

2.3.30. Zaklínadlo pro změnu počasí ve filmu Rumburak zní RABERA TAREGO. Kolik existuje anagramů tohoto zaklínadla složených ze dvou šestipísmených slov?
Mezeru nemusíme počíta, každý anagram jednoduše rozdělíme na dvě šestipísmenné části. K dispozici máme 3R, 3A, 1B, 2E, 1T, 1G a 1O. Celkem máme $P^*(3,3,2,1,1,1,1) = \frac{12!}{3!3!2!} = 6\ 652\ 800$ různých anagramů.

2.3.31. Na běžných dominových kostkách se vyskytují oka v počtu $0, 1, \ldots 6$. Každá dvojice počtu ok se s sadě vyskytuje na právě jedné kostce. Všechny kostky domina je možné položit do jediné řady tak, aby navazující kostky sdílely stejný počet ok. Nyní n-dominem budeme rozumět takovou sadu kostek, která obsahuje všechny dvojice počtů ok z rozsahu $0, 1, \ldots, n$. Pro jaká přirozená čísla n lze všechny kostky n-domina položit do jediné řady?

2.3.32. Máme čtverečkovanou síť $m \times n$ čtverečků. Kolik různých obdélníků najdeme v síti?
Každý obdélník je určený svými hranicemi. V jednom směru vybereme dvě hranice z $m+1$ možností, tj. $\binom{m+1}{2}$ možností. V druhém směru vybereme dvě hranice z $n+1$ možností, tj. $\binom{n+1}{2}$ možností. Výběry jsou nezávislé, proto máme celkem $\binom{m+1}{2} \cdot \binom{n+1}{2}$ možností. Obdélníků je $\binom{m+1}{2} \cdot \binom{n+1}{2}$.

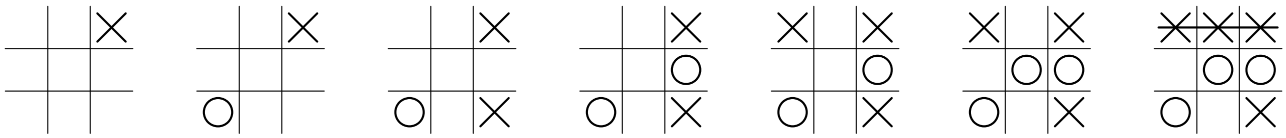
2.3.33. Keltský druid Travedik vaří lektvary ze sta různých bylin. Mezi nimi je i šalvěj třeskutá, což je druidova nejmocnější bylinka. Při vaření lektvarů může použít jednu, dvě, tři, či libovolný větší počet bylin. Kterých lektvarů je více, těch, které šalvěj třeskutou obsahují a nebo těch, které ji neobsahují?
Protože ke každému lektvaru, který šalvěj třeskutou neobsahuje může Travedik uvařit lektvar, který šalvěj obsahuje, a navíc může uvařit lektvar ze samotné šalvěje třeskuté, tak je evidentně o jeden lektvar, který šalvěj obsahuje, více než těch, které ji neobsahují. Nezávisí přitom vůbec na počtu ostatních bylin.

2.3.34. Keltský druid Travedik vaří lektvary ze sta různých bylin. Mezi nimi jsou i šalvěj třeskutá a puchejřníček smradlavý, což jsou dvě Travedikovy nejmocnější bylinky. Při vaření lektvarů může použít jednu, dvě, tři, či libovolný větší počet bylin. Kterých lektvarů je více, těch, které obsahují šalvěj třeskutou a puchejřníček smradlavý a nebo těch, které alespoň jednu z těchto bylin neobsahují?
Celkový počet různých lektvarů je roven počtu neprázdných podmnožin stoprvkové množiny bylinek B. Proto je celkový počet lektvarů o jedna menší než počet všech podmnožin množiny B a je roven $|2^B| - 1 = 2^{|B|} - 1 = 2^{100} - 1 = 1267650600228229401496703205375 \doteq 1.2677 \cdot 10^{30}$.

Lektvary, které obě bylinky obsahují, dostane Travedik tak, že je do kotle vloží a k nim vybere jakoukoliv podmnožinu ze zbývajících 98 bylinek. Takových lektvarů je $2^{98} = 316912650057057350374175801344 \doteq 3.1691 \cdot 10^{29}$.

Lektvary, které alespoň jednu ze jmenovaných bylin neobsahují, jsou všechny zbývající. Je jich $(2^{100} - 1) - 2^{98} = 1267650600228229401496703205375 - 316912650057057350374175801344 = 950737950171172051122527404031 \doteq 9.5074 \cdot 10^{29}$ a tedy zhruba třikrát více.

2.3.35. Hra *Tic-tac-toe* je hra s tužkou a papírem pro dva hráče X a O. Hráči střídavě zapisují křížky a kolečka do čtvercové sítě políček 3×3. Obvykle začíná X, jako na Obrázku 2.1. Hráč, který jako první umístí tři své symboly v jedné řadě, sloupci nebo diagonále, vyhraje.



Obrázek 2.1: *Jedna hra Tic-tac-toe.*

a)$^{\heartsuit}$ Kolik existuje různých rozmístění křížků a koleček (pět křížků a čtyři kolečka) na herním plánu? $\left[\binom{9}{4}\right]$

b) Kolik existuje různých rozmístění křížků a koleček na herním plánu, jestliže rozlišujeme pořadí tahů, křížky a kolečka se střídají? [362880]

c) Kolik existuje různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje X v pátém tahu? [1440]

d) Kolik existuje různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje O v šestém tahu? [5328]

e) Kolik existuje různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje X v sedmém tahu? [47952]

f) Kolik existuje různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje O v osmém tahu? [72576]

g)* Kolik existuje různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje X v devátém tahu? [81792]

h) Kolik existuje různých her Tic-tac-toe, které končí remízou? [46080]

i) Kolik existuje všech různých her Tic-tac-toe? [255168]

2.3.36. Máme dostatečný počet kuliček červené, modré a zelené barvy. Kolika způsoby můžeme vybrat 30 kuliček tak, aby od žádných dvou barev nebyl stejný počet kuliček?

Pokud bychom na počty kuliček neměli žádné omezení, tak bychom celkový počet možností určili jako počet neuspořádaných výběrů 30 kuliček ze tří možností s možností opakování, tj. kombinací s opakováním.

$$C^*(3, 30) = \binom{30 + 3 - 1}{3 - 1} = \frac{32 \cdot 31}{2} = 496.$$

Nyní odečteme ty možnosti, které nevyhovují zadání. Rozdělíme si je do dvou kategorií:

- pokud je stejný počet všech kuliček (jediná možnost)
- nebo pokud je stejný počet kuliček dvou barev ze tří a třetí barva má jiný počet. Celkový počet je dán vztahem
$$\binom{3}{2} \cdot |X|,$$
kde X obsahuje přípustný počet b_3 kuliček třetí barvy. Protože počty barev $b_1 = b_2$ a současně $b_1 + b_2 + b_3 = 30$, tak $b_3 = 30 - 2b_1$ a množina X obsahuje prvky $X = \{0, 2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$. Všimněte si, že číslo $10 \notin X$.

Celkem máme $1 + 3 \cdot 15 = 46$ nepřípustných možností, proto přípustných možností je $496 - 46 = 450$. Vybrat 30 kuliček tak, aby od žádných dvou barev nebyl stejný počet kuliček, lze 450 způsoby.

3 Diskrétní pravděpodobnost

Pokud není řečeno jinak, tak v příkladech této kapitoly předpokládáme, že balíček karet obsahuje 32 karet, od sedmičky po eso ve čtyřech různých barvách (srdce, piky, káry a kříže). Dále předpokládáme, že klasická šestistěnná kostka je vyrobena tak, že součet ok na protilehlých stěnách je vždy sedm.

Všimněte si, že i v případě, kdy máme zamíchaný celý balíček karet, nemusíme někdy uvažovat šech 32! pořadí. Pokud se zajímáme o nějaký výběr, stačí pracovat s nějakým náhodným výběrem.

Podrobněji si o diskrétní pravděpodobnosti můžete přečíst ve skriptech [ZDM].

3.1 Motivační příklady

3.1.1. Na jednom Americkém televizním kanálu běžela *Montyho Show*. Soutěžící měli možnost získat automobil, jestliže si vyberou ze tří dveří ty dveře, za kterými se automobil nachází. Soutěžící si jedny dveře zvolil a potom Monty šel a otevřel některé ze dvou zbývajících dveří. Vždy otevřel ty dveře, za kterými nestál automobil, ale koza. Nyní měl soutěžící možnost změnit svou volbu a vybrat si libovolné ze dvou stále zavřených dveří. Předpokládáme, že pořadatelé vyberou na začátku náhodně jedny ze tří dveří, za které zaparkují automobil a za další dvě postaví kozy. Je lepší změnit svoji volbu, nebo zůstat u původního tipu a nebo je to jedno? S jakou pravděpodobností získá soutěžící výhru jestliže změní svoji volbu? Svou odpověď vysvětlete.

Předpokládáme, že na začátku je pravděpodobnost výhry $\frac{1}{3}$ u všech dveří. Soutěžící si vybere jedny dveře a s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ se za nimi nachází hlavní cena. Avšak s pravděpodobností $\frac{2}{3}$ se zmýlil a tu přichází Monty, který mu prozradí, za kterými ze zbývajících dvou dveří se cena nenachází. Proto je lepší volbu změnit, protože zbývající dveře skrývaly cenu s pravděpodobností $\frac{2}{3}$ a my víme, kde *nejsou*.

Jestliže soutěžící změní svoji volbu, získá výhru s pravděpodobností

$$P = \frac{2}{3}.$$

Jiné řešení:

Jiné pěkné vysvětlení je následující. Představte si, že dveře nejsou tři, ale je jich 1000. Vy si jedny vyberete, šance na výhru je malá. Proto je výhodnější změnit volbu, protože tak je šance na výhru mnohem větší, je to jako vybrat si 999 z 1000 dveří a Monty otevře 998 ze zbývajících 999 dveří a ukáže, že tam koza není.

3.2 Konečný pravděpodobnostní prostor

3.2.1. Hodíme kostkou.

a) Jaká je pravděpodobnost, že padne sudé číslo? $\left[\frac{1}{2}\right]$

b) Jaká je pravděpodobnost, že padne prvočíslo? $\left[\frac{1}{2}\right]$

c) Jaká je pravděpodobnost, že padne jednička nebo dvojka? $\left[\frac{1}{3}\right]$

d) Jaká je pravděpodobnost, že součet horní a spodní stěny je 7? $[1]$

e) Jaká je pravděpodobnost, že součet horní a spodní stěny je 3? $[0]$

3.2.2. Hodíme kostkou, která není spravedlivá, různá čísla padají s různou pravděpodobností. Čísla 1, 2 padnou s pravděpodobností $\frac{1}{5}$, čísla 4, 5 a 6 padnou s pravděpodobností $\frac{1}{7}$. Pravděpodobnost čísla 3 není udána.

a) Jsou uvedené pravděpodobnosti konzistentní? [ano]

b) S jakou pravděpodobností padne číslo 3? $\left[1 - 2 \cdot \frac{1}{5} - 3 \cdot \frac{1}{7} = \frac{6}{35}\right]$

c) Jaká je pravděpodobnost, že padne sudé číslo? $\left[\frac{17}{35}\right]$

d) Jaká je pravděpodobnost, že padne prvočíslo? $\left[\frac{18}{35}\right]$

e) Jaká je pravděpodobnost, že padne jednička nebo dvojka? $\left[\frac{2}{5}\right]$

f) Jaká je pravděpodobnost, že součet horní a spodní stěny je 7? $[1]$

g) Jaká je pravděpodobnost, že součet horní a spodní stěny je 3? $[0]$

3.2.3. Hodíme dvěma kostkami.

a) Je pravděpodobnější, a) že padne 5 a 6 nebo b) že padnou dvě 3?

Mějme uniformní pravděpodobnostní prostor $\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}$. Potom jev „padne 5 a 6“ je $A = \{(5,6),(6,5)\}$ a jev „padnou dvě 3“ je $B = \{(3,3)\}$. Jev A má dvakrát větší pravděpodobnost než jev B.

b) Jaká je pravděpodobnost, že padne součin 12?

V uniformním pravděpodobnostním prostoru rozlišíme $12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 6 \cdot 2$. Proto $P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

c) Jaká je pravděpodobnost, že padne součin 4?

V uniformním pravděpodobnostním prostoru rozlišíme $4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 = 4 \cdot 1$. Proto $P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

d) Jaká je pravděpodobnost, že padne součin 14?

Součin 14 na dvou šestistěnných kostkách padnout nemůže. Proto $P = 0$.

e) Jaká je pravděpodobnost, že padne součet 10?

Součet 10 dostaneme jako $10 = 6 + 4 = 5 + 5 = 4 + 6$. Proto $P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

3.2.4. Sestavte funkci $P(n)$, která bude udávat pravděpodobnost, že při současném hodu $n \geq 1$ kostkami

a) padne součet n. $\left[P(n) = \frac{1}{6^n}\right]$

b) padne součet 3.

Pro jednu kostku je $P(1) = \frac{1}{6}$, neboť v uniformním pravděpodobnostním prostoru šesti možných výsledků jen jeden je 3. Pro dvě kostky je $P(2) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, neboť v uniformním pravděpodobnostním prostoru třiceti šesti možných výsledků jen dvěma způsoby lze dostat součet 3. Pro tři kostky je $P(3) = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$, neboť v uniformním pravděpodobnostním prostoru dvě stě šestnácti možných výsledků jen jediným způsobem lze dostat součet 3. Pro čtyři a více kostek součet 3 padnout nemůže, proto $P(n) = 0$ pro $n \geq 4$. Hledaná funkce je například

$$P(n) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{pro } n = 1 \\ \frac{1}{18} & \text{pro } n = 2 \\ \frac{1}{216} & \text{pro } n = 3 \\ 0 & \text{pro } n \geq 4 \end{cases}$$

3.2.5. Hodíme současně sedmi kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že

a) padne součet 12?

Sestavíme pravděpodobnostní prostor s nosnou množinou Ω, kde každý elementární jev odpovídá jednomu hodu se sedmi kostkami (první až sedmá kostka). Tento pravděpodobnostní prostor je uniformní a má $V^*(6,7) = 6^7$ prvků.

Nejmenší možný součet při hodu sedmi kostkami je 7. Zbývá „rozdělit pět jednotek“ (ok = puntíků) mezi sedm kostek, jak se na některých stěnách při hodu se součtem 12 mohou objevit. Jedná se o neuspořádaný výběr s možností opakování. Existuje celkem $C^*(7,5) = \binom{11}{6} = \binom{11}{5} = 462$ takových možností. Jev „padne součet 12“ odpovídá podmnožině $A \subseteq \Omega$, přičemž A má 462 prvků. Protože daný pravděpodobnostní prostor je uniformní, hledaná pravděpodobnost je

$$P = \frac{\binom{11}{5}}{6^7} = \frac{462}{279936} = \frac{77}{46656}.$$

Poznámka:

Kdybychom se ptali na součet 13 nebo vyšší, úloha by byla obtížnější, protože na každé kostce je nejvýše šest ok (puntíků). Při výpočtu velikosti A bychom museli uvážit, aby sestavené možnosti odpovídaly sčítancům s nejvyšší hodnotou 6.

b) padne součet 13?

Sestavíme pravděpodobnostní prostor stejně jako v předchozí části.

Nejmenší možný součet při hodu sedmi kostkami je 7. Zbývá „rozdělit šest jednotek“ (ok = puntíků) mezi sedm kostek, nemůžeme však všechna oka umístit na jednu kostku, protože by tato kostka měla sedm ok (puntíků) na jedné stěně. Jedná se o neuspořádaný výběr s možností opakování. Odečteme počet takových možností, kdy všechny jednotky jsou přidány na jednu ze sedmi kostek. Existuje celkem $C^*(7,6) - C(7,1) = \binom{12}{6} - \binom{7}{1} = 924 - 7 = 917$ takových možností. Protože uniformní pravděpodobnostní prostor má $V(6,7) = 6^7$ prvků, hledaná pravděpodobnost je

$$P = \frac{\binom{12}{6} - \binom{7}{1}}{6^7} = \frac{917}{279936}.$$

3.2.6. Hodíme n-stěnnou kostkou očíslovanou $1, 2, \ldots, n$. Jaká je pravděpodobnost, že padne liché číslo?
$\left[\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n}\right]$

3.2.7. Hodíme n-stěnnou prvočíselnou kostkou (stěny jsou očíslované užitím prvních n prvočísel). Jaká je pravděpodobnost, že padne liché číslo? $\left[\frac{n-1}{n}\right]$

3.2.8. Máme zamíchaný balíček 32 hracích karet. Jaká je pravděpodobnost, že

a) první karta v balíčku je eso?

První karta může být libovolná z 32 karet, každá je stejně pravděpodobná. Uniformní pravděpodobnostní prostor má nosnou množinu tvořenou 32 kartami, které mohou být v balíčku první. V balíčku jsou 4 esa, proto $P = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

b) třetí karta v balíčku je desítka?

Třetí karta může být libovolná z 32 karet, každá je stejně pravděpodobná. Uniformní pravděpodobnostní prostor má nosnou množinu tvořenou 32 kartami, které mohou být v balíčku na třetím místě. V balíčku jsou 4 desítky, proto $P = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

c) třetí karta v balíčku je desítka, víme-li, že první dvě karty jsou dáma a král?

Víme, že třetí karta může být jen jedna ze třiceti karet. Uniformní pravděpodobnostní prostor má nosnou množinu tvořenou 30 kartami, které mohou být v balíčku třetí. V balíčku stále zůstávají čtyři desítky. Proto $P = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

d) třetí karta v balíčku je desítka, víme-li, že první dvě karty jsou sedmička a desítka?

Víme, že třetí karta může být jen jedna ze třiceti karet. Uniformní pravděpodobnostní prostor má nosnou množinu tvořenou 30 kartami, které mohou být v balíčku třetí. V balíčku stále zůstávají tři desítky. Proto $P = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$.

3.2.9. Házíme dvěma kostkami: šestistěnnou a dvanáctistěnnou. Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne stejné číslo?

Na šestistěnné může padnout jakákoliv hodnota, výsledek hodu označme a. Sestavíme uniformní pravděpodobnostní prostor dvanácti možných výsledků na druhé kostce. S pravděpodobností $P = \frac{1}{12}$ bude na dvanáctistěnné kostce stejné číslo a.

3.2.10. Házíme třemi kostkami: čtyřstěnnou, šestistěnnou, desetistěnnou. Jaká je pravděpodobnost, že na všech padne stejné číslo?

Na čtyřstěnné může padnout cokoliv, označme výsledek a. Sestavíme uniformní pravděpodobnostní prostor šedesáti možných výsledků na druhé a třetí kostce. Jen jediná možnost odpovídá případu, kdy na druhé i na třetí kostce padne stejné číslo a. Celkem máme

$$P(A) = \frac{1}{60}.$$

3.2.11. Házíme třemi šestistěnnými kostkami.

a) Je lepší vsadit si, že nepadne žádná šestka, nebo že padne alespoň jedna šestka?

Označíme A jev, kdy nepadne žádná šestka. Pravděpodobnost tohoto jevu je $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, kde $\Omega = [1,6]^3$ a $A = [1,5]^3$.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{V^*(5,3)}{V^*(6,3)} = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}.$$

Označíme B jev, kdy padne alespoň jedna šestka. Jev B je doplňkovým jevem jevu A (pokud nenastane A, musí nastat B), proto ihned máme

$$P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}.$$

Je lepší vsadit si, že nepadne žádná šestka.

b) Jaká je pravděpodobnost, že padne právě jedna šestka?

Označíme C jev, kdy padne právě jedna šestka. Jev C obsahuje ty trojice, které obsahují jednu šestku (na některé ze tří kostek), přičemž zbývající dvě kostky obsahují libovolná jiná čísla. Proto $|C| = C(3,1) \cdot V^*(5,2) = \binom{3}{1} \cdot 5^2 = 3 \cdot 25$. Potom

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{3 \cdot 5^2}{6^3} = \frac{75}{216}.$$

c) Jaká je pravděpodobnost, že padnou alespoň dvě šestky?

Označíme D jev, kdy padnou alespoň dvě šestky. Je zřejmé, že ze všech možností obsažených v Ω musíme vyloučit případy v A a C. Proto

$$P(D) = P(\Omega) - P(A) - P(C) = \frac{216}{216} - \frac{125}{216} - \frac{75}{216} = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}.$$

Jiné řešení:

Protože platí $D = B \setminus C$ a $C \subseteq B$, tak stačí počítat

$$P(D) = P(B) - P(C) = \frac{91}{216} - \frac{75}{216} = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}.$$

3.2.12. Házíme desetistěnnou kostkou.

a) Hodíme jednou. Jaká je pravděpodobnost, že padne prvočíslo? $\left[\frac{2}{5}\right]$

b) Házíme dvakrát. Jaká je pravděpodobnost, že padne lichý součet? $\left[\frac{1}{2}\right]$

c) Házíme dvakrát. Jaká jsou pravděpodobnosti jednotlivých součtů? $\left[P(i) = \min\{\frac{i-1}{100}, \frac{21-i}{100}\}\right.$ pro $\left. i \in [2,20]\right]$

3.2.13. Házíme čtyřikrát mincí. Jaká je pravděpodobnost, že

a) padne čtyřikrát za sebou hlava? $\left[\frac{1}{16}\right]$

b) padne nejprve hlava, potom orel, znovu orel a nakonec hlava? $\left[\frac{1}{16}\right]$

c) padne dvakrát hlava a dvakrát orel (v libovolném pořadí)? $\left[\frac{3}{8}\right]$

d) padne alespoň jednou hlava? $\left[\frac{15}{16}\right]$

3.2.14. Hodíme třemi stejnými kostkami.

a) Jaká je pravděpodobnost, že padne $2, 4, 6$?

Všech možností je 6^3, těch, kdy padne $2, 4, 6$ v různých pořadích je $3! = 6$. Pravděpodobnost v uniformním pravděpodobnostním prostoru je $P = \frac{3!}{6^3} = \frac{1}{36}$.

b) Jaká je pravděpodobnost, že padne $2, 4, 4$?

Všech možností je 6^3, těch, kdy padne $2, 4, 4$ v různých pořadích je $\binom{3}{1} = 3$. Pravděpodobnost v uniformním pravděpodobnostním prostoru je $P = \frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}$.

3.2.15. Ve třídě je 25 žáků. Předpokládejme, že nikdo nemá narozeniny 29. února (v přestupném roce) a že každý den v roce se rodí přibližně stejně dětí. a) S jakou pravděpodobností budou alespoň dva spolužáci slavit narozeniny ve stejný den? b) Kolik nejméně musí být ve třídě žáků, aby byla pravděpodobnost společného data narozenin dvou spolužáků větší než $\frac{1}{2}$? [a) $P_{25} = 0.5687$, b) nejméně 23 žáků]

3.3 Disjunktní a nezávislé jevy

3.3.1. Dva hráči hází kostkou. Jsou jejich hody nezávislé? I když někdo hodí tři šestky za sebou? [ano]

3.3.2. Mějme dva různé elementární jevy.

a) Jsou různé elementární jevy vždy disjunktní?

Elementární jevy jsou prvky pravděpodobnostního prostoru. Proto nemá smysl mluvit o disjunktnosti jevů jako o disjunktnosti množin. Avšak za elementární jevy můžeme považovat jednoprvkové množiny obsahující prvky pravděpodobnostního prostoru. Podle definice jsou elementární jevy výsledky náhodného pokusu a dva různé výsledky nemohou nastat současně. Budeme-li se na elementární jevy dívat jako na jednoprvkové podmnožiny pravděpodobnostního prostoru, tak má smysl zkoumat jejich disjunktnost a elementární jevy jsou vždy disjunktní.

b) Jsou různé elementární jevy vždy nezávislé?

Elementární jevy jsou prvky pravděpodobnostního prostoru. Za elementární jevy můžeme považovat jednoprvkové množiny obsahující prvky pravděpodobnostního prostoru. Podle předchozího cvičení jsou disjunktní a proto jejich průnik je $\emptyset$. Pravděpodobnost prázdné množiny je 0, zatímco pravděpodobnost elementárních jevů je vždy kladná. Protože součin dvou kladných čísel nemůže být 0, jsou elementární jevy vždy závislé.

Jiné řešení:

Pokud nastane elementární jev jako výsledek pokusu, víme, že druhý výsledek nenastal. Proto dva elementární jevy jsou závislé.

3.3.3. Mějme dva disjunktní jevy.

a) Mohou být dva disjunktní jevy nezávislé?

Dva jevy jsou nezávislé, jestliže $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$. Protože máme dva disjunktní jevy, je $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$. Aby byla splněna nezávislost, musí mít alespoň jeden z jevů pravděpodobnost $P = 0$.

b) Je prázdný jev nezávislý s libovolným jevem?

Dva jevy jsou nezávislé, jestliže $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$. Pro prázdný jev $\emptyset$ je z definice $P(\emptyset) = 0$ a také $P(A \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0$. Proto rovnost $P(A) \cdot P(\emptyset) = P(A) \cdot 0 = 0 = P(\emptyset) = P(A \cap \emptyset)$ je splněna vždy.

3.3.4. Udejte příklad dvou různých jevů, které nejsou disjunktní. [Například při hodu kostkou: jev padlo liché číslo a jev padlo prvočíslo.]

3.3.5. Hodíme dvěma kostkami.

a) Jsou jevy A: *padl součet* 4 a B: *padl součin* 4 disjunktní?

Jevy nejsou disjunktní, protože součet $2+2=4$ a zároveň součin $2 \cdot 2 = 4$.

b) Jsou jevy A: *padl součet* 6 a B: *padl součin* 6 disjunktní?

Jevy jsou disjunktní, protože součet $6 = 1+5 = 2+4 = 3+3 = 4+2 = 5+1$ a součin $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6 \cdot 1$ nemohou nastat současně.

3.3.6. Mějme tři jevy A, B, C. Víme, že jevy A a B jsou nezávislé, jevy B a C jsou nezávislé a jevy A a C jsou nezávislé.

a) Jsou jevy A, B, C nezávislé jako trojice?

Jevy nejsou nezávislé jako trojice. Víme-li, že nastal jev A a B současně a víme-li nastal jev B a C současně, tak nutně nastal jev A i C současně. Například při hodu třemi mincemi A, B, C.

b) Mohou být ve speciálním případě nezávislé? Kdy? [ano, je-li alespoň jeden z jevů prázdný]

3.3.7. Máme zamíchaný balíček 32 karet.

a) Rozdáme dvěma hráčům po třech kartách. Jsou výběry karet nezávislé?

Výběry nejsou nezávislé. Dostane-li jeden srdcové eso, druhý už tuto kartu dostat nemůže.

b) Dáme prvnímu hráči tři karty a zbylé karty zamícháme. Potom druhý hráč dostane také tři karty. Jsou výběry karet nezávislé?

Výběry nejsou nezávislé. Dostane-li první srdcové eso, druhý už tuto kartu dostat nemůže.

c) Dáme prvnímu hráči tři karty. On si je zapamatuje a vrátí do balíčku. Potom karty zamícháme a druhý hráč dostane tři karty. Jsou výběry karet nezávislé?

Výběry jsou nezávislé. Protože první hráč karty pouze viděl, nijak to neovlivní možnosti pro druhého hráče.

d) Hráč dostane pět karet, potom karty vrátí a po zamíchání dostane znovu pět karet. Jaká je pravděpodobnost, že měl pokaždé fullhouse (3+2 stejné hodnoty)?

Oba výběry jsou nezávislé. Všech možností výběru pěti karet je $\binom{32}{5}$. Spočítáme možnosti, jak sestavit fullhouse. Je celkem 8 možností, jak vybrat hodnotu trojice, přičemž existuje $\binom{4}{3}$ možností, jak vybrat trojici. Podobně existuje 7 možností, jak vybrat jinou hodnotu dvojice a $\binom{4}{2}$ možností, jak vybrat dvojici. Celkem je $8 \cdot 7 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} = 56 \cdot 24 = 1344$ možností. Pravděpodobnost, že dostane fullhouse je

$$P = \frac{1344}{\binom{32}{5}} = \frac{1344}{201376} = \frac{6}{899} \doteq 0.0066741$$

Pravděpodobnost, že dvakrát za sebou dostaneme fullhouse je

$$P^2 = \left(\frac{1344}{\binom{32}{5}}\right)^2 = \frac{6^2}{899^2} = \frac{36}{808201} \doteq 0.000044543 = 4.4543 \cdot 10^{-5}.$$

e) Hráč dostane pět karet, schová si je dostane dalších pět karet. Jaká je pravděpodobnost, že měl královský poker (4 esa a další karta stejné hodnoty) dvakrát za sebou?

Výběry nejsou nezávislé. Dostane-li v první sadě královský poker, v druhé tomu tak již být nemůže (a naopak), neboť esa se v balíčku vyskytují pouze čtyři. Protože se jedná o jev nemožný, je jeho pravděpodobnost 0.

3.3.8. Hodíme dvěma kostkami, jednou zelenou a jednou červenou. Jsou jevy A: „na obou padne stejné číslo“ a B: „na zelené kostce padne šestka“ nezávislé?
Jevy A a B jsou nezávislé. Ať na zelené kostce padne cokoliv, na červené padne s pravděpodobností $\frac{1}{6}$ stejné číslo.
Jiné řešení:
Ověříme podle definice nezávislosti.

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{6}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36}.$$

Protože platí $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = P(A \cap B)$, jevy jsou nezávislé.

3.3.9. Hoďme dvěma kostkami. Jsou jev *„padl součet* 6*“* a jev *„padl součin* 8*“* nezávislé?
Zavedeme pravděpodobnostní prostor

$$\Omega = \{(a, b) : 1 \le a, b, \le 6\}.$$

Jev A, kdy padne součet 6, je $A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$. Jev B, kdy padne součin 8, je $B = \{(2, 4), (4, 2)\}$. Protože se jedná o uniformní pravděpodobnostní prostor, máme

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}, \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{36}, \quad P(A \cap B) = P(B) = \frac{2}{36}.$$

Pokud jsou jevy nezávislé, musí podle definice platit

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B).$$

Dosazením dostaneme

$$\frac{5}{36} \cdot \frac{2}{36} \ne \frac{2}{36},$$

proto jevy A a B nejsou nezávislé.

3.3.10. Mějme pravděpodobnostní prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ s uniformní pravděpodobností (házíme osmistěnnou kostkou). Jsou jevy $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a $B = \{5, 6, 7, 8\}$ nezávislé?
Ověříme definici nezávislosti.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \qquad P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{0}{8} = 0.$$

Protože

$$P(A \cap B) = 0 \ne \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B),$$

tak jevy A a B nejsou nezávislé, jsou závislé.

Jevy A a B jsou disjunktní.

3.3.11. Mějme pravděpodobnostní prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ s uniformní pravděpodobností (házíme osmistěnnou kostkou). Jsou jevy $A = \{1, 2, 3, 4\}$ (padlo malé číslo) a $B = \{1, 3, 5, 7\}$ (padlo liché číslo) nezávislé?
Ověříme definici nezávislosti.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \qquad P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Protože

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B),$$

tak jevy A a B jsou nezávislé.

3.3.12. Mějme pravděpodobnostní prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ s uniformní pravděpodobností (házíme šestistěnnou kostkou). Jsou jevy $A = \{1, 2, 3\}$ (padlo malé číslo) a $B = \{1, 3, 5\}$ (padlo liché číslo) nezávislé?
Ověříme definici nezávislosti.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}, \qquad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}, \qquad P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Protože
$$P(A\cap B)=\frac{1}{4}\neq\frac{9}{64}=P(A)\cdot P(B),$$
tak jevy A a B nejsou nezávislé, jsou závislé.

3.3.13. Házíme n-stěnnou kostkou. Nadefinujeme jev A, že padne malé číslo $1,2,\ldots,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ a jev B, že padne liché číslo. Pro jaká n jsou jevy A a B nezávislé?
Protože $\Omega=\{1,2,\ldots,n\}$ je uniformní pravděpodobnostní prostor, máme
$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{n},\qquad P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{n},\qquad P(A\cap B)=\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}=\frac{\left\lceil\frac{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{2}\right\rceil}{n}.$$
Dále rozdělíme výpočet na čtyři možnosti: $n\equiv 1,2,3,4\pmod 4$. Označíme si $n=4q+r$, kde $r\in\{0,1,2,3\}$.

- pro $n\equiv 0\pmod 4$ je $n=4q$. Potom
$$P(A)\cdot P(B)=\frac{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{n}\cdot\frac{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{n}=\frac{2q}{4q}\cdot\frac{2q}{4q}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$
$$P(A\cap B)=\frac{\left\lceil\frac{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{2}\right\rceil}{n}=\frac{\frac{2q}{2}}{4q}\cdot\frac{q}{4q}=\frac{1}{4}.$$
Jevy Aa B jsou nezávislé.

- pro $n\equiv 1,2,3\pmod 4$ je $n=4q+1$ (resp. $n=4q+2$, resp. $n=4q+3$). Potom
$$P(A)\cdot P(B)=\frac{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{n}\cdot\frac{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{n}=\frac{2q}{4q}\cdot\frac{2q+1}{4q}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\frac{1}{2q}}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8q},$$
$$P(A\cap B)=\frac{\left\lceil\frac{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{2}\right\rceil}{n}=\frac{\frac{2q}{2}}{4q}\cdot\frac{q}{4q}=\frac{1}{4}.$$
Jevy Aa B jsou závislé.

3.4 Podmíněná pravděpodobnost

3.4.1. Jaká je pravděpodobnost při hodu klasickou kostkou, že padne číslo větší než 3 víme-li, že padlo liché číslo.
Mějme uniformní pravděpodobnostní prostor $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. Potom jev „padne liché číslo“ je $A=\{1,3,5\}$ a jev „padne číslo větší než 3“ je $B=\{4,5,6\}$. Hledaná podmíněná pravděpodobnost je
$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

3.4.2. V krabici je 5 koulí, 3 jsou bílé a 2 černé. Vytáhneme postupně dvě koule. Jaká je pravděpodobnost, že první je bílá a druhá černá?
Sestavíme uniformní pravděpodobnostní prostor. Koule očíslujeme 1, 2, 3, (bílé) 4 a 5 (černé). Všech možných vylosování dvou koulí je podle principu nezávislosti $5\times 4=20$.
$$\Omega=\{(i,j):(1\le i,j\le 5)\wedge(i\neq j)\},|\Omega|=5\cdot 4=20.$$
Potom jev „vytáhneme bílou a potom černou kouli“ je
$$A=\{(i,j):(1\le i\le 3)\wedge(4\le j\le 5)\},\quad |A|=3\cdot 2=6.$$

Protože Ω je uniformní, můžeme spočítat pravděpodobnost jevu A jako

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

3.4.3. V krabici je 5 koulí, 3 jsou bílé a 2 černé. Vytáhneme postupně dvě koule. Počítejme: Všechny možnosti, jak mohou dopadnout losování jsou: bílá-bílá, bílá-černá, černá-černá a černá-bílá. Pouze jedna z nich je příznivá: bílá-černá. Dostaneme pravděpodobnost $P = \frac{1}{4}$. Srovnejte s řešením Příkladu 2. Co je špatně? Vysvětlete!
Příslušný pravděpodobnostní prostor

$$\Omega = \{bb, bc, cc, cb\}, |\Omega| = 4$$

není uniformní. Jednotlivé elementární jevy nejsou stejně pravděpodobné! Proto nemůžeme použít vztah $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

3.4.4. V krabici je 5 koulí, 3 jsou bílé a 2 černé. Vytáhneme postupně dvě koule. Počítejme: Všech možností, jak může dopadnout losování je $\binom{5}{2} = 10$. Příznivé jsou ty, kdy vybereme nejprve bílou a potom černou: Dostaneme pravděpodobnost $P = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}}{|\Omega|} = \frac{3\cdot 2}{10} = \frac{3}{5}$. Srovnejte s řešením Příkladu 2. Co je špatně? Vysvětlete!
Chybu jsme udělali při uvažování *neuspořádaných výběrů* dvou kuliček z pěti. Výběr je ve skutečnosti uspořádaný. Příslušný pravděpodobnostní prostor

$$\Omega = \{b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3, b_1c_1, b_1c_2, b_2c_1, b_2c_2, b_3c_1, b_3c_2, c_1c_2\}, |\Omega| = 10$$

je sice uniformní. Jednotlivé elementární jevy jsou stejně pravděpodobné (rozmyslete si podrobně proč!). Avšak výpočet počtu příznivých možností $\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}$ je z principu uspořádaný: zvlášť (první) vybíráme bílou a potom černou. Proto nemůžeme takový vztah použít společně se vztahem pro *neuspořádaný* výběr dvojic.

3.4.5. Z celkové produkce závodu jsou 4% zmetků. Z dobrých výrobků je 75% standardních. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je standardní.
Označím A jev, že výrobek je zmetek. Potom $P(A) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$. Pravděpodobnost doplňkového jevu $\overline{A}$, že výrobek není zmetek, je $P(\overline{A}) = \frac{96}{100} = \frac{24}{25}$.

Dále jev B znamená, že výrobek je standardní. Ze zadání víme $P(B|\overline{A}) = \frac{3}{4}$. Je přirozené předpokládat, že žádný zmetek není standardní, tj. $P(B|A) = 0$.

Pravděpodobnost jevu B vypočítáme, jako součet podmíněných pravděpodobností, kdy jev A nenastal a kdy jev A nastal. Pravděpodobnost, že nastane jev B, vypočítáme

$$P(B) = P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A}) + P(A) \cdot P(B|A) = \frac{24}{25} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{25} \cdot 0 = \frac{72}{100} = \frac{18}{28}.$$

3.5 Střední hodnota

3.5.1. Házíme kostkou, která není spravedlivá, různá čísla padají s různou pravděpodobností. Čísla 1, 2 padnou s pravděpodobností $\frac{1}{5}$, čísla 4, 5 a 6 padnou s pravděpodobností $\frac{1}{7}$. Pravděpodobnost čísla 3 není udána. Jaký je střední počet počtu ok, která na kostce padnou?
Víme, že $p_1 = p_2 = \frac{1}{5}$ a $p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{7}$. Nejprve určíme pravděpodobnost, že padne hodnota 3 jako

$$p_3 = 1 - \frac{2}{5} - \frac{3}{7} = \frac{6}{35}.$$

Nyní zavedeme náhodnou veličinu X udávající počet ok při hodu jednou kostkou a snadno vyčíslíme

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} p_i \cdot i = \frac{1}{5}\cdot 1 + \frac{1}{5}\cdot 2 + \frac{6}{35}\cdot 3 + \frac{1}{7}\cdot 4 + \frac{1}{7}\cdot 5 + \frac{1}{7}\cdot 6 = \frac{3}{5} + \frac{18}{35} + \frac{15}{7} =$$

$$= \frac{21+18+75}{35} = \frac{114}{35} \doteq 3.2571$$

3.5.2. Jaká je střední hodnota počtu šestek, které padnou při hodu pěti kostkami?

Zavedeme náhodnou veličinu X udávající počet šestek při hodu pěti kostkami. Jistě je $X \in [0,5]$. Nyní $E(X) = \sum_{i=0}^{5} p_i h_i$ je obtížné vypočítat, protože musíme znát hodnoty $p_1, p_2, \ldots, p_5$. Jednodušší je zavést náhodnou veličinu Y, která udává počet šestek při hodu jednou kostkou. Nyní $E(Y) = p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot 1 = 0 + \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}$. Nyní $E(X) = E(Y) + E(Y) + E(Y) + E(Y) + E(Y) = 5E(Y) = \frac{5}{6}$.

3.5.3. Máme šestistěnnou kostku.

a) Jaký je průměrný součet čísel na horní a spodní stěně kostky vyrobené tak, že 1 je naproti 6, 2 naproti 5 a 3 naproti 4?

   Je-li X náhodná veličina udávající číslo na horní stěně kostky a Y náhodná veličina udávající číslo na spodní stěně kostky, tak střední hodnota součtu $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3.5 + 3.5 = 7$.

b) Jaký je průměrný součet čísel na horní a spodní stěně kostky vyrobené tak, že 1 je naproti 2, 3 naproti 5 a 4 naproti 6?

   Je-li X náhodná veličina udávající číslo na horní stěně kostky a Y náhodná veličina udávající číslo na spodní stěně kostky, tak střední hodnota součtu $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3.5 + 3.5 = 7$.

3.5.4. Máme dva sáčky s kuličkami. V prvním sáčku jsou dvě kuličky s číslem 2 a tři kuličky s číslem 3. Ve druhém sáčku jsou 3 kuličky s číslem 4 a 2 kuličky s číslem 5. Taháme z obou sáčků po jedné kuličce. Jaký je průměrný součet tažených čísel?

Označíme X náhodnou veličinu udávající číslo tažené z prvního sáčku. Pro první sáček je $P(2) = \frac{2}{5}$ a $P(3) = \frac{3}{5}$, neboť losování jedné kuličky můžeme modelovat uniformním pravděpodobnostním prostorem Ω s pěti elementárními jevy – podle toho, která byla tažena kulička. Potom je

$$E(X) = 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{4+9}{5} = \frac{13}{5}.$$

Označíme Y náhodnou veličinu udávající číslo tažené z prvního sáčku. Analogicky jako v předchozím případě odvodíme, že pro druhý sáček je $P(4) = \frac{3}{5}$ a $P(5) = \frac{2}{5}$. Potom je

$$E(Y) = 4 \cdot \frac{3}{5} + 5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{12+10}{5} = \frac{22}{5}.$$

Pro součet náhodných veličin platí

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{13}{5} + \frac{22}{5} = \frac{35}{5} = 7.$$

Průměrný součet tažených čísel je 7.

3.5.5. Uměli byste rozmístit čísla 1 až 6 na spravedlivou kostku tak, aby střední hodnota součtu horní a spodní stěny byla jiná než 7?

Označme X náhodnou veličinu udávající číslo na horní a Y na dolní stěně kostky. Podle Věty o součtu středních hodnot je $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3.5 + 3.5 = 7$. Proto pro spravedlivou kostku takové rozdělení není možné.

3.5.6. Najděte vhodná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_6$ a rozmístěte je na spravedlivou kostku tak, aby střední hodnota součtu horní a spodní stěny byla jiná než průměr hodnot a_1 až a_6 vynásobený dvěma.

Označme X náhodnou veličinu udávající číslo na horní a Y na dolní stěně kostky. Podle Věty o součtu středních hodnot je $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 \cdot E(X)$. Proto pro spravedlivou kostku takové rozdělení není možné.

3.5.7. Najděte vhodná celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_6$ a rozmístěte je na spravedlivou kostku tak, aby střední hodnota součinu horní a spodní stěny byla jiná než průměr hodnot a_1 až a_6 umocněný na druhou.

Stačí vzít klasickou kostku: Označme X náhodnou veličinu udávající číslo na horní a Y na dolní stěně kostky. Zatímco $E(X) \cdot E(Y) = 3.5^2 = 12.25$, tak

$$E(X \cdot Y) = \frac{1}{3} \cdot (1 \cdot 6) + \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 5) + \frac{1}{3} \cdot (3 \cdot 4) = \frac{1}{3}(6+10+12) = \frac{28}{3} = 9.\overline{3}.$$

3.5.8.* Najděte vhodná různá celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_6$ a rozmístěte je na spravedlivou kostku tak, aby střední hodnota součinu horní a spodní stěny byla stejná jako průměr hodnot a_1 až a_6 umocněný na druhou.
Označme X náhodnou veličinu udávající číslo na horní a Y na dolní stěně kostky. Označíme dvojice protilehlých stěn 1 a 6, -1 a -6, 0 a 12. Potom $E(X) = \frac{1}{6}(1+6-1-6+0+12) = \frac{12}{6} = 2$ a platí $E(X)^2 = 4$. Navíc pro

$$E(X \cdot Y) = \frac{1}{3}(1 \cdot 6) + \frac{1}{3}(-1 \cdot -6) + \frac{1}{3}(0 \cdot 12) = 2 + 2 + 0 = 4.$$

Nebo obecněji: Označíme dvojice protilehlých stěn 1 a k, -1 a $-k$, 0 a ?

3.5.9. Kolik je třeba průměrně hodů mincí, aby vyšly dva stejné výsledky?
Zavedeme náhodnou proměnnou X, která udává počet hodů. X nabývá hodnot 2 nebo 3. Během prvních dvou hodů jsou možné čtyři různé výsledky (se stejnou pravděpodobností), přičemž dva z nich znamenají úspěch již při druhém hodu. Proto pravděpodobnost, že uspějeme již v druhém hodu je $p_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Jev „je potřeba tři hody“ je doplňkový, proto $P_3 = 1 - p_2 = \frac{1}{2}$. Celkem máme

$$E(X) = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{5}{2}.$$

3.5.10.* Kolik je třeba průměrně hodů mincí, kde hlava má pravděpodobnost p (p nemusí být $\frac{1}{2}$), aby vyšly dva stejné výsledky?
Zavedeme náhodnou proměnnou X, která udává počet hodů. X nabývá hodnot $2, 3$. Průměrný počet hodů je její střední hodnota $E(X)$. Při prvních dvou hodech mohou nastat čtyři případy:

1. HH s pravděpodobností $p_{HH} = p \cdot p = p^2$
2. HO s pravděpodobností $p_{HO} = p \cdot (1-p) = p - p^2$
3. OH s pravděpodobností $p_{OH} = (1-p) \cdot p = p - p^2$
4. OO s pravděpodobností $p_{OO} = (1-p) \cdot (1-p) = (1-p)^2$

Dva stejné výsledky dostaneme po druhém hodu (HH, OO) s pravděpodobností

$$p_2 = p^2 + (1-p^2) = p^2 + 1 - 2p + p^2 = 2p^2 - 2p + 1.$$

Pokud nepadne stejný výsledek při druhém hodu, musí padnout při třetím hodu s pravděpodobností

$$p_3 = 1 - p_2 = 1 - (2p^2 - 2p + 1) = 2p - 2p^2 = 2p(1-p).$$

Střední hodnota se vypočítá

$$E(X) = \sum_{i=2}^{3} i \cdot p_i = 2p_2 + 2p_3 = 2 \cdot (2p^2 - 2p + 1) + 3 \cdot 2p(1-p) = -2p^2 + 2p + 2 = 2(1 + p - p^2).$$

Pro $p = \frac{1}{2}$ dostaneme

$$E(X) = 2\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{2(4+2-1)}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$$

ale pro $p = \frac{1}{3}$ bude střední hodnota menší

$$E(X) = 2\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right) = \frac{2(9+3-1)}{9} = \frac{22}{9} = 2.\overline{4}$$

Najdeme maximum funkce $E(X) = 2(1 + p - p^2)$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ v závislosti na parametru p.

$$(E(X))' = 2(0 + 1 - 2p) = 2(1 - 2p) = 0.$$

Extrém nastává pro $p = \frac{1}{2}$. Jedná se o maximum, neboť podle druhé derivace

$$(E(X))'' = -4p < 0.$$

se jedná o konkávní funkci. Minimální hodnoty 2 nabývá funkce $E(X)$ na krajích oboru pro $p = 0$ a $p = 1$.

3.5.11.* Kolik je třeba průměrně hodů spravedlivou mincí, aby padla první hlava?

Náhodná veličina X udávající počet hodů do prvního úspěchu nabývá hodnot $1, 2, \ldots$. Je $X \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Při prvním hodu uspějeme s pravděpodobností $p_1 = \frac{1}{2}$, při druhém s pravděpodobností $p_2 = (1-p_1)\frac{1}{2} = (1-\frac{1}{2})\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Při i-tém hodu uspějeme s pravděpodobností $p_i = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^i}$. Podle definice střední hodnoty je

$$\begin{aligned}
E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} &= \\
= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots &+ \\
+ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots &+ \\
+ \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots &=
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{2^i} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

3.5.12.* Kolik je třeba průměrně hodů mincí, kde hlava má pravděpodobnost p (p nemusí být $\frac{1}{2}$), aby padla první hlava?

Náhodná veličina X udávající počet hodů do prvního úspěchu nabývá hodnot $1, 2, \ldots$. Platí $X \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Při prvním hodu uspějeme s pravděpodobností $p_1 = p$, při druhém s pravděpodobností $p_2 = (1-p)p = p - p^2$. Při i-tém hodu uspějeme s pravděpodobností $p_i = (1-p)^{i-1} \cdot p$. Podle definice střední hodnoty je

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot i = \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1} \cdot p \cdot i = \frac{p}{1-p} \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^i \cdot i =$$

$$\begin{aligned}
= \frac{p}{1-p} \big((1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + (1-p)^4 + \cdots &+ \\
+ (1-p)^2 + (1-p)^3 + (1-p)^4 + \cdots &+ \\
+ (1-p)^3 + (1-p)^4 + \cdots \big) &=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p}{1-p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^i + \sum_{i=2}^{\infty} (1-p)^i + \sum_{i=3}^{\infty} (1-p)^i + \cdots \right) = \\
&= \frac{p}{1-p} \left(\frac{1-p}{1-(1-p)} + \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)} + \frac{(1-p)^3}{1-(1-p)} + \cdots \right) = \\
&= \frac{p}{1-p} \left(\frac{1-p}{p} + \frac{(1-p)^2}{p} + \frac{(1-p)^3}{p} + \cdots \right) = \\
&= \frac{p}{1-p} \cdot \frac{1-p}{p} \left(1 + (1-p) + (1-p)^2 + \cdots \right) = \\
&= 1 + (1-p) + (1-p)^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

3.5.13. Jaká je střední hodnota počtu políček, o které se vaše figurka přesune v jednom kole hry „Člověče, nezlob se!“, pokud se

a) po třetí šestce za sebou již znovu nehází? $\left[\frac{301}{72}\right]$

b) opakovaně hází dokud padají šestky? $\left[\frac{21}{5}\right]$

3.5.14. Při objednávání obědů u terminálu vedle jídelny nevíte, která jídla jsou k dispozici a která ne. Jestliže tři z pěti jídel již není možné objednat. Jaký je střední počet pokusů než si objednáme jídlo, které se ještě vaří?

Označme X náhodnou veličinu udávající počet pokusů, než se nám podaří objednat. Při čtvrtém pokusu si již musíme objednat.

$$p_1 = \frac{2}{5}, \quad p_2 = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10}, \quad p_3 = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{5}, \quad p_4 = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{1}{10}.$$

Potom

$$E(X) = p_1\cdot 1 + p_2\cdot 2 + p_3\cdot 4 + p_4\cdot 4 = \frac{2}{5} + \frac{3}{10}\cdot 2 + \frac{1}{5}\cdot 3 + \frac{1}{10}\cdot 4 = \frac{4+6+6+4}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

3.5.15. Při objednávání obědů u terminálu vedle jídelny nevíte, která jídla jsou k dispozici a která ne. Je-li v menu výběr z n jídel a jestliže $k \le n$ je počet jídel z pěti, která je možno objednat, jaký je střední počet pokusů než si objednáme jídlo, které se ještě vaří?

Označme X náhodnou veličinu udávající počet pokusů, než se nám podaří objednat. Je-li $k = n$, tak objednáme již při prvním pokusu.

$$E(X) = p_1\cdot 1 = 1\cdot 1 = 1.$$

Je-li $k = n-1$, tak objednáme při prvním pokusu s pravděpodobností $\frac{n-1}{n}$ a jistě při druhém pokusu (k němu dospějeme s pravděpodobností $\frac{1}{n}$).

$$E(X) = p_1\cdot 1 + p_2\cdot 2 = \frac{n-1}{n}\cdot 1 + \frac{1}{n-1}\cdot 2 = \frac{n-1+2}{n} = \frac{n+1}{n}.$$

Obecně, je-li $1 \le k \le n$, tak pravděpodobnost úspěchu při i-tém pokusu znamená, že prvních $i-1$ pokusů bylo neúspěšných a i-tý pokus byl úspěšný.

$$p_i = \frac{n-k}{n}\cdot\frac{n-k-1}{n-1}\cdots\frac{n-k-i+2}{n-i+2}\cdot\frac{k}{n-i+1} = \frac{(n-k)!}{(n-k-i+1)!}\cdot\frac{(n-i)!}{n!}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n-k} p_i\cdot i = \sum_{i=1}^{n-k}\frac{(n-k)!}{(n-k-i+1)!}\cdot\frac{(n-i)!}{n!}\cdot i = \frac{(n-k)!}{n!}\sum_{i=1}^{n-k}\frac{(n-i)!}{(n-i-k+1)!}\cdot i$$

Je-li $k = 0$, tak si jídlo neobjednáme.

3.6 Náhodné výběry

3.6.1. Máme sedmiprvkovou množinu A.

a) S jakou pravděpodobností vybereme náhodně jednu konkrétní pětiprvkovou podmnožinu mezi všemi pětiprvkovými podmnožinami?

Uniformní pravděpodobnostní prostor má $|\Omega| = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$. Jedna pevně zvolená pětiprvková množina bude vybrána s pravděpodobností $P = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{21}$.

b) S jakou pravděpodobností vybereme náhodně jednu konkrétní pětiprvkovou podmnožinu mezi všemi podmnožinami?

Uniformní pravděpodobnostní prostor má $|\Omega| = |2^A| = 2^7 = 128$. Jedna pevně zvolená pětiprvková množina bude vybrána s pravděpodobností $P = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{128}$.

c) S jakou pravděpodobností vybereme náhodně některou pětiprvkovou podmnožinu mezi všemi podmnožinami?

Uniformní pravděpodobnostní prostor má $|\Omega| = |2^A| = 2^7 = 128$. Pětiprvkových podmnožin je $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$. některou pětiprvkovou množinu vybereme s pravděpodobností $P = \frac{21}{|\Omega|} = \frac{21}{128}$.

3.6.2. S jakou pravděpodobností vybereme náhodně jednu k-prvkovou podmnožinu n-prvkové množiny?
Uniformní pravděpodobnostní prostor má $|\Omega| = \binom{n}{k}$. Jedna pevně zvolená k-prvková množina bude ze všech k-prvkových podmnožin vybrána s pravděpodobností $P = \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

3.6.3. S jakou pravděpodobností vybereme náhodně k-prvkovou podmnožinu mezi všemi podmnožinami n-prvkové množiny?
Uniformní pravděpodobnostní prostor má $|\Omega| = |2^A| = 2^n$ prvků. k-prvkových podmnožin je $\Omega| = \binom{n}{k}$. k-prvkovou podmnožinu vybereme s pravděpodobností $P = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$.

3.6.4. Jaká je pravděpodobnost, že náhodná podmnožina n-prvkové množiny obsahuje jeden pevně zvolený prvek?
Uniformní pravděpodobnostní prostor má $|\Omega| = |2^A| = 2^n$ prvků. Podmnožin, které prvek obsahují je $|2^{A\setminus\{x\}}| = 2^{n-1}$. Pravděpodobnost je $P = \frac{2^{n-1}}{2^2} = \frac{1}{2}$.

3.6.5. Máme náhodnou posloupnost čtyř bitů.

a) S jakou pravděpodobností se jedná o „0011“? $\left[\frac{1}{16}\right]$

b) S jakou pravděpodobností obsahuje dvě jedničky a dvě nuly?

Posloupností se dvěma jedničkami je $\binom{4}{2} = 6$. Pravděpodobnost v uniformním pravděpodobnostním prostoru je $P = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

3.6.6. S jakou pravděpodobností obsahuje více jedniček než nul?

Posloupností se třemi jedničkami je $\binom{4}{3} = 4$ a se čtyřmi jedničkami jediná. Pravděpodobnost v uniformním pravděpodobnostním prostoru je $P = \frac{4+1}{16} = \frac{5}{16}$.

3.6.7. Máme náhodnou permutaci pětiprvkové množiny.

a) Jakou pravděpodobnost má jedna náhodná permutace? $\left[\frac{1}{120}\right]$

b) Jakou pravděpodobnost má permutace, kde číslo 1 následuje bezprostředně za číslem 2?

Všech permutací je $5! = 120$. Těch, kde je „12“ je $4! = 24$. Celkem $P = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$.

c) Jakou pravděpodobnost má permutace, kde číslo 1 následuje za číslem 2?

V permutaci se objeví všechna čísla, každé právě jedenkrát. Ke každé permutaci, kde následuje číslo 1 za číslem 2 můžeme přiřadit právě jednu permutaci, kde následuje číslo 2 za číslem 1 – tu, kde jsou prohozená. Proto je polovina permutací taková, že číslo 1 následuje za číslem 2 a příslušná pravděpodobnost je $\frac{1}{2}$.

d) Jakou pravděpodobnost má permutace, kde čísla 1, 2 jsou vedle sebe?

Na dva prvky 1 a 2 se podíváme jako na jednu dvojici a počítáme permutace čtyř prvků. Čísla 1 a 2 mohou být v libovolním počadí, proto máme celkem $P(4) \cdot P(2) = 24 \cdot 2 = 48$ možností. Příslušná pravděpodobnost je $P = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$.

3.7 Příklady k procvičení

3.7.1. Házíme opakovaně spravedlivou mincí.

a) Jaká je pravděpodobnost, že při šesti hodech mincí padne hlava i orel stejněkrát?

Uniformní pravděpodobnostní prostor má 2^6 prvků, přičemž $\binom{6}{3}$ z nich odpovídají hodům, kdy padne hlava. Proto hledaná pravděpodobnost je $\frac{\binom{6}{3}}{2^6} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$.

b) Jaká je pravděpodobnost, že při n hodech mincí padne hlava i orel stejněkrát?

Označíme $n = 2h$. Uniformní pravděpodobnostní prostor má 2^n prvků, přičemž $\binom{n}{\frac{n}{2}} = \binom{2h}{h}$ z nich odpovídají hodům, kdy padne hlava. Proto hledaná pravděpodobnost je $\frac{\binom{n}{h}}{2^n}$.

3.7.2. Máme zamíchaný balíček 32 karet. Vytáhneme postupně dvě karty. Jaká je pravděpodobnost, že

a) obě karty budou esa?

Všech možností dvou tažených karet je $V(32, 2) = 32 \cdot 31$. Dvě esa můžeme vytáhnout $V(4, 2) = 4 \cdot 3$ způsoby. Hledaná pravděpodobnost je $P = \frac{4 \cdot 3}{32 \cdot 31} = \frac{3}{8 \cdot 31} = \frac{3}{248}$.

b) obě karty budou devítka a desítka (v tomto pořadí)?

Všech možností dvou tažených karet je $V(32, 2) = 32 \cdot 31$. První devítku můžeme vytáhnout čtyřmi způsoby a druhou desítku také. Hledaná pravděpodobnost je $P = \frac{4 \cdot 4}{32 \cdot 31} = \frac{1}{2 \cdot 31} = \frac{1}{62}$.

c) obě karty budou devítka a desítka (v libovolném pořadí)?

Všech možností dvou tažených karet je $V(32, 2) = 32 \cdot 31$. Devítku můžeme vytáhnout čtyřmi způsoby a desítku také. Jsou dvě přípustná pořadí. Hledaná pravděpodobnost je $P = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4}{32 \cdot 31} = \frac{1}{31}$.

d) ani jedna karta nebude král?

Všech možností dvou tažených karet je $V(32, 2) = 32 \cdot 31$. Příznivé tahy neobsahují krále: $V(28, 2) = 28 \cdot 27$ Hledaná pravděpodobnost je $P = \frac{28 \cdot 27}{32 \cdot 31} = \frac{7 \cdot 27}{8 \cdot 31} = \frac{189}{248}$.

e) obě karty budou stejné barvy?

Všech možností dvou tažených karet je $V(32, 2) = 32 \cdot 31$. Příznivé tahy jsou jedné ze čtyř barev: $\binom{4}{1} \cdot V(8, 2) = 4 \cdot 8 \cdot 7$ Hledaná pravděpodobnost je $P = \frac{4 \cdot 8 \cdot 7}{32 \cdot 31} = \frac{7}{31}$.

3.7.3. Kuchař upustil omylem do polévky dva různé prsteny. Všechna polévka byla rozdělena mezi 25 hostů, z toho 8 žen. Jaká je pravděpodobnost, že

a) oba prsteny dostane jedna osoba? $\left[\frac{1}{25}\right]$

b) prsteny budou mít v polévce dva muži? $\left[\frac{272}{625}\right]$

c) prsteny nebude mít v polévce žádný muž? $\left[\frac{64}{625}\right]$

d) prsteny budou mít v polévce jeden muž a jedna žena? $\left[\frac{272}{625}\right]$

e) prsteny budou mít v polévce dvě ženy? $\left[\frac{56}{625}\right]$

f) Jak se pravděpodobnosti změní, jestliže prsteny budou stejné? [pravděpodobnosti se nezmění]

3.7.4. Hodíme dvěma šestistěnnými kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že větší číslo bude m?
V uniformním pravděpodobnostním prostoru je celkem 36 možností. Pokud na první kostce padne m, tak na druhé může padnout libovolná z m hodnot menších nebo rovných m a podobně naopak. Možnost m, m je započítána dvakrát, proto celkový počet možností, kdy padne m je $2m-1$. Pravděpodobnost je $P = \frac{2m-1}{36}$.

3.7.5. V šuplíku máme rozházených po 6 ponožkách od každé z barev černá, šedá a bílá. Kolik ponožek musíme průměrně vytáhnout (postupně a poslepu), abychom dostali jednobarevný pár? Nerozlišujeme levou a pravou ponožku.
Nejméně musím vytáhnout dvě ponožky, nejvíce čtyři. Při druhém pokusu uspějeme s pravděpodobností $p_2 = \frac{5}{17}$, při třetím s pravděpodobností $p_3 = \frac{12}{17} \cdot \frac{10}{16} = \frac{15}{34}$ a při čtvrtém s pravděpodobností $p_4 = \frac{12}{17} \cdot \frac{6}{16} = \frac{9}{34}$. Střední hodnota počtu tahů je $E(X) = 2 \cdot \frac{5}{17} + 3 \cdot \frac{15}{34} + 4 \cdot \frac{9}{34} = \frac{20+45+36}{34} = \frac{101}{34}$.

3.7.6. V šuplíku máme rozházených po p ponožkách od každé z b barev. Kolik ponožek musíme průměrně vytáhnout (postupně a poslepu), abychom dostali jednobarevný pár? Nerozlišujeme levou a pravou ponožku.

3.7.7.* Magnet má dva póly, které se přitahují. Barevné dětské magnetky mají na sobě umělohmotnou čepičku. Čepička zakrývá celý jeden pól magnetu, proto přitahovat se mohou pouze jedním pólem. Magnetky jsou balené po 40 kusech, 10 od každé ze čtyř barev. Předpokládejme, že zakryté póly těchto magnetků jsou zvoleny náhodně s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Jaká je pravděpodobnost, že těchto 40 magnetků lze pospojovat do 5×4 stejnobarevných dvojic tak, že každá dvojice se navzájem přitahuje opačnými nezakrytými póly?

Pro každou ze čtyř barev můžeme udělat (nezávisle) volbu deseti magnetů. Z deseti pólů bude párováná existovat, jestliže bude zakryto právě pět severních pólů z deseti. Celkem existuje 2^{10} různých zakrytí a právě $\binom{10}{5}$ z nich odpovídá těm možnostem, které je možno sprárovat.

Pravděpodobnot vhodného začepičkování pro jednu barvu je

$$P_i = \frac{\binom{10}{5}}{2^{10}}$$

Pro různé barvy jsou volby nezávislé, proto je pravděpodobnost pro celé balení dána

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 = \left(\frac{\binom{10}{5}}{2^{10}}\right)^4 = \left(\frac{252}{1024}\right)^4 = \left(\frac{63}{256}\right)^4 = \frac{15752961}{4294967296}.$$

3.7.8. Hra *Tic-tac-toe* je hra s tužkou a papírem pro dva hráče X a O, kteří střídavě zapisují křížky a kolečka do čtvercové sítě políček 3×3, viz Cvičení 2.3.35. Při řešení využijte výsledku Cvičení 2.3.35.

a) Jaká je střední hodnota počtu tahů do vítězství, jestliže remízy nebudeme uvažovat (předpokládáme, že remíza nemůže nastat). Předpokládejme, že každá hra má stejnou pravděpodobnost (což nemusí být pravda).

Podle Cvičení 2.3.35. víme, že existuje

- 1440 různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje X v pátém tahu,
- 5328 různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje O v šestém tahu,
- 47952 různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje X v sedmém tahu,
- 72576 různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje O v osmém tahu,
- 81792 různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje X v pátém tahu a
- 46080 různých her Tic-tac-toe, které končí remízou.

Hry, které končí remízou, nebudeme uvažovat. Existuje proto celkem $1440 + 5328 + 47952 + 72576 + 81792 = 209088$ různých her, které končí vítězstvím. Podle předpokladu má každá z nich stejnou pravděpodobnost.

Zavedeme náhodnou veličinu Z, která udává počet tahů hry Tic-tac-toe. Z může nabývat hodnot 5 až 9. Pravděpodobnost jednotlivých možností je

$$p_5 = \frac{1440}{209088}, \quad p_6 = \frac{5328}{209088}, \quad p_7 = \frac{47952}{209088}, \quad p_8 = \frac{72576}{209088}, \quad p_9 = \frac{81792}{209088}.$$

Podle definice střední hodnoty je střední hodnota počtu tahů hry Tic-tac-toe

$$E(Z) = 5p_5 + 6p_6 + 7p_7 + 8p_8 + 9p_9 =$$

$$= 5 \cdot \frac{1440}{209088} + 6 \cdot \frac{5328}{209088} + 7 \cdot \frac{47952}{209088} + 8 \cdot \frac{72576}{209088} + 9 \cdot \frac{81792}{209088} =$$

$$= \frac{1691568}{209088} = \frac{11747}{1452} \doteq 8.0902.$$

b)* Jaká je střední hodnota počtu tahů do prvního vítězství, jestliže remízy započítáme jako 9 tahů a další hra pokračuje dalším (desátým) tahem. Předpokládejme, že každá hra má stejnou pravděpodobnost (což nemusí být pravda).

Podle Cvičení 2.3.35. víme, že existuje

- 1440 různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje X v pátém tahu,
- 5328 různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje O v šestém tahu,
- 47952 různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje X v sedmém tahu,
- 72576 různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje O v osmém tahu,
- 81792 různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje X v pátém tahu,
- 46080 různých her Tic-tac-toe, které končí remízou a
- 255168 všech různých her.

Podle předpokladu má každá z her stejnou pravděpodobnost.

Zavedeme náhodnou veličinu X, která udává počet tahů hry Tic-tac-toe do prvního vítězství a náhodnou veličinu Y, která udává počet tahů hry Tic-tac-toe v jedné hře. X může nabývat hodnot z množiny $[5, \infty]$. Pravděpodobnost jednotlivých možností je

$$p_5 = \frac{1440}{255168}, \quad p_6 = \frac{5328}{255168}, \quad p_7 = \frac{47952}{255168},$$
$$p_8 = \frac{72576}{255168}, \quad p_9 = \frac{81792}{255168}, \quad p_r = \frac{46080}{255168}.$$

a dále

$$p_{5+9} = p_r \cdot \frac{1440}{255168}, \quad p_{6+9} = p_r \cdot \frac{5328}{255168}, \quad p_{7+9} = p_r \cdot \frac{47952}{255168}, \quad \ldots, \quad p_{r_2} = p_r^2, \quad \ldots$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= 5p_5 + 6p_6 + 7p_7 + 8p_8 + 9(p_9 + p_r) = \\ &= 5 \cdot \frac{1440}{255168} + 6 \cdot \frac{5328}{255168} + 7 \cdot \frac{47952}{255168} + 8 \cdot \frac{72576}{255168} + 9 \cdot \frac{81792 + 46080}{255168} \\ &= \frac{2106288}{255168} = \frac{14627}{1772} \doteq 8.2545. \end{aligned}$$

Podle stejného výpočetního schématu jako ve hře „Člověče nezlob se!“ budeme počítat

$$\begin{aligned} E(X) &= E(Y) + p_r E(Y) + p_r^2 E(Y) + \cdots = E(Y)\left(1 + p_r + p_r^2 + \cdots\right) = \\ &= E(Y) \cdot \frac{1}{1 - p_r} = \frac{2106288}{255168} \cdot \frac{1}{1 - \frac{46080}{255168}} = \frac{2106288}{255168} \cdot \frac{1}{\frac{255168-46080}{255168}} = \\ &= \frac{2106288}{255168 - 46080} = \frac{2106288}{209088} = \frac{14627}{1452} \doteq 10.074. \end{aligned}$$

3.7.9. Krabice dřevěných dětských vláčků obsahuje jednu lokomotivu a tři vagónky. Vagónky a lokomotiva se spojují pomocí magnetů. Lokomotiva má jeden magnet a každý vagónek má magnety dva – na každém konci jeden. Póly magnetů jsou otočeny tak, aby bylo možno zapojit do vláčku všechny vagónky a to v libovolném pořadí.

a) S jakou pravděpodobností by se dal sestavit vláček s vagónky v libovolném pořadí, pokud by v továrně orientaci magnetů přiřazovali náhodně?

   Vláček má celkem 7 magnetů a všech možností je proto $V(2,7) = 2^7 = 128$. Rozlišíme dvě možnosti, kdy můžeme vagónky vláčku zapojit v libovolném pořadí.

   - Pokud má každý vagónek oba póly magentu a mašinka může mít polaritu magnetu libovolně, tj. 2 možnosti pro mašinku a 2 možnosti pro každý vagónek, což celkem dává $2 \cdot V(2,3) = 2 \cdot 2^3 = 2^4 = 16$ možností.
   - Pokud má právě jeden vagónek oba magnety stejné polarity (ale opačné než mašinka) a ostatní vagónky mají oba nesouhlasně orientované póly magentu. Mašinka může mít polaritu magnetu libovolně. Dostáváme navíc 2 možnosti pro mašinku (a současně jeden vagónek) a 2 možnosti pro každý zbývající vagónek, což celkem dává $2 \cdot V(2,2) = 2 \cdot 2^2 = 2^3 = 8$ možností.

Dva vagónky nemohou mít oba magnety stejné polarity, protože pokud mají oba stejnou polaritu, nepůjdou zapojit za sebe a pokud mají oba různou, nepůjde jeden z nich zapojit za mašinku. Dostali jsme tak $16 + 8 = 24$ možností.

Pravděpodobnost, s jakou by se dal sestavit vláček s vagónky v libovolném pořadí, je

$$P = \frac{24}{128} = \frac{3}{16}.$$

b)* Uměli byste předchozí úlohu zobecnit pro n vagónků?

Magnetů je $2n + 1$ a mohou být orientovány libovolně. Máme $V^*(2, 2n + 1) = 2^{2n+1}$ možností.

Spojení je n (stejně jako vagónků) a nastane jedna ze tří možností:

1. každý vagónek má nesouhlasnou orientaci pólů, mašinka je orientována libovolně,
2. mašinka má orientaci S a jeden vagónek má oba magnetky opačně orientované,
3. mašinka má orientaci L a jeden vagónek má oba magnetky opačně orientované.

Pro každý vagónek máme dvě možnosti, jak magnetky (nesouhlasně) zorientovat. Počet možností v prvním případě je $2 \cdot V^*(2, n) = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Počet možností v druhém a třetím případě dohromady je $2 \cdot V^*(2, n-1) = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, neboť i souhlasně orientovaný vagónek je možno zařadit do soustavy kamkoliv. Celkem máme

$$\frac{2^{n+1} + 2^n}{2^{2n+1}} = \frac{3 \cdot 2^n}{2^{2n+1}} = \frac{3}{2^{n+1}}.$$

c) S jakou pravděpodobností by se dal sestavit vláček s vagónky v alespoň jednom pořadí, pokud by v továrně orientaci magnetů přiřazovali náhodně?

Tento příklad je speciálním případem obecného postupu z následující varianty. Proto hledaná pravděpodobnost, s jakou by se dal sestavit vláček s vagónky v alespoň jednom pořadí, je

$$\frac{\binom{2n+1}{n}}{2^{2n}} = \frac{\binom{7}{3}}{2^6} = \frac{35}{64}.$$

d)* Uměli byste předchozí úlohu zobecnit pro n vagónků?

Stačí si uvědomit, že při jakémkoliv přiřazení magnetků, které umožní alespoň jedno pořadí sestavení vláčku, je počet severních a jižních pólů „skoro“ stejný, liší se právě o jedna. Řekněme, že počty pólů jsou „vyvážené“.

Každý vagónek s rozdílnou orientací magnetků je možno zařadit do soupravy na libovolné místo. A každý vagónek se stejnou orientací obou magnetů si při vyváženém rozdělení pólů vynutí existenci jiného vagónku (případně lokomotivy) s opačnou orientací pólů. Tyto souhlasně orientované vagónky (resp. vagónek s lokomotivou) tvoří vždy dvojice. Tyto dvojice je pak možno zapojit do soupravy bezprostředně za sebe a dostaneme část soupravy, která má na obou koncích různé póly (a lze ji jako celek zařadit kamkoliv), případně emuluje lokomotivu s jedním pólem.

To znamená, že při jakémkoliv vyváženém rozdělení magnetků lze sestavit celý vláček. Naopak, každý sestavený láček má díky tomu, že se přitahují opačně orientované magnety, vyváženou orientaci magnetků.

Všech možných orientací magnetků ve vlaku s n vagónky je je $V^*(2, 2n + 1) = 2^{2n+1}$ a vyvážených orientací je $2 \cdot C(2n + 1, n) = 2 \cdot \binom{2n+1}{n}$. Hledaná pravděpodobnost, s jakou by se dal sestavit vláček s vagónky v alespoň jednom pořadí, je

$$P = \frac{2 \cdot \binom{2n+1}{n}}{2^{2n+1}} = \frac{\binom{2n+1}{n}}{2^{2n}}.$$

3.7.10. V balíčku je 8 karet, dvě od každé barvy. Balíček pečlivě rozmícháme. S jakou pravděpodobností dostaneme takové rozmíchání, ve kterém nejsou žádné dvě karty stejné barvy vedle sebe?

Postupujeme principem inkluze a exkluze Všech uspořádání je 8! Odečteme počet takových možností, kdy jsou dvě karty jisté vybrané barvy vedle sebe (4 barvy, 2 možná pořadí), tvoří slepenec dvou karet a uspořádáváme 7 karet (jedna z nich je slepená dvoukarta). Takových možností je $\binom{4}{1} \cdot 2 \cdot 7!$. To jsme ale odečetli některá uspořádání dvakrát, a sice ta, kdy jsou vedle sebe dvě dvojice karet. Příslušný počet $\binom{4}{2} \cdot 2^2 \cdot 6!$ zase přičteme. Tak postupujeme dále přičteme počet uspořádání se třemi vybranými dvojicemi a osečteme uspořádání se čtyřmi dvojicemi až určíme hlednaý počet pořadí osmi karet, ve kterých se dvě karty stejné barvy nevyskytují vedle sebe.

$$8! - \binom{4}{1} \cdot 2 \cdot 7! + \binom{4}{2} \cdot 2^2 \cdot 6! - \binom{4}{3} \cdot 2^3 \cdot 5! + \binom{4}{4} \cdot 2^4 \cdot 4! = 13824.$$

Příslušná pravděpodobnost pak je

$$\frac{13824}{40320} = \frac{12}{35}.$$

3.7.11. Jaký je střední počet hodů šestistennou kostkou než padne každá stěna alespoň jednou?

3.7.12. Čtyřicet sportovců bude rozděleno na čtyři stejně početné skupiny. Jaká je pravděpodobnost, že dva konkrétní sportovci A a B budou ve stejné skupině?

Předpokládáme, že každé rozdělení sportovců do čtyř skupin po deseti je stejně pravděpodobné. Takových rozdělení je $\binom{40}{10}\binom{30}{10}\binom{20}{10}\binom{10}{10}$. Máme-li dva sportovce A a B v některé ze čtyř skupin, můžeme vybrat zbývajících 8 celkem $\binom{38}{8}$ způsoby a zbývající skupiny celkem $\binom{30}{10}\binom{20}{10}\binom{10}{10}$. Proto hledaná pravděpodobnost je

$$\frac{4\binom{38}{8}\binom{30}{10}\binom{20}{10}\binom{10}{10}}{\binom{40}{10}\binom{30}{10}\binom{20}{10}\binom{10}{10}} = \frac{4\binom{38}{8}}{\binom{40}{10}} = \frac{4 \cdot (38 \cdot 37 \cdots 31)10!}{8!(40 \cdot 39 \cdots 31)} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 9}{40 \cdot 39} = \frac{9}{39} = \frac{3}{13}.$$

3.7.13. S jakou pravděpodobností bude přijato binární slovo délky 8 znaků, které obsahuje čtyři nuly, jestliže zdroj signálu generuje 7krát více nul než jedniček?

Zdroj signálu můžeme modelovat pravděpodobnostním prostorem, kde $\Omega = \{0, 1\}$ a navíc $P(0) = \frac{7}{8}$ a $P(1) = \frac{1}{8}$. Všech binárních slov s osmi znaky, která obsahují čtyři nuly, je $P(4, 4) = \frac{8!}{4!4!} = 70$. Každé z nich se objeví s pravděpodobností $\left(\frac{7}{8}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{7^4}{8^8}$.

Všechna binární slova z osmi znaků tvoří pravděpodobnostní prostor s množinou Ω' obsahující 256 slov. Jev A „bude přijato slovo se čtyřmi nulami a čtyřmi jedničkami“ tvoří podmnožinu se 70 prvky, každý s pravděpodobností $\frac{7^4}{8^8}$. Pravděpodobnost jevu A je součtem pravděpodobností jednotlivých prvků, proto

$$P(A) = 70 \cdot \frac{7^4}{8^8} = \frac{70 \cdot 7^4}{8^8} = \frac{5 \cdot 7^5}{2^2 3} = \frac{84035}{8388608} \doteq 0.010018.$$

3.7.14. V televizní soutěži se otáčí kolo štěstí. Na kole je 100 oblastí, z toho 60 odpovídá výhře 100 Kč, 30 odpovídá výhře 1000 Kč a 10 oblastí výhře 5000 kč. Jaká je střední hodnota výhry?

Nejprve určíme pravděpodobnosti jednotlivých výher.

$$p_{100} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}, \quad p_{1000} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}, \quad p_{5000} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}.$$

Jedno losování kola štěstí popíšeme náhodnou veličinou X, kde $X \in \{100, 1000, 5000\}$. Střední hodnotu určíme dle vztahu

$$E(X) = p_{100}100 + p_{1000}1000 + p_{5000}5000 = \frac{300}{5} + \frac{3000}{10} + \frac{5000}{10} = \frac{600 + 3000 + 5000}{10} = \frac{8600}{10} = 860.$$

3.7.15. Basketbalista hází dvakrát na koš. V prvním hodu trefí koš s pravděpodobností $\frac{7}{10}$. Potom v druhém hodu trefí koš s pravděpodobností $\frac{8}{10}$. Pokud ale v prvním hodu netrefí, tak v druhém hodu uspěje s pravděpodobností jen $\frac{6}{10}$. Jaká je pravděpodobnost, že basketbalista při druhém hodu trefí koš?

Označme si jev, kdy basketbalista trefí koš jako T, kdy kdy trefí v prvním hodu jako J a kdy trefí trefí v druhém hodu jako D. My však známe pouze pravděpodobnost v prvním hodu $P(J) = \frac{7}{10}$ a podmíněné pravděpodobnosti $P(D|J) = \frac{8}{10}$ a $P(D|\overline{J}) = \frac{6}{10}$. Platí $P(T) = P(J)P(D|J) + (1 - P(J))P(D|\overline{J}) = \frac{7\cdot 8}{100} + \frac{3\cdot 6}{100} = \frac{56+18}{100} = \frac{84}{100} = \frac{21}{25}$.

4 Další početní postupy

4.1 Motivační příklady

4.1.1. Kolik čísel zůstane v množině čísel $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ po vyškrtání všech násobků $2, 3, 5$?
Označme A_i množinu všech násobků čísla i mezi čísly v množině $[1, 1000]$.

- Násobků dvojky je $|A_2| = \frac{1000}{2} = 500$.
- Násobků trojky je $|A_3| = \lfloor\frac{1000}{3}\rfloor = 333$ (pracujeme s každým třetím číslem).
- Násobků pětky je $|A_5| = \frac{1000}{5} = 200$.
- Násobků $2 \cdot 3 = 6$ je $|A_6| = \lfloor\frac{1000}{6}\rfloor = 166$.
- Násobků $2 \cdot 5 = 10$ je $|A_{10}| = \frac{1000}{10} = 100$.
- Násobků $3 \cdot 5 = 15$ je $|A_{15}| = \lfloor\frac{1000}{15}\rfloor = 66$.
- Násobků $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ je $|A_{30}| = \frac{1000}{30} = 33$.

Užitím principu inkluze a exkluze určíme, kolik čísel vyškrtáme.

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| =$$

$$= |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_6| - |A_{10}| - |A_{15}| + |A_{30}| = 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734.$$

Celkem dostaneme

$$1000 - |A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 1000 - 734 = 266.$$

4.1.2. Na večírku se sešly 3 manželské páry. Kolika různými způsoby lze posadit těchto 6 lidí kolem kulatého stolu tak, aby manželé neseděli vedle sebe?
Od všech možností $(n-1)! = 5! = 120$ odečteme všech x možností, kdy alespoň jeden manželský pár sedí vedle sebe. Můžeme vybrat $\binom{3}{1}$ způsoby pár, který bude sedět vedle sebe. Jsou 2 možnosti jak tyto dva manžele usadit. Zbývající 4 lidi můžeme posadit 4! způsoby. Pro dva páry vybereme $\binom{3}{2}$ způsoby dva páry, které sedí vedle sebe. Pro každý pár jsou 2 možnosti jak tyto dva manžele usadit. Zbývají 2 lidé (a jeden pár), které usadíme kolem stolu. Zbývající 2 lidi můžeme posadit 2! způsoby. Dostaneme

$$x = \binom{3}{1} \cdot 2 \cdot 4! - \binom{3}{2} \cdot 2^2 \cdot (2+1)! + \binom{3}{3} \cdot 2^3 \cdot (0+2)! = 88.$$

Celkem máme

$$5! - x = 120 - 88 = 32$$

možností, jak posadit 6 lidí kolem kulatého stolu tak, aby manželé neseděli vedle sebe.

4.1.3. Ukažte, že platí

$$\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} = n^3$$

$$\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} = n + 6\frac{n(n-1)}{2} + 6\frac{n(n-1)(n-2)}{6} =$$

$$= n + 3n(n-1) + n(n-1)(n-2) = n + 3n^2 - 3n + n^3 - 3n^2 + 2n = n^3.$$

4.2 Princip inkluze a exkluze

Podrobněji si o principu inkluze a exkluze můžete přečíst ve skriptech [ZDM].

4.2.1. Kolik čísel zůstane v množině čísel $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ po vyškrtání všech násobků $2, 3, 5, 7$?

- Násobků dvojky je $\frac{1000}{2} = 500$.
- Násobků trojky je $\lfloor\frac{1000}{3}\rfloor = 333$.
- Násobků pětky je $\frac{1000}{5} = 200$.
- Násobků sedmičky je $\lfloor\frac{1000}{7}\rfloor = 142$.
- Násobků $2 \cdot 3 = 6$ je $\lfloor\frac{1000}{6}\rfloor = 166$.
- Násobků $2 \cdot 5 = 10$ je $\frac{1000}{10} = 100$.
- Násobků $2 \cdot 7 = 14$ je $\lfloor\frac{1000}{14}\rfloor = 71$.
- Násobků $3 \cdot 5 = 15$ je $\lfloor\frac{1000}{15}\rfloor = 66$.
- Násobků $3 \cdot 7 = 21$ je $\lfloor\frac{1000}{21}\rfloor = 47$.
- Násobků $5 \cdot 7 = 35$ je $\lfloor\frac{1000}{35}\rfloor = 28$.
- Násobků $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ je $\frac{1000}{33} = 33$.
- Násobků $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ je $\lfloor\frac{1000}{42}\rfloor = 23$.
- Násobků $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ je $\lfloor\frac{1000}{70}\rfloor = 14$.
- Násobků $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ je $\lfloor\frac{1000}{105}\rfloor = 9$.
- Násobků $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ je $\lfloor\frac{1000}{210}\rfloor = 4$.

Celkem dostaneme z principu inkluze a exkluze

$$1000 - 500 - 333 - 200 - 142 + 166 + 100 + 71 + 66 + 47 + 28 - 33 - 23 - 14 - 9 + 4 = 228.$$

4.2.2. Kolika způsoby je možno vybrat pět karet z balíčku 52 karet tak, aby mezi nimi byla od každé barvy alespoň jedna karta?

Úlohu vyřešíme užitím principu inkluze a exkluze. Označme si A_i počet všech možných výběrů 5 karet z balíčku 52 karet, ve kterých chybí barva i. Pochopitelně $|A_i| = |A_j|$, pro všechny dvojice barev i, j. Všimněte si, že $|A_i \cap A_j|$ odpovídá těm výběrům pěti karet, kde chybí obě barvy i, j.

Od celkového počtu všech výběrů $C(52, 5) = \binom{52}{5}$ odečteme všechny výběry obsažené v $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$. Dle principu inkluze a exkluze určíme

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \binom{4}{1}|A_1| - \binom{4}{2}|A_1 \cap A_2| + \binom{4}{3}|A_1 \cap A_2 \cap A_3| - \binom{4}{4}|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| =$$

$$= \binom{4}{1}\binom{39}{5} - \binom{4}{2}\binom{26}{5} + \binom{4}{3}\binom{13}{5} - 0.$$

Slovy můžeme říci: od celkového počtu výběrů pěti karet $\binom{52}{5}$

- odečteme možnosti, kdy chybí alespoň jedna barva: $\binom{4}{1}\binom{39}{5}$,
- přičteme možnosti, kdy chybí alespoň dvě barvy: $\binom{4}{2}\binom{26}{5}$,
- odečteme možnosti, kdy chybí alespoň tři barvy: $\binom{4}{3}\binom{13}{5}$.

Čtyři barvy chybět nemohou. Dostaneme

$$\binom{52}{5} - 4\binom{39}{5} + 6\binom{26}{5} - 4\binom{13}{5} + 0 = 685\,464.$$

4.2.3. Na večírku se sešly 4 manželské páry. Kolika různými způsoby lze posadit těchto 8 lidí kolem kulatého stolu tak, aby manželé neseděli vedle sebe?

Postupujeme podobně jako u předchozího příkladu. Od všech možností $(n-1)! = 7! = 5040$ odečteme všech x možnosti, kdy alespoň jeden manželský pár sedí vedle sebe.

Obecně, počet možností, kdy pro některých i manželských párů sedí manželé vedle sebe a pro zbývající páry rozesazení může být libovolné, spočítáme podle vztahu

$$\binom{4}{i}\frac{(8-i)!}{8}2^i = \binom{4}{i}(7-i)!2^i.$$

Počet všech nevhodných rozesazení je

$$x = \binom{4}{1}6!\cdot 2^1 - \binom{4}{2}5!\cdot 2^2 + \binom{4}{3}4!\cdot 2^3 - \binom{4}{4}3!\cdot 2^4 =$$

$$= 4\cdot 720\cdot 2 - 6\cdot 120\cdot 4 + 4\cdot 24\cdot 8 - 1\cdot 6\cdot 16 = 3552.$$

Celkem dostaneme

$$5040 - x = 5040 - 3552 = 1488$$

možností, jak posadit 8 lidí kolem kulatého stolu tak, aby manželé neseděli vedle sebe.

4.2.4.* Na večírku se sešlo n manželských párů. Kolika různými způsoby lze posadit těchto $2n$ lidí kolem kulatého stolu tak, aby manželé *neseděli* vedle sebe? Ve dvou rozdílných rozesazeních má některý člověk jiného souseda po levé nebo po pravé ruce.

4.2.5.* Na plese se sešlo n manželských párů. Kolika různými způsoby může spolu tančit vždy všech $2n$ lidí tak, aby žádný manželský pár netančil spolu?

4.2.6.* (Problém šatnářky) Na shromáždění přišlo n hostů, všichni v kloboucích, a odloží si své klobouky do šatny. Při odchodu dostávají své klobouky náhodně. Jaká pravděpodobnost, že žádný pán nedostane svůj klobouk zpět?

Šatnářka dělá permutaci π nějaké n-prvkové množiny. Označíme S_n permutace, kde některý prvek se zobrazí sám na sebe (tzv. pevný bod) a N_n kdy se žádný prvek nezobrazí sám na sebe.

Označíme A_i takovou permutaci, kde pro i-tý člen platí $\pi(i) = i$ a hledáme

$$S_n = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|.$$

Snadno nahlédneme, že

$$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| = \binom{n}{k}(n-k)!$$

a z principu inkluze a exkluze je

$$S_n = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)! = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-1}\frac{n!}{k!}.$$

Dále počet všech možností, kdy není ani jeden pevný bod je

$$N_n = n! - S_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{n!}{n!} = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

Hledaná pravděpodobnost je

$$P(n) = \frac{N_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{i!} \approx \frac{1}{e}.$$

4.2.7. Na shromáždění přišlo 5 hostů, všichni v kloboucích, a odloží si své klobouky do šatny. Při odchodu dostávají své klobouky náhodně. Jaká pravděpodobnost, že žádný pán nedostane svůj klobouk zpět?
Podle předchozího příkladu dostaneme

$$P(5) = \frac{N_5}{5!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} =$$
$$= \frac{120}{60 - 20 + 5 - 1} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30}.$$

4.2.8. Máme dva zamíchané balíčky 32 karet. Z každého obrátíme shora vždy jednu kartu. Jaká je pravděpodobnost, že nikdy nebudou vytaženy dvě stejné karty?
Jeden balíček zafixujeme (můžeme si představit, že není zamíchaný), druhý nesmí mít stejnou kartu v témže pořadí. Označíme A_i počet možností, kdy se shodují balíčky na i-té pozici.

Je zřejmé, že se jedná o stejnou úlohu jako problém šatnářky. Podle příkladu dříve dostaneme

$$P(32) = \frac{N_{32}}{32!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{32}\frac{1}{32!} = \sum_{i=0}^{32}(-1)^i\frac{1}{i!} \approx \frac{1}{e}.$$

Rozdíl aproximace a přesného výsledku je až na 36 desetinném místě, proto stačí uvažovat $\frac{1}{e}$.

4.2.9. Kolika způsoby rozmístíme r objektů do pěti schránek tak, aby alespoň jedna byla prázdná?
$\left[\binom{5}{1}4^r - \binom{5}{2}3^r + \binom{5}{3}2^r - \binom{5}{4}1^r + 0\right]$

4.2.10. Kolik existuje n prvkových posloupností čísel $0, 1, \ldots, 9$ takových, které obsahují vždy čísla $1, 2$ a 3? Čísla se mohou opakovat.
Všech posloupností je $V(10, n) = 10^n$. Těch, které neobsahují některou číslici je $V(9, n) = 9^n$, které neobsahují dvě číslici je $V(8, n) = 8^n$ a které neobsahují tři číslice je $V(7, n) = 7^n$. Podle principu inkluze a exkluze máme počet hledaných posloupností

$$10^n - 3 \cdot 9^n + 3 \cdot 8^n - 7^n.$$

4.3 Kombinatorické identity

4.3.1. Upravte výraz $\binom{2n}{n-2} + \binom{2n}{n+3}$ na jediné kombinační číslo.

$$\binom{2n}{n-2} + \binom{2n}{n+3} = \binom{2n}{n-2} + \binom{2n}{2n-(n+3)} = \binom{2n}{n-2} + \binom{2n}{n-3} = \binom{2n+1}{n-2}$$

4.3.2. Upravte výraz $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{4}$ na jediné kombinační číslo.
Nejprve si všimneme, že $\binom{n}{0} = 1$ a proto si můžeme napsat $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$. Nyní upravíme:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{4} =$$
$$= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{4} =$$
$$= \binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{4} = \binom{n+3}{2} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{4} =$$
$$= \binom{n+4}{3} + \binom{n+4}{4} = \binom{n+5}{4}$$

4.3.3.* Upravte výraz $\sum_{i=0}^{k}\binom{n+i}{i}$ na jediné kombinační číslo.
Sumu si rozepíšeme

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n+i}{i} = \binom{n+0}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+k}{k}.$$

Protože $\binom{n+0}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$, můžeme první dvě kombinační čísla sečíst

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k}.$$

Podobně můžeme sečíst další dvě kombinační čísla

$$\binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+3}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k}$$

a po k krocích dostaneme

$$\binom{n+k}{k-1} + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$$

4.3.4. Pro jaká n platí $C(n-1,3) + C(n+2,3) + 10 = P(n,3)$?
Řešíme rovnici

$$\binom{n-1}{3} + \binom{n+2}{3} + 10 = \frac{(n+3)}{n!3!}.$$

$$\frac{(n-1)!}{(n-4)!3!} + \frac{(n+2)!}{(n-1)!3!} + 10 = \frac{(n+3)!}{n!3!}.$$

Vynásobíme 3! a vykrátíme.

$$(n-1)(n-2)(n-3) + (n+2)(n+1)n + 60 = (n+3)(n+2)(n+1).$$

Nyní upravíme

$$\begin{aligned}
(n-1)(n-2)(n-3) + (n+2)(n+1)n + 60 &= (n+3)(n+2)(n+1)\\
(n-1)(n-2)(n-3) + 60 &= (n+3)(n+2)(n+1) - (n+2)(n+1)n\\
(n^2-3n+2)(n-3) + 60 &= 3(n+2)(n+1)\\
n^3 - 3n^2 + 2n - 3n^2 + 9n - 6 + 60 &= 3(n^2+3n+2)\\
n^3 - 9n^2 + 2n + 48 &= 0.
\end{aligned}$$

Podle Eisensteinova kriteria má tato rovnice kořeny $-2, 3, 8$. Hodnota $n = -2$ nevyhovuje zadání, rovnice platí pouze pro hodnoty $n = 3, 8$.

4.3.5. Ukažte, že platí

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Nejlépe kombinatoricky: Vezmeme n červených a n modrých různých (očíslovaných) kuliček. Kolika způsoby můžeme vybrat n kuliček z $2n$? Pokud nerozlišujeme barvy, existuje $\binom{2n}{n}$ možností. Pokud rozlišujeme barvy, je ve výběru vždy i červených a $n-i$ modrých kuliček, proto je celkem

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2.$$

Protože oba počty se sobě rovnají, dostáváme

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{i} = \binom{2n}{n}.$$

Jiné řešení:
Stačí vzít čísla $1, 2, \ldots, 2n$ a rozlišovat nebo nerozlišovat při výběru n čísel počet sudých a lichých čísel.

4.3.6. Zdůvodněte (kombinatoricky, bez výpočtu kombinačních čísel), že platí

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

Mějme množinu čísel $A = [1, 2n]$. Vezmeme libovolné neuspořádané dvojice z A. Dvojic {sudé, sudé} je $\binom{n}{2}$, dvojic {liché, liché} také $\binom{n}{2}$ a dvojic {sudé, liché} je $n \cdot n = n^2$. Všech dvojic je $\binom{2n}{2}$. Celkem

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{2} + n^2 = 2\binom{n}{2} + n^2 = \binom{2n}{2}.$$

4.3.7.* Sečtěte $1 + 2\binom{n}{1} + \cdots + (k+1)\binom{n}{k} + \cdots + (n+1)\binom{n}{n}$.
Výraz si rozepíšeme

$$\begin{aligned}
1 + 2\binom{n}{1} + \cdots + (k+1)\binom{n}{k} + \cdots + (n+1)\binom{n}{n} &= \\
= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n} &+ \\
+ \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n} &+ \\
+ \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n} &+ \\
\vdots \qquad & \\
+ \binom{n}{n} &=
\end{aligned}$$

Pokud by v řádcích nechyběly žádné výrazy, tak máme $(n+1)$ krát stejný součet 2^n, protože $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Prvky ve schematu „na diagonále“ dávají součet 2^n. Prvky mimo diagonálu jsou započítany dvakrát. Dostaneme

$$= \frac{1}{2}\left((n+1)\,2^n + 2^n\right) = (n+2)2^{n-1}.$$

4.3.8.* Ukažte, že platí

$$\binom{n}{1} + 3\binom{n}{3} + 5\binom{n}{5} + \cdots = 2\binom{n}{2} + 4\binom{n}{4} + 6\binom{n}{6} + \cdots$$

4.3.9. Vypočítejte

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

$\left[3!\binom{n+1}{4}\right]$

4.3.10. Vypočítejte $\sum_{k=1}^{n} (k^2+1)k!$
Nejprve upravíme sčítanec $(k^2+1)k! = (k+2)! - 3(k+1)! + 2k!$. Nyní vidíme, že členy se v sumě odečtou a zůstane $(n+1)!n$.

4.3.11. Vypočítejte $\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}k(k+1)!$
Nejprve upravíme sčítanec $2^{n-k}k(k+1)! = (k+2)!2^{n-k} - 2^{n-k+1}(k+1)!$. Nyní vidíme, že členy se v sumě odečtou a zůstane $(n+2)! - 2^{n+1}$.

4.3.12. Vypočítejte $\sum_{i=0}^{k} \binom{2n-k}{n-i}\binom{k}{i}$ kde $k \le n$
Postupujeme kombinatoricky. Vezměme nějakou $2n$ prvkovou množinu, rozdělíme ji na dvě části: k-prvkovou a $(2n-k)$-prvkovou. Potom vybíráme n prvků tak, že z jedné části vybereme i prvků a z druhé $n-i$ prvků. Protože suma je přes všechna $i = 0, 1, \ldots, k$, tak dostaneme všechny n-prvkové podmnožiny $2n$-prvkové množiny a součet je proto $\binom{2n}{n}$.

4.4 Binomická věta

4.4.1. Kolik sčítanců dostaneme po umocnění trojčlenu $(a+b+c)^7$? Úlohu řešte kombinatorickou úvahou, nikoliv rozepisováním binomického rozvoje.
Pokud roznásobíme všech 7 závorek a sečteme odpovídající členy, bude každý člen obsahovat sedm součinitelů, každý se může opakovat v libovolném počtu kopií (0 až 7). Nebude však hrát roli pořadí, v jakém bylo sedm součinitelů ze tří možností vybráno, proto počet členů je roven počtu kombinací tříprvkové množiny $\{a,b,c\}$ s možností opakování. Existuje celkem $C^*(3,7)=\binom{7+3-1}{3-1}=\binom{9}{2}=\frac{9\cdot 8}{2}=36$ různých členů.
Poznámka:
Obdobně pro druhou mocninu dostaneme známý vztah $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$ se šesti členy, neboť $C^*(3,2)=\binom{2+3-1}{3-1}=\binom{4}{2}=6$.
Poznámka:
Pokud rozlišujeme i všechny sčítance se stejnými členy, například členy $a^4b^2c^1$ a $a^3b^2ac^1$ považujeme za různé, tak se jedná o výběr, kdy ze tří součinitelů vybíráme sedmkrát s možností opakování, přičemž rozlišujeme pořadí součinitelů. Takových sčítanců je $V^*(3,7)=3^7=2187$.

4.4.2. Roznásobíme výraz $(2+x)^{12}$. Jaký koeficient bude

a) u členu x^5?

Podle binomické věty máme $(2+x)^{12}=\sum_{i=0}^{12}\binom{12}{i}\cdot 2^i\cdot x^{12-i}$. Člen x^5 dostaneme pro $i=7$, proto koeficient u x^5 bude $\binom{12}{7}\cdot 2^7=\binom{12}{5}\cdot 2^7=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\cdot 128=11\cdot 9\cdot 8\cdot 128=101\ 376$.

b) u členu x^7?

Člen x^7 dostaneme pro $i=5$, proto koeficient u x^7 bude $\binom{12}{5}\cdot 2^5=\binom{12}{5}\cdot 2^5=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\cdot 32=11\cdot 9\cdot 8\cdot 32=25\ 344$.

c) u členu x^{10}?

Člen x^{10} dostaneme pro $i=2$, proto koeficient u x^{10} bude $\binom{12}{2}\cdot 2^2=\frac{12\cdot 11}{2}\cdot 4=66\cdot 4=264$.

d) u členu x^{15}?

Takový člen v binomickém rozvoji $(2+x)^{12}$ není.

4.5 Důkazy počítáním

4.5.1. Existují na VŠB–TUO dva studenti se stejným posledním čtyřčíslím rodného čísla?
Ano, posledních čtyřčíslí je 10000 a studentů více (asi 17000).

4.5.2. Ukažte, že na Zemi žijí dva lidé se stejným počtem vlasů.
Stačí si uvědomit, že obvyklý počet vlasů člověka je mnohem menší, že počte lidí na světě. Obvyklý počet je 100 000 až 150 000 vlasů. Pokud si představíme přihrádky, které budou odpovídat počtu vlasů, tak protože lidí je mnohem více než přihrádek, musí podle Dirichletova principu alespoň v jedné přihrádce být alespoň dva lidé. Tito pak mají stejný počet vlasů.

4.5.3. V místnosti je n lidí. Každý z nich má v místnosti několik známých (třeba i žádného). Předpokládáme, že relace „mít známého“ je symetrická. Ukažte, že někteří dva lidé mají v místnosti stejný počet známých.
Protože relace „mít známého“ je symetrická, tak v místnosti nemůže být současně jeden člověk, který zná všechny, a druhý člověk, který nezná nikoho. Rozlišíme dva případy:

1. je-li v místnosti člověk, který nezná nikoho, pak počet známých může nabývat hodnot $0,1,\ldots,n-2$ (nikoliv $n-1$). Máme tak nejvýše $n-1$ různých hodnot počtu známých pro n lidí a podle Dirichletova principu alespoň dva musí mít stejný počet známých.

2. není-li v místnosti člověk, který nezná nikoho, pak počet známých může nabývat hodnot $1,\ldots,n-1$ (nikoliv $n-1$). Opět máme nejvýše $n-1$ různých hodnot počtu známých pro n lidí a podle Dirichletova principu alespoň dva musí mít stejný počet známých.

4.5.4. Máte 4 různá čísla od 1 do n ($n \geq 4$). Ukažte, že některá dvě dávají sudý součet. Kolik nejméně čísel zaručí sudý součet?
Máme-li alespoň tři čísla, tak alespoň dvě jsou (podle Dirichletova principu) stejné parity (sudé či liché). Tato dvě čísla dávají sudý součet.

4.5.5. Máte 4 různá čísla od 1 do n ($n \geq 4$). Ukažte, že na rozdíl od Příkladu 4 nemusí žádná dvě dávat lichý součet.
Stačí vzít čtyři čísla se setjnou paritou. SOučet každých dvou je pak sudý.

4.5.6. Máte k různých čísel od 1 do n ($n \geq k \geq 2$). Pro jaké nejmenší k máme zaručeno, že některá dvě dávají lichý součet.
Pro lichý součet musíme mít alespoň dvě čísla s opačnou paritou. Mezi čísly $1, 2, \ldots, n$ je nejvýše $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ čísel se stejnou paritou. Bude li čísel alespoň $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$, tak alespoň dvě jsou s různou paritou a jejich součet bude lichý.

4.5.7. Na čtrnáctidenní dovolenou jelo 20 lidí. Každé odpoledne hrají stolní tenis. U každého ze dvou stolů se hraje postupně šest zápasů, vždy proti sobě hrají dva hráči. Ukažte, že někteří dva lidé spolu během celé dovolené nehráli.
Všech dvojic, které mají spolu hrát, je $\binom{20}{2} = 10 \cdot 19 = 190$. U jednoho stolu hraje vždy jedna dvojice, za jedno odpoledne se odehraje celkem $2 \cdot 6 = 12$ zápasů a za 14 dní $12 \cdot 14 = 168$ zápasů. Protože ale různých dvojic je 190, jistě spolu některá dvojice nehrála.

4.5.8. V Plzni se v městský dopravních prostředcích štípají lístky. Po Plzni jezdí 150 tramvají, 90 trolejbusů a 120 autobusů. Ukažte, že pokud se štípe vždy 3, 4 nebo 5 políček z devíti, tak musí být v některých vozech stejné kombinace.
Počet možných různých kombinací je

$$\binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} = 84 + 126 + 126 = 336.$$

Po městě jezdí celkem $150 + 90 + 120 = 360$ vozů. Podle Dirichletova principu musí být v některých vozech stejné kombinace, neboť $336 < 360$.

4.5.9.* Ukažte, že vyřízneme-li z šachovnice dva protilehlé rohy, potom není možné šachovnici pokrýt dominovými kostkami.
Protilehlé rohy mají stejnou barvu, na zbytku šachovnice je více políček jedné barvy. Dominová kostka pokryje vždy dvě políčka různé barvy a proto musí vždy alespoň dvě políčka stejné barvy zůstat nepokrytá.

4.5.10.* Ze šachovnice odebereme dvě políčka různé barvy. Ukažte, že je možno pokrýt dominem.
[hamiltonovská cesta, lze rozdělit]

4.5.11. Ukažte, že neexistuje univerzální bezztrátový kompresní algoritmus, tj. taková kompresní funkce, která libovolnou posloupnost n bajtů zkompresuje na posloupnost délky menší než n.
Je-li A množina všech posloupností n znaků a B množina všech posloupností méně než n znaků (bytů), tak kompresní algoritmus každému prvku A přiřadí nějaký prvek v B (funkce $f : A \to B$). Aby komprese byla bezztrátová, musí být f injektivní (různým vstupům různé výstupy, aby inverzní zobrazení bylo jednoznačné = byla funkce). Aby existovala injekce, musí být $|A| \leq |B|$, ale

$$|A| = V^*(256, n) = 256^n,$$

$$|B| = \sum_{i=1}^{n-1} V^*(256, i) = \sum_{i=1}^{n-1} 256^i = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} =$$

$$= 256\frac{(256^n - 1)}{256 - 1} > 255\frac{(256^n - 1)}{255} = 256^n - 1.$$

4.6 Příklady k procvičení

4.6.1. Kolik nul na konci má

a) číslo 50!?

Nulu na konci dostaneme za každou dvojici 2 a 5 v součinu 50! Ke každému násobku čísla 5 ($5t$) jistě najdeme násobek 2 ($2t$). Stačí spočítat počet pětek v součinu 50!. Každé páté číslo obsahuje 5 (je jich 10) a dvě z nich (25 a 50 obsahují pětky dvě). Celkem jich je dvanáct, proto číslo 50! obsahuje na konci 12 nul.

$$50! = 30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000.$$

b) číslo 1234!?

Podobně jako v předchozím příkladu, nyní stručněji: každé páté číslo přinese do součinu faktor 5, každé 25 dalších 5, každé 125 dalších pět atd.

$$\left\lfloor \frac{1234}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1234}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1234}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1234}{625} \right\rfloor = 246 + 49 + 9 + 1 = 305.$$

Ke každému násobku čísla 5 ($5t$) jistě najdeme násobek 2 ($2t$), proto má 1234! na konci 305 nul.

4.6.2. Pomocí vhodné kombinatorické interpretace a použitím principu inkluze a exkluze spočítejte následující sumu pro n, m, j přirozená taková, že $n \geq j \geq (m + n)$, t.j. vyjádřete tuto sumu jako nějaký výraz, který už bude bez sumy:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{m+n-i}{j-i}$$

Žeby

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{m+n-i}{j-i} = \binom{m}{j}$$

Máme n nachových a m modrých kuliček. Dvěma způsoby spočítáme, jak je možno vybrat j modrých kuliček. Buď vybíráme pouze j kuliček z n nachových, nebo máme modré i nachové pomíchané. Pak vybereme j kuliček z $n + m$ kuliček, ale od všech možností

$$\binom{m+n}{j} = (-1^0) \binom{n}{0} \binom{m+n-0}{j}$$

odečteme ty možnosti, kdy jsme vybrali jednu nachovou kuličku a zbytek libovolně $\binom{n}{1}\binom{m+n-1}{j}$, přičteme ty, kdy jsme vybrali dvě nachové kuličky a zbytek libovolně $\binom{n}{2}\binom{m+n-2}{j}$, atd.

4.6.3. Dokažte, že platí

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{n-1}{r} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Základ indukce: Pro $n = r$ dostaneme $\binom{r}{r} = 1 = \binom{r+1}{r+1}$ a tvrzení platí.
Indukční krok: Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké n. Ukážeme, že platí i pro $n + 1$, tj. $\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{n-1}{r} + \binom{n}{r} + \binom{n+1}{r} = \binom{n+2}{r+1}$. Upravíme

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{n-1}{r} + \binom{n}{r} + \binom{n+1}{r}$$

a podle indukčního předpokladu můžeme psát

$$= \binom{n+1}{r+1} + \binom{n+1}{r} = \binom{n+2}{r+1}.$$

4.6.4. Ukažte, že pro libovolných $n+1$ přirozených čísel z množiny $[1, 2n]$ existují taková dvě čísla, že jedno je násobek druhého.

Každé číslo x mezi 1 a $2n$ můžeme napsat jako součin mocniny 2 a lichého čísla, tj. ve tvaru $x = 2^r q$, kde q je liché číslo mezi 1 a $2n$ a $r \in \mathbb{N}$. Avšak takových lichých čísel je maximálně n (každé druhé číslo je sudé). Proto podle Dirichletova principu existují mezi vybranými $n+1$ čísly alespoň dvě různá čísla $m_1 < m_2$, která jsou dělitelná q. Protože $m_1 = 2^{r_1} q$ a $m_2 = 2^{r_2} q$, tak m_1 dělí m_2.

4.6.5. Z aritmetické posloupnosti $1, 4, 7, 10, \ldots, 100$ vybereme libovolně 19 členů. Dokažte, že mezi nimi existují dvě čísla, jejichž součet je 104.

Všech čísel v dané posloupnosti je $34 = 1 + (100 - 1)/3$.

Uvědomíme si, že pokud ve vybrané množině je číslo 4, nemůže v ní být 100 a naopak. Pokud vybereme číslo 7, tak vybraná množina nemůže obsahovat číslo 97, tj. s každým číslem větším nebo rovno 4 vyloučíme jedno jiné číslo (s výjimkou čísel 1 a 52). Tj. v množině vybraných čísel (s omezením bez součtu 104) může být nejvýše $2 + 32/2 = 18$ čísel. Podle zadání máme čísel 19 a tak dle Dirichletova principu alespoň jedna dvojice čísel dává součet 104.

4.6.6. Ukažte, že v množině libovolných $k+1$ celých čísel existuje alespoň jedna dvojice čísel, jejichž rozdíl je dělitelný číslem k.

Rozdělíme-li libovolnou množinu $k+1$ celých čísel do k přihrádek podle toho, jaký dávají zbytek po dělení číslem k. Dle Dirichletova principu jsou v alespoň jedné přihrádce alespoň dvě čísla, která dávají stejný zbytek po dělení číslem k. Rozdíl těchto dvou čísel je potom dělitelný číslem k.

4.6.7. Je daných přirozených 33 čísel, jejichž prvočíselné dělitele jsou z množiny $\{2, 3, 5, 7, 11\}$. Dokažte, že můžeme z nich vybrat dvě taková čísla, že jejich součin je čtverec (druhá mocnina přirozeného čísla).

Součin takových dvou čísel bude čtverec právě tehdy, když bude prvočíselný rozvoj obsahovat všechna prvočísla v sudé mocnině. Všech možností, jak zvolit mocniny prvočísel (zda sudé nebo liché) je $2^5 = 32$ (máme 5 prvočísel). My však máme 33 čísel a proto podle Dirichletova principu alespoň dvě musí mít stejnou paritu mocnin prvočísel v rozkladu a jejich součin bude čtverec.

4.6.8. Mějme 18 libovolných prvočísel. Ukažte, že z nich lze vybrat pět prvočísel tak, že rozdíl každé dvojice vybraných prvočísel je dělitelný pěti.

Protože jde o prvočísla, tak zbytek 0 při dělení 5 může dát jen prvočíslo 5. Proto zbývajících alespoň 17 prvočísel (mezi danými 18 prvočísly mohlo být číslo 5, ale nemuselo) musí dávat zbytky 1, 2, 3, nebo 4. Tyto zbytky určí čtyři přihrádky, do kterých prvočísla přiřadíme dle zbytku po dělení 5. Tedy mezi těmito zbývajícími prvočísly musí podle zobecněného Dirichletova principu být alespoň pět, které dávají tentýž zbytek při dělení 5. Těchto pět prvočísel je hledanou pěticí.

4.6.9. Házíme k klasickými kostkami současně. Z množiny l lidí, kde $l > \binom{k+5}{5}$, každý hodí všemi k kostkami najednou. Ukažte, že někteří lidé hodí stejnou kombinaci ok na kostkách.

Nejprve vypočítáme, kolik různých kombinací lze hodit. Jedná se o neuspořádaný výběr z šesti možností s opakováním, jedná se proto o kombinace s opakováním. Celkový počet je $C^*(6,k) = \binom{k+6-1}{6-1} = \binom{k+5}{5} = (k+5)(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)/120$.

Využijeme Dirichletův principu, ve kterém přihrádky odpovídají různým kombinacím puntíků na kostkách a objekty odpovídají lidem, kteří kostkami hází. Pokud je počet lidí l větší než $(k+5)(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)/120$, musí se některá vylosovaná trojice zopakovat.

Pokud je počet kostek menší než 5, je vhodnější použít následující vztah $C^*(6,k) = \binom{k+6-1}{6-1} = \binom{k+5}{k}$.

Pro $k = 2$ dostaneme $\binom{2+5}{2} = 7 \cdot 3 = 21$.

Pro $k = 3$ dostaneme $\binom{3+5}{3} = 8 \cdot 7 \cdot 6/6 = 56$.

Pro $k = 4$ dostaneme $\binom{4+5}{4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6/24 = 126$.

Pro $k = 5$ dostaneme $\binom{5+5}{5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6/120 = 252$.

4.6.10. mějme šachovnici 6×6 políček. Na šachovnici můžeme 18 dílků domina tak, aby každé políčko šachovnice bylo zakryté. Ukažte, že v jakémkoliv pokrytí bude alespoň jedna vodorovná nebo svislá přímá spára, která dělí šachovnici na dvě části.

Spočítáme, že taková spára musí existovat. Na šachovnici najdeme celkem $5+5 = 10$ přímých spár. Důležité je si uvědomit, že žádná spára nemůže být překryta pouze jedním dílkem domina, neboť na každé straně spáry leží vždy *sudý* počet políček šachovnice, a proto musí každá spára být překryta dvěma dílky domina. Žádný dílek domina nezakryje více než jednu spáru, proto na překrytí všech 10 spár potřebujeme alespoň $2 \cdot 10 = 20$ díků domina. To však není možné, neboť na šachovnici se vejde pouze 18 dílků domina.

Je dobré si všimnout, že šachovnici 5×6 políček zakrýt možné je!

5 Rekurentní rovnice

5.1 Motivační příklady

5.1.1. Kolika způsoby můžeme zaplnit šachovnici $2 \times n$ políček, máme-li k dispozici neomezený počet dílků 2×1 a 2×2 políčka?

Nejprve sestavíme rekurentní popis počtu způsobů, jak zaplnit šachovnici $2 \times n$. Rozlišíme dva případy podle posledního přidaného dílku. Pokud poslední dílek je 1×2 přidaný svisle, tak je jediný způsob jak jej přidat k šachovnici $1 \times (n-1)$. Pokud poslední dílek je 1×2 přidaný vodorovně, tak musí být přidané vodorovně dva takové dílky k šachovnici $1 \times (n-2)$. Stejně tak, pokud poslední přidaný dílek je 2×2, tak musí být přidán k šachovnici $1 \times (n-2)$. Dostáváme rekurentní rovnici

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

udávající počet způsobů, jak zaplnit šachovnici $2 \times n$ políček.

Zbývá si uvědomit, jaké jsou počty pro nejmenší přípustné rozměry šachovnice. Pro $n = 1$ můžeme šachovnici 1×2 zaplnit jediným způsobem. Pro $n = 2$ můžeme šachovnici 2×2 zaplnit třemi způsoby (dva dílky 1×2 svisle, dva dílky 1×2 vodorovně, nebo jeden dílek 2×2). Dostáváme počáteční podmínky $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. Mohli bychom přidat podmínku $a_0 = 1$ (jediným způsobem zaplníme prázdnou šachovnici).

Z rekurentní rovnice $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ sestavíme charakteristickou rovnici

$$r^2 - r - 2 = 0,$$

kde r je reálná proměnná. Rovnici vyřešíme

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Charakteristické kořeny jsou $r_1 = 2$, $r_2 = -1$. Obecné řešení rekurentní rovnice bude tvaru

$$a_n = \alpha_1 \cdot r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$$

Abychom určili koeficienty α_1, α_2, sestavíme rovnice dle výchozích podmínek:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 \cdot r_1^1 + \alpha_2 \cdot r_2^1 \\ a_2 &= \alpha_1 \cdot r_1^2 + \alpha_2 \cdot r_2^2 \end{aligned}$$

Dosadíme $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ a dostaneme

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-1) \\ 3 &= \alpha_1 \cdot 4 + \alpha_2 \cdot 1 \end{aligned}$$

Řešení soustavy dostaneme

$$\alpha_1 = \frac{2}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}.$$

Obecné řešení pro $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n.$$

Poznámka:

Pokud bychom využili pozorování, že $a_0 = 1$, tak koeficienty α_1, α_2 získáme vyřešením následující (jednodušší) soustavy rovnic.

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ a_1 &= \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-1) \end{aligned}$$

Sečtením obou rovnic ihned vidíme, že $\alpha_2 = \frac{2}{3}$ a dosazením do první rovnice je $\alpha_1 = 1 - \alpha_2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

5.1.2. Znaky Arkadijského písma sestávají vždy jen z jednoho nebo dvou rovných tahů. Pro jednoduchost si můžeme představit, že písmena se skládají z jedné nebo dvou sirek. Existují 3 různé znaky z jedné sirky a 10 různých znaků ze dvou sirek. Kolik různých posloupností Arkadijských znaků můžeme sestavit z n sirek?

Sestavíme rekurentní vztah udávající počet posloupností znaků z n sirek. Tento počet označíme a_n.

Pro $n = 1$ můžeme podle zadání sestavit 3 různé (posloupností) znaků, proto $a_1 = 3$.

Pro $n = 2$ můžeme podle zadání sestavit $3 \cdot 3 = 9$ různých posloupností dvou znaků po jedné sirce nebo 10 znaků složených ze dvou sirek. Celkem máme $9 + 10 = 19$ různých posloupností znaků, proto $a_2 = 19$.

Pro obecné $n > 2$ rozlišíme dvě možnosti podle toho, zda poslední znak je složen z jedné nebo dvou sirek.

Pokud je poslední znak složen z jediné sirky, tak předchozí znaky jsou sestaveny z $n-1$ sirek a existuje a_{n-1} takových posloupností, za které můžeme připsat některý ze 3 znaků. Pokud je poslední znak složen ze dvou sirek, tak předchozí znaky jsou sestaveny z $n-2$ sirek a existuje a_{n-2} takových posloupností, za které můžeme připsat některý z 10 znaků. Dostaneme rekurentní formuli

$$a_n = 3a_{n-1} + 10a_{n-2}.$$

a počáteční podmínky $a_1 = 3$, $a_2 = 19$.

Z rekurentní rovnice $a_n = 3a_{n-1} + 10a_{n-2}$ sestavíme charakteristickou rovnici

$$r^2 - 3r - 10 = 0,$$

kde r je reálná proměnná. Rovnici vyřešíme

$$r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}.$$

Charakteristické kořeny jsou $r_1 = -2$, $r_2 = 5$. Obecné řešení rekurentní rovnice bude tvaru

$$a_n = \alpha_1 \cdot r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 5^n$$

Abychom určili koeficienty α_1, α_2, sestavíme rovnice dle výchozích podmínek:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 \cdot r_1^1 + \alpha_2 \cdot r_2^1 \\ a_2 &= \alpha_1 \cdot r_1^2 + \alpha_2 \cdot r_2^2 \end{aligned}$$

Dosadíme $a_1 = 3$, $a_2 = 19$ a dostaneme

$$\begin{aligned} 3 &= \alpha_1 \cdot (-2) + \alpha_2 \cdot 5 \\ 19 &= \alpha_1 \cdot 4 + \alpha_2 \cdot 25 \end{aligned}$$

Řešení soustavy dostaneme

$$\alpha_1 = \frac{2}{7}, \quad \alpha_2 = \frac{5}{7}.$$

Obecné řešení pro $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$a_n = \frac{2}{7} \cdot (-2)^n + \frac{5}{7} \cdot 5^n.$$

5.2 Sestavení rekurentní rovnice

5.2.1. Určete řád rekurentních rovnic.

a) $a_n = -1.21a_{n-1}$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici prvního řádu s konstantními koeficienty.

b) $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty.

c) $a_n = a_{n-4}$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici čtvrtého řádu s konstantními koeficienty.

d) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$

Jedná se o homogenní rekurentní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty, která není lineární.

e) $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-3} + 1$

Jedná se o rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty, která není homogenní a není lineární.

f) $a_n = a_{n-1} + n$

Jedná se o lineární rekurentní rovnici prvního řádu, která není homogenní.

5.3 Charakteristická rovnice

5.3.1. K dané rekurentní rovnici sestavte charakteristickou rovnici. Najděte všechny její kořeny.

a) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice je

$$r^2 - 6r + 9 = 0.$$

Má jeden dvojnásobný kořen $r_0 = 3$.

b) $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice je

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0.$$

Má tři různé charakteristické kořeny $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$.

c) $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice je

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0.$$

Má jeden trojnásobný kořen $r_0 = -1$.

d) $a_n = a_{n-1} + 8a_{n-2} - 12a_{n-3}$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice je

$$r^3 - r^2 - 8r + 12 = 0.$$

Má jeden dvojnásobný kořen $r_1 = 2$ a kořen $r_2 = -3$.

5.4 Tvar obecného řešení

5.4.1. Sestavte tvar obecného řešení k rekurentním rovnicím ze sekce 5.3.

a) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^2 - 6r + 9 = 0$ má jeden dvojnásobný kořen $r_0 = 3$. Obecné řešení má tvar

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n.$$

b) $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$ má tři různé charakteristické kořeny $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$. Obecné řešení má tvar

$$a_n = \alpha_1 + \alpha_2 2^n + \alpha_3 3^n.$$

c) $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$ má jeden trojnásobný kořen $r_0 = -1$. Obecné řešení má tvar

$$a_n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2 n(-1)^n + \alpha_3 n^2(-1)^n.$$

d) $a_n = a_{n-1} + 8a_{n-2} - 12a_{n-3}$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^3 - r^2 - 8r + 12 = 0$ má jeden dvojnásobný kořen $r_1 = 2$ a kořen $r_2 = -3$. Obecné řešení má tvar

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 n 2^n + \alpha_3(-3)^n.$$

5.5 Nalezení obecného řešení

5.5.1. Najděte obecné řešení k rekurentním rovnicím ze sekce 5.4 s danými počátečními podmínkami.

a) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ pro $a_0 = 1$, $a_1 = 6$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^2 - 6r + 9 = 0$ má jeden dvojnásobný kořen $r_0 = 3$. Obecné řešení má tvar $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$. Dosazením počátečních podmínek dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 \\ 6 &= \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3. \end{aligned}$$

Řešení soustavy dostaneme $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$. Obecné řešení pro $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$a_n = 3^n + n \cdot 3^n.$$

b) $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ pro $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 15$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$ má tři různé charakteristické kořeny $r_1 = 1$, $r_2 = 2$,

$r_3 = 3$. Obecné řešení má tvar $a_n = \alpha_1 + \alpha_2 2^n + \alpha_2 3^n$. Dosazením počátečních podmínek dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 5 &= \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3 \\ 15 &= \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 9. \end{aligned}$$

Řešení soustavy dostaneme $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 2$. Obecné řešení pro $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n.$$

c) $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$ pro $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = -1$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$ má jeden trojnásobný kořen $r_0 = -1$. Obecné řešení má tvar $a_n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2 n(-1)^n + \alpha_3 n^2(-1)^n$. Dosazením počátečních podmínek dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 \\ -2 &= \alpha_1 \cdot (-1) + \alpha_2 \cdot (-1) + \alpha_3 \cdot (-1) \\ -1 &= \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 4. \end{aligned}$$

Řešení soustavy dostaneme $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = -2$. Obecné řešení pro $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$a_n = (1 + 3n + 2n^2) \cdot (-1)^n.$$

d) $a_n = a_{n-1} + 8a_{n-2} - 12a_{n-3}$ pro $a_0 = 3$, $a_1 = -8$, $a_2 = 56$

Jedná se o lineární homogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^3 - r^2 - 8r + 12 = 0$ má jeden dvojnásobný kořen $r_1 = 2$ a kořen $r_2 = -3$. Obecné řešení má tvar $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 n 2^n + \alpha_3(-3)^n$. Dosazením počátečních podmínek dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3 &= \alpha_1 + \alpha_3 \\ -8 &= \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot (-3) \\ 56 &= \alpha_1 \cdot 4 + \alpha_2 \cdot 8 + \alpha_3 \cdot 9. \end{aligned}$$

Řešení soustavy dostaneme $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 4$. Obecné řešení pro $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$a_n = (-1 + 3n) \cdot 2^n + 4 \cdot (-3)^n.$$

5.6 Tvar partikulárního řešení

5.6.1. Sestavte tvar partikulárního řešení k následujícím rekurentním rovnicím.

a) $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2} + (n+1)3^n$

Jedná se o lineární nehomogenní rekurentní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^2 - 8r + 16 = 0$ přidružené homogenní rovnice má jeden dvojnásobný kořen $r_0 = 4$. Protože základ 3 není kořenem charakteristické rovnice, tak partikulární řešení má tvar

$$a_n^{(p)} = (cn + d)3^n.$$

b) $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2} + (2-n)4^n$

Jedná se o lineární nehomogenní rekurentní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^2 - 8r + 16 = 0$ přidružené homogenní rovnice má jeden dvojnásobný kořen $r_0 = 4$. Protože základ 4 v nehomogenní části $(2-n)4^n$ je kořenem charakteristické rovnice, tak partikulární řešení má tvar

$$a_n^{(p)} = n^2(cn+d)4^n.$$

c) $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3} + n^3$

Jedná se o lineární nehomogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^3 - 7r^2 + 16r - 12 = 0$ přidružené homogenní rovnice má tři charakteristické kořeny $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$. Partikulární řešení má tvar

$$a_n^{(p)} = cn^3 + dn^2 + en + f$$

d) $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3} - 2n4^n$

Jedná se o lineární nehomogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^3 - 7r^2 + 16r - 12 = 0$ přidružené homogenní rovnice má tři charakteristické kořeny $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$. Protože základ 4 není kořenem charakteristické rovnice, tak partikulární řešení má tvar

$$a_n^{(p)} = (cn+d)4^n$$

e) $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3} - 2n2^n$

Jedná se o lineární nehomogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^3 - 7r^2 + 16r - 12 = 0$ přidružené homogenní rovnice má tři charakteristické kořeny $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$. Protože základ 2 je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice, tak partikulární řešení má tvar

$$a_n^{(p)} = n^2(cn+d)2^n$$

5.7 Řešení nehomogenních rekurentních rovnic

5.7.1. Najděte řešení následujících rekurentních rovnic s danými počátečními podmínkami.

a) $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2} + (n+1)3^n$, kde $a_0 = 1$, $a_1 = 10$

Jedná se o lineární nehomogenní rekurentní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^2 - 8r + 16 = 0$ přidružené homogenní rovnice má jeden dvojnásobný kořen $r_0 = 4$. Proto obecné řešení přidružené homogenní rekurentní rovnice má tvar

$$a_n^{(h)} = \alpha_1 4^n + \alpha_2 n4^n.$$

Protože základ 3 není kořenem charakteristické rovnice, tak partikulární řešení má tvar

$$a_n^{(p)} = (cn+d)3^n.$$

Abychom určili hodnoty konstant c, d, tak dosadíme partikulární řešení $a_n^{(p)} = (cn+d)3^n$ do rekurentní rovnice a dostaneme

$$\begin{aligned} (cn+d)3^n &= 8(c(n-1)+d)3^{n-1} - 16(c(n-2)+d)3^{n-2} + (n+1)3^n \\ 9cn+9d &= 24(cn-c+d) - 16(cn-2c+d) + 9(n+1) \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů polynomů v rovnosti dostaneme dvě rovnice:

$$\begin{aligned} n^1: \quad c &= 9 \\ n^0: \quad d &= 8c + 9 \end{aligned}$$

Řešení soustavy rovnice je snadné, dostaneme $c = 9$, $d = 81$. Hledané partikulární řešení proto je $a_n^{(p)} = (9n + 81)3^n = 9(n + 9)3^n = (n + 9)3^{n+2}$.

Obecný tvar řešení je

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \alpha_1 4^n + \alpha_2 n 4^n + (n + 9)3^{n+2}.$$

Hodnotu konstant α_1 a α_2 určíme z počátečních podmínek. Dosadíme $n = 0$ a dostaneme rovnici $1 = \alpha_1 + 81$. Dosadíme $n = 1$ a dostaneme rovnici $10 = 4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 270$.

Soustavu vyřešíme dostaneme $\alpha_1 = -80$, $\alpha_2 = 15$.

Řešení nehomogenní rekurentní rovnice je $a_n = -80 \cdot 4^n + 15n4^n + (n+9)3^{n+2} = 5(3n-16)4^n + (n+9)3^{n+2}$.

b) $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2} + (n + 1)3^n$, kde $a_0 = 2$, $a_1 = 5$

Jedná se o lineární nehomogenní rekurentní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Obecný tvar řešení i partikulární řešení se hledá stejně jako v předchozí části. Dostaneme obecný tvar řešení

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \alpha_1 4^n + \alpha_2 n 4^n + (n + 9)3^{n+2}.$$

Hodnotu konstant α_1 a α_2 určíme z počátečních podmínek. Dosadíme $n = 0$ a dostaneme rovnici $2 = \alpha_1 + 81$. Dosadíme $n = 1$ a dostaneme rovnici $5 = 4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 270$.

Soustavu vyřešíme dostaneme $\alpha_1 = -316$, $\alpha_2 = 51$.

Řešení nehomogenní rekurentní rovnice je $a_n = -3164^n + 51n4^n + (n + 9)3^{n+2}$.

c) $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2} + (2 - n)4^n$, kde $a_0 = 2$, $a_1 = 6$

Jedná se o lineární nehomogenní rekurentní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Příslušná charakteristická rovnice $r^2 - 8r + 16 = 0$ přidružené homogenní rovnice má jeden dvojnásobný kořen $r_0 = 4$. Protože základ 4 v nehomogenní části $(2 - n)4^n$ je kořenem charakteristické rovnice, tak partikulární řešení má tvar

$$a_n^{(p)} = n^2(cn + d)4^n.$$

Abychom určili hodnoty konstant c, d, tak dosadíme partikulární řešení $a_n^{(p)} = n^2(cn + d)4^n$ do rekurentní rovnice a dostaneme

$$\begin{aligned} n^2(cn + d)4^n &= 8(n-1)^2(c(n-1) + d)4^{n-1} - 16(n-2)^2(c(n-2) + d)4^{n-2} + (2-n)4^n \\ 16cn^3 + 16dn^2 &= 32(n^2 - 2n + 1)(cn - c + d) - 16(n^2 - 4n + 4)(cn - 2c + d) + 16(2 - n) \\ 16cn^3 + 16dn^2 &= 32(cn^3 - cn^2 + dn^2 - 2cn^2 + 2cn - 2dn + cn - c + d) - \\ &\quad -16(cn^3 - 2cn^2 + dn^2 - 4cn^2 + 8cn - 4dn + 4cn - 8c + 4d) + 32 - 16n \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů polynomů v rovnosti dostaneme čtyři rovnice:

$$\begin{aligned} n^3: \quad 16c &= 32c - 16c \\ n^2: \quad 16d &= -32c + 32d - 64c + 32c - 16d + 64c \\ n^1: \quad 0 &= 64c - 64d + 32c - 128c - 64d - 64c - 16 \\ n^0: \quad 0 &= -32c + 32d + 128c - 64d + 32 \end{aligned}$$

Zatímco v prvních dvou rovnicích se všechny členy odečtou, tak druhé dvě rovnice dají po zjednodušení

$$\begin{aligned} n^1: \quad 0 &= -6c - 1 \\ n^0: \quad 0 &= 3c - d + 1 \end{aligned}$$

Řešení soustavy rovnice je snadné, dostaneme $c = -\frac{1}{6}$, $d = \frac{1}{2}$. Hledané partikulární řešení proto je $a_n^{(p)} = n^2(-\frac{1}{6}n + \frac{1}{2})4^n = n^2(-\frac{2}{3}n + 2)4^{n-1}$.

Obecný tvar řešení je

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \alpha_1 4^n + \alpha_2 n 4^n + n^2(-\frac{2}{3}n + 2)4^{n-1}.$$

Hodnotu konstant α_1 a α_2 určíme z počátečních podmínek. Dosadíme $n = 0$ a dostaneme rovnici $2 = \alpha_1$. Dosadíme $n = 1$ a dostaneme rovnici $6 = 4\alpha_1 + 4\alpha_2 + \frac{4}{3}$.

Soustavu

$$\begin{aligned} n = 0: \quad 2 &= \alpha_1 \\ n = 1: \quad 6 &= 4\alpha_1 + 4\alpha_2 + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

vyřešíme a dostaneme $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -\frac{5}{6}$.

Řešení nehomogenní rekurentní rovnice je $a_n = 2 \cdot 4^n - \frac{5}{6}n4^n + n^2(-\frac{2}{3}n + 2)4^{n-1}$.

5.8 Příklady k procvičení

5.8.1. Do fondu vložíme 100 000 Kč. Podle podmínek fondu bude částka, která byla na účtu v posledním roce, úročena 20% a částka, která byla na účtu v předposledním roce, úročena 45%. Jaká bude částka na účtu v n-tém roce?

Na účtu v n-tém roce bude částka z posledního roku P_{n-1}, připíše se 20% z částky v roce P_{n-1} a ještě 45% z částky v roce P_{n-2}. Sestavíme rekurentní rovnici

$$P_n = 1.2P_{n-1} + 0.45P_{n-2}.$$

Odpovídající charakteristická rovnice je

$$r^2 - 1.2r - 0.24 = 0,$$

kde r je reálná proměnná. Rovnici vyřešíme

$$r_{1,2} = \frac{1.2 \pm \sqrt{1.2^2 + 4 \cdot 1.2 \cdot 0.45}}{2}$$

Charakteristické kořeny jsou $r_1 = -\frac{3}{10}$, $r_2 = \frac{3}{2}$. Obecné řešení rekurentní rovnice bude tvaru

$$P_n = \alpha_1 \cdot r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n = \alpha_1 \left(-\frac{3}{10}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Abychom určili koeficienty α_1, α_2, sestavíme rovnice dle výchozích podmínek:

$$\begin{aligned} P_0 &= \alpha_1 \cdot r_1^0 + \alpha_2 \cdot r_2^0 \\ P_1 &= \alpha_1 \cdot r_1^1 + \alpha_2 \cdot r_2^1 \end{aligned}$$

V prvním roce pro $n = 0$ víme, že $P_0 = 100\,000$. V druhém roce pro $n = 1$ víme, že $P_1 = 120\,000$. Dosadíme charakteristické kořeny a dostaneme

$$\begin{aligned} 100\,000 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ 120\,000 &= \alpha_1 \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) + \alpha_2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

Řešením soustavy dostaneme

$$\alpha_1 = \frac{50\,000}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{250\,000}{3}.$$

Obecné řešení pro $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$P_n = \frac{50\ 000}{3}\left(-\frac{3}{10}\right)^n + \frac{250\ 000}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

5.8.2. Morseova abeceda sestává ze signálů dvou druhů: teček a čárek. Například pomocí 1 signálu můžeme sestavit dvě zprávy, pomocí dvou signálů však již $2 \cdot 2 + 4 = 8$ zpráv.

- čtyři zprávy ze dvou znaků po jednom signálu a
- čtyř znaků po dvou signálech.

Existují 2 znaky po jednom signálu, 4 znaky ze dvou signálů, 8 znaků ze tří signálů a 13 znaků ze čtyř signálů (teoreticky existuje 16 signálů, ale česká abeceda využívá jen 13 z nich). Kolik různých zpráv můžeme sestavit pomocí n signálů? Sestavte rekurentní vztah a s využitím výpočetní techniky najděte obecné řešení s přibližně určenými kořeny na dvě desetinná místa.
Sestavíme rekurentní vztah udávající počet různých zpráv z n signálů. Označme počet zpráv s n znaky jako z_n. Můžeme přidat

- ze dvou znaků po jednom signálů za zprávu s z_{n-1} signály,
- ze čtyř znaků po dvou signálech za zprávu s z_{n-2} signály,
- z osmi znaků po třech signálech za zprávu s z_{n-3} signály a
- ze třinácti znaků po čtyřech signálech za zprávu s z_{n-4} signály.

Dostaneme rekurentní rovnici

$$z_n = 2a_{n-1} + 4a_{n-2} + 8a_{n-3} + 13a_{n-4}.$$

Odpovídající charakteristická rovnice je

$$r^4 - 2r^3 - 4r^2 - 8r - 13 = 0,$$

kde r je reálná proměnná. Rovnici s využitím výpočetní techniky vyřešíme a dostaneme

$$r_1 = -1.42, \quad r_2 = 3.82, \quad r_3 = -0.20 - 1.54i, \quad r_4 = -0.20 + 1.54i.$$

Obecné řešení rekurentní rovnice bude tvaru

$$z_n = \alpha_1 \cdot r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n + \alpha_3 \cdot r_3^n + \alpha_4 \cdot r_4^n =$$

$$z_n = \alpha_1 \cdot (-1.42)^n + \alpha_2 \cdot 3.82^n + \alpha_3 \cdot (-0.2 - 1.54i)^n + \alpha_4 \cdot (-0.2 + 1.54i)^n.$$

Abychom určili koeficienty α_1, α_2, α_3, α_4, nejprve určíme počty zpráv pro malé počty signálů.

- Existují dvě zprávy po jednom signálů, proto $z_1 = 2$.
- Pomocí dvou signálů můžeme sestavit $2 \cdot 2$ zprávy se dvěma znaky po jednom signálu a 4 zprávy ze znaků po dvou signálech, proto $z_2 = 8$.
- Pomocí tří signálů můžeme sestavit $2 \cdot z_2 + 4z_1 = 2 \cdot 8 + 4 \cdot 2 = 24$ zpráv se dvěma nebo třemi znaky a 8 zpráv z jediného znaku po třech signálech, proto $z_3 = 24 + 8 = 32$.
- Pomocí čtyř signálů můžeme sestavit $2 \cdot z_3 + 4z_2 + 8z_1 = 2 \cdot 32 + 4 \cdot 8 + 8 \cdot 2 = 112$ zpráv se dvěma, třemi čtyřmi znaky a 13 zpráv z jediného znaku po čtyřech signálech, proto $z_4 = 112 + 13 = 125$.

Abychom určili koeficienty α_1, α_2, α_3, α_4, sestavíme rovnice dle počátečních podmínek:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \alpha_1 \cdot r_1^1 + \alpha_2 \cdot r_2^1 + \alpha_3 \cdot r_3^1 + \alpha_4 \cdot r_4^1\\
z_2 &= \alpha_1 \cdot r_1^2 + \alpha_2 \cdot r_2^2 + \alpha_3 \cdot r_3^2 + \alpha_4 \cdot r_4^2\\
z_3 &= \alpha_1 \cdot r_1^3 + \alpha_2 \cdot r_2^3 + \alpha_3 \cdot r_3^3 + \alpha_4 \cdot r_4^3\\
z_4 &= \alpha_1 \cdot r_1^4 + \alpha_2 \cdot r_2^4 + \alpha_3 \cdot r_3^4 + \alpha_4 \cdot r_4^4.
\end{aligned}$$

Dosadíme $z_1 = 2$, $z_2 = 8$, $z_3 = 32$, $z_4 = 125$ a dostaneme soustavu rovnic, kterou s využitím počítače vyřešíme.

$$z_n \doteq 0.17 \cdot (-1.42)^n + 0.58 \cdot 3.82^n + 0.15 \cdot (-0.2 - 1.54i)^n + 0.15 \cdot (-0.2 + 1.54i)^n.$$

5.8.3. Kolika způsoby může Ferdinand vyběhnout n schodů, jestliže může každým krokem vystoupat o jeden nebo o dva schody. Dva způsoby považujeme za různé, jestliže se liší pořadí, kdy Ferdinand udělá krok přes dva schody nebo přes jeden schod.

Nejprve sestavíme rekurentní popis počtu způsobů s_n, jak vyjít n schodů. Rozlišíme dva případy podle schodu, ze kterého vstoupíme na poslední n-tý schod. Pokud poslední krok je přes jediný schod, tak na n-tý schod vstoupíme z předchozího schodu, na který jsme mohli vystoupat s_{n-1} způsoby. Pokud poslední krok je přes dva schody, tak na n-tý schod vstoupíme z předpředposledního schodu, na který jsme mohli vystoupat s_{n-2} způsoby. Celkem máme

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$$

způsobů, jak vystoupat všech n schodů.

Zbývá si uvědomit, že jediný schod vystoupáme jediným způsobem, zatímco na dva schody máme dvě možnosti: $1+1$ nebo 2 schody jediným krokem. Dostáváme počáteční podmínky $s_1 = 1$, $s_2 = 2$. Mohli bychom přidat podmínku $s_0 = 1$ (jediným způsobem vyjdeme 0 schodů).

Z rekurentní rovnice $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$ sestavíme charakteristickou rovnici

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

kde r je reálná proměnná. Rovnici vyřešíme.

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Charakteristické kořeny jsou $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Obecné řešení rekurentní rovnice bude tvaru

$$s_n = \alpha_1 \cdot r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Abychom určili koeficienty α_1, α_2, sestavíme rovnice dle výchozích podmínek:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \alpha_1 \cdot r_1^1 + \alpha_2 \cdot r_2^1\\
s_2 &= \alpha_1 \cdot r_1^2 + \alpha_2 \cdot r_2^2
\end{aligned}$$

Dosadíme $s_1 = 1$, $s_2 = 2$ a dostaneme

$$\begin{aligned}
1 &= \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\\
2 &= \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Řešením soustavy dostaneme

$$\alpha_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \quad \alpha_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

Obecné řešení pro $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$s_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Srovnáním s Fibonacciho posloupností vidíme, že změna počátečních podmínek má vliv pouze na hodnotu koeficientů α_1, α_2.

5.8.4. Budeme lepit ozdobnou řadu kachliček o rozměru $1 \times n$ čtverečků. K dispozici máme

- kachličky čtyř různých barev o rozměru 1×1 čtvereček a
- kachličky pěti různých barev o rozměru 1×2 čtverečky.

Kolika způsoby můžeme vykachličkovat řadu kachliček o rozměru $1 \times n$ čtverečků? Sestavte rekurentní vztah a najděte obecné řešení.

Sestavíme rekurentní vztah udávající počet různých vykachličkování řady n čtverečků. Tento počet posloupností kachliček označíme k_n.

Pro $n = 1$ můžeme podle zadání sestavit 4 různé „řady“, proto $k_1 = 4$.

Pro $n = 2$ můžeme podle zadání sestavit $4 \cdot 4 = 16$ různých posloupností dvou kachliček o rozměru 1×1 čtvereček nebo 5 kachliček o rozměru 1×2 čtverečky. Celkem máme $16 + 5 = 21$ různých posloupností znaků, proto $k_2 = 21$.

Pro obecné $n > 2$ rozlišíme dvě možnosti podle toho, zda poslední nalepená kachlička má rozměr 1×1 čtvereček 1×2 čtverečky.

Pokud je poslední kachlička o rozměru 1×1 čtvereček, tak předchozí kachličky zabírají $1 \times (n-1)$ čtverečků a existuje k_{n-1} takových posloupností, za které můžeme přilepit některou ze 4 kachliček 1×1. Pokud je poslední kachlička o rozměru 1×2 čtverečky, tak předchozí kachličky zabírají $1 \times (n-2)$ čtverečků a existuje k_{n-2} takových posloupností, za které můžeme přilepit některou z 5 kachliček 1×2. Dostaneme rekurentní formuli

$$k_n = 4k_{n-1} + 5k_{n-2}.$$

a počáteční podmínky $k_1 = 4$, $k_2 = 21$.

Z rekurentní rovnice $k_n = 4k_{n-1} + 5k_{n-2}$ sestavíme charakteristickou rovnici

$$r^2 - 4r - 5 = 0,$$

kde r je reálná proměnná. Rovnici vyřešíme

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}.$$

Charakteristické kořeny jsou $r_1 = 5$, $r_2 = -1$. Obecné řešení rekurentní rovnice bude tvaru

$$k_n = \alpha_1 \cdot r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n = \alpha_1 5^n + \alpha_2(-1)^n$$

Abychom určili koeficienty α_1, α_2, sestavíme rovnice dle výchozích podmínek.

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha_1 \cdot r_1^1 + \alpha_2 \cdot r_2^1 \\ k_2 &= \alpha_1 \cdot r_1^2 + \alpha_2 \cdot r_2^2 \end{aligned}$$

Dosadíme $k_1 = 4$, $k_2 = 21$ a dostaneme

$$\begin{aligned} 4 &= \alpha_1 \cdot 5 + \alpha_2 \cdot (-1) \\ 21 &= \alpha_1 \cdot 25 + \alpha_2 \cdot 1. \end{aligned}$$

Řešení soustavy (například sčítací metodou) dostaneme

$$\alpha_1 = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{6}.$$

Řešení pro $n \in \mathbb{N}_0$ je
$$k_n = \frac{5}{6} \cdot 5^n + \frac{1}{6} \cdot (-1)^n.$$

5.8.5. Vyřešte rekurentní rovnici $a_n = a_{n-1} + n$, kde $a_1 = 3$.
Vezmeme posloupnost rovností
$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= n \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= n-1 \\ a_{n-2} - a_{n-3} &= n-2 \\ &\vdots \\ a_2 - a_1 &= 2. \end{aligned}$$

Sečtením všech rovností dostaneme
$$a_n - a_1 = \sum_{i=2}^{n} i = n(n-1)/2 - 1.$$

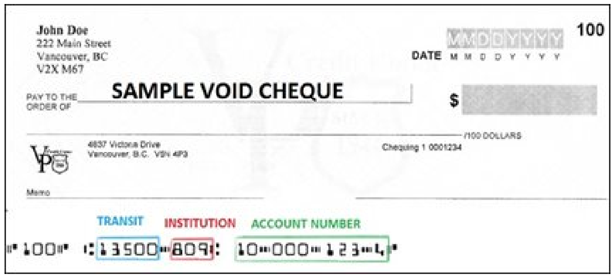
Protože $a_1 = 3$, dostáváme
$$a_n = a_1 + n(n-1)/2 - 1 = 3 + n(n-1)/2 - 1 = n(n-1)/2 + 2.$$

Jiné řešení:
Postupným dosazením dostaneme
$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= a_1 + 2 = 3 + 2 \\ a_3 &= a_2 + 3 = (3+2) + 3 \\ a_4 &= a_3 + 4 = ((3+2)+3) + 4 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + n = (((3+2)+3)+4+\cdots+n = ((((2+1)+2)+3)+4)+\cdots+n = 2 + n(n-1)/2. \end{aligned}$$

6 Modulární aritmetika

6.1 Motivační příklady

6.1.1. Kontrolní schéma čísla bankovních institucí na šeku je $7x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 7x_4 + 3x_5 + 9x_6 + 7x_7 + 3x_8 + 9x_9 \equiv 0 \pmod{10}$. Je číslo 307074580 platný kód?



Ověříme, zda
$$7x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 7x_4 + 3x_5 + 9x_6 + 7x_7 + 3x_8 + 9x_9 \equiv 0 \pmod{10}$$
Dostaneme
$$21 + 0 + 63 + 0 + 21 + 36 + 35 + 24 + 0 = 200 \equiv 0 \pmod{10}.$$
Jedná se o platný kód.

6.2 Dělitelnost

6.2.1. Mějme dvě celá čísla a, b. Vyjádřete celočíselný podíl a zbytek dle Věty o jednoznačnosti podílu a zbytku jako $a = qb + r$.

a) $a = 101$, $b = 9$

Protože 99 je nejbližší nižší násobek 9, tak můžeme psát
$$101 = 11 \cdot 9 + 2.$$
Celočíselný podíl $101 \bmod 9 = 11$, zbytek po dělení je $101 \operatorname{div} 9 = 2$.

Jiné řešení:

Vypočítáme na kalkulačce $\lfloor \frac{101}{9} \rfloor = 11$. Proto celočíselný podíl je 11. Zbytek určíme jako $101 - 9 \cdot 11 = 101 - 99 = 2$. Můžeme psát
$$101 = 11 \cdot 9 + 2.$$

b) $a = 9$, $b = 101$

Vypočítáme celočíselný podíl $\lfloor \frac{9}{101} \rfloor = 0$, tak ihned vidíme
$$9 = 0 \cdot 101 + 9.$$
Celočíselný podíl $9 \bmod 101 = 0$, zbytek po dělení je $9 \operatorname{div} 101 = 9$.

c) $a = -158$, $b = 11$

Vypočítáme celočíselný podíl $\lfloor -\frac{158}{11} \rfloor = -15$. Pozor: všimněte si, že platí $\lfloor -\frac{158}{11} \rfloor = -15$, zatímco $\lfloor \frac{158}{11} \rfloor = 14$. Dále vypočítáme $-158 - (-15) \cdot 11 = -158 + 165 = 7$. Dostaneme
$$-158 = -15 \cdot 11 + 7.$$
Celočíselný podíl $-158 \bmod 11 = -15$, zbytek po dělení je $-158 \operatorname{div} 11 = 7$.

6.2.2. Určete zbytek po dělení následujících čísel.

a) Zbytek po dělení čísla 589 číslem 8

Postup řešení zapíšeme jako kongruenci.

$$\begin{aligned} 589 &= 560 + 29 \\ &\equiv 29 \pmod 8 \\ &= 24 + 5 \\ &\equiv 5 \pmod 8 \end{aligned}$$

Zbytek po dělení čísla 589 číslem 8 je 5.

Můžeme také zapsat $589 \bmod 8 = 5$.

b) Zbytek po dělení čísla 5 891 číslem 7

Postup řešení zapíšeme jako kongruenci.

$$\begin{aligned} 5\,891 &= 5\,600 + 291 \\ &\equiv 291 \pmod 7 \\ &= 280 + 11 \\ &\equiv 11 \pmod 7 \\ &\equiv 4 \pmod 7 \end{aligned}$$

Zbytek po dělení čísla 5 891 číslem 7 je 4.

Můžeme také zapsat $5\,891 \bmod 7 = 4$.

c) Zbytek po dělení čísla 5 891 číslem 11

Postup řešení zapíšeme jako kongruenci.

$$\begin{aligned} 5\,891 &= 5\,500 + 391 \\ &\equiv 391 \pmod{11} \\ &= 330 + 61 \\ &\equiv 61 \pmod{11} \\ &= 55 + 6 \\ &\equiv 6 \pmod{11} \end{aligned}$$

Zbytek po dělení čísla 5 891 číslem 11 je 6.

Můžeme také zapsat $5\,891 \bmod 11 = 6$.

6.3 Euklidův algoritmus

6.3.1. Použijte Euklidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele následujících čísel.

a) 589 a 8

Na první pohled víme, že $\mathrm{NSD}(589, 8) = 1$. Najděme však toto řešení užitím Euklidova algoritmu.

$$\begin{aligned} 589 &= 73 \cdot 8 + 5 \\ 8 &= 1 \cdot 5 + 3 \\ 5 &= 1 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 1 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

Největší společný dělitel čísel 589 a 8 je 1. Čísla jsou nesoudělná.

Můžeme také zapsat $\mathrm{NSD}(589, 8) = 1$.

b) 123 a 277

Najděme řešení užitím Euklidova algoritmu.

$$\begin{aligned} 277 &= 2 \cdot 123 + 31 \\ 123 &= 3 \cdot 31 + 30 \\ 31 &= 1 \cdot 30 + 1 \\ 30 &= 30 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Největší společný dělitel čísel 123 a 277 je 1. Čísla jsou nesoudělná.

Můžeme také zapsat $\mathrm{NSD}(127, 277) = 1$.

c) 1 529 a 14 039

Najděme řešení užitím Euklidova algoritmu.

$$\begin{aligned} 14\ 039 &= 9 \cdot 1\ 529 + 278 \\ 1\ 529 &= 5 \cdot 278 + 139 \\ 278 &= 2 \cdot 139 + 0 \end{aligned}$$

Největší společný dělitel čísel 1 529 a 14 039 je 139.

Můžeme také zapsat $\mathrm{NSD}(1\ 529, 14\ 039) = 139$.

6.4 Bézoutova věta

6.4.1. Použijte Euklidův algoritmus ze sekce 6.3 pro nalezení Bézoutových koeficientů.

a) Napište $\mathrm{NSD}(589, 8)$ jako lineární kombinaci obou čísel.

Podle cvičení ze sekce 6.3 jsme odvodili největší společný dělitel.

$$\begin{aligned} 589 &= 73 \cdot 8 + 5 \\ 8 &= 1 \cdot 5 + 3 \\ 5 &= 1 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 1 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

Zpětným dosazením z (před)poslední rovnice dostaneme

$$1 = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2.$$

Dosazením zbytku 2 z předchozí rovnice dostaneme

$$1 = 1 \cdot 3 - 1 \cdot (5 - 1 \cdot 3) = (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 3.$$

Dosazením zbytku 3 z předchozí rovnice dostaneme

$$1 = (-1) \cdot 5 + 2 \cdot (8 - 1 \cdot 5) = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5.$$

Dosazením zbytku 5 z předchozí rovnice dostaneme

$$1 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot (589 - 73 \cdot 8) = (-3) \cdot 589 + 221 \cdot 8.$$

Protože $1 = (-3) \cdot 589 + 221 \cdot 8$, tak hledané Bézoutovy koeficienty jsou -3 a 221.

b) Napište NSD(123, 277) jako lineární kombinaci obou čísel.

Najděme řešení užitím Euklidova algoritmu.

$$\begin{aligned} 277 &= 2 \cdot 123 + 31 \\ 123 &= 3 \cdot 31 + 30 \\ 31 &= 1 \cdot 30 + 1 \\ 30 &= 30 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Zpětným dosazením z (před)poslední rovnice dostaneme

$$1 = 1 \cdot 31 - 1 \cdot 30.$$

Dosazením zbytku 30 z předchozí rovnice dostaneme

$$1 = 1 \cdot 31 - 1 \cdot (123 - 3 \cdot 31) = 4 \cdot 31 - 1 \cdot 123.$$

Dosazením zbytku 31 z předchozí rovnice dostaneme

$$1 = 4 \cdot (277 - 2 \cdot 123) - 1 \cdot 123 = 4 \cdot 277 - 9 \cdot 123.$$

Protože $1 = 4 \cdot 277 - 9 \cdot 123$, tak hledané Bézoutovy koeficienty jsou 4 a -9.

c) Napište NSD(1 529, 14 039) jako lineární kombinaci obou čísel.

Najděme řešení užitím Euklidova algoritmu.

$$\begin{aligned} 14\,039 &= 9 \cdot 1\,529 + 278 \\ 1\,529 &= 5 \cdot 278 + 139 \\ 278 &= 2 \cdot 139 + 0 \end{aligned}$$

$\mathrm{NSD}(1\,529, 14\,039) = 139$. Zpětným dosazením z (před)poslední rovnice dostaneme

$$139 = 1 \cdot 1\,529 - 5 \cdot 278.$$

Dosazením zbytku 278 z předchozí rovnice dostaneme

$$1 = 1 \cdot 1\,529 - 5 \cdot (14\,039 - 9 \cdot 1\,529) = -5 \cdot 14\,039 + 46 \cdot 1\,529.$$

Protože $\mathrm{NSD}(1\,529, 14\,039) = 139 = -5 \cdot 14\,039 + 46 \cdot 1\,529$, tak hledané Bézoutovy koeficienty jsou -5 a 46.

6.4.2. Určete NSD(91, 169) a napište jej jako lineární kombinaci obou čísel.

Nejprve pomocí Euklidova algoritmu určíme NSD(91, 169).

$$\begin{aligned} 169 &= 1 \cdot 91 + 78 \\ 91 &= 1 \cdot 78 + 13 \\ 78 &= 6 \cdot 13 + 0 \end{aligned}$$

Z Euklidova algoritmu plyne $\mathrm{NSD}(91, 169) = 13$.

Bézoutovy koeficienty učíme zpětným dosazením. Z předposlední rovnice dostaneme

$$13 = 1 \cdot 91 - 1 \cdot 78.$$

Dosazením zbytku 78 z předchozí rovnice dostaneme

$$13 = 1 \cdot 91 - 1 \cdot (169 - 1 \cdot 91) = 2 \cdot 91 - 1 \cdot 169.$$

Protože $\mathrm{NSD}(91, 169) = 13 = 2 \cdot 91 - 1 \cdot 169$, tak hledané Bézoutovy koeficienty jsou 2 a -1.

6.4.3. Najděte inverzi čísla a modulo m.

a) Najděte inverzi čísla 8 modulo 11.

Protože NSD$(8, 11) = 1$, tak inverze existuje. Inverzi určíme pomocí Euklidova algoritmu.

$$\begin{aligned} 11 &= 1 \cdot 8 + 3 \\ 8 &= 2 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 1 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

Z předposlední rovnice dostaneme

$$1 = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2.$$

Dosazením zbytku 2 z předchozí rovnice dostaneme

$$1 = 1 \cdot 3 - 1 \cdot (8 - 2 \cdot 3) = (-1) \cdot 8 + 3 \cdot 3.$$

Dosazením zbytku 3 z předchozí rovnice dostaneme

$$1 = (-1) \cdot 8 + 3 \cdot (11 - 1 \cdot 8) = (-4) \cdot 8 + 3 \cdot 11.$$

Nyní víme

$$1 = (-4) \cdot 8 + 3 \cdot 11 \equiv (-4) \cdot 8 \pmod{11}$$

Inverze čísla 8 modulo 11 je číslo $-4 \equiv 7 \pmod{11}$.

Snadno ověříme, že $7 \cdot 8 = 56 \equiv 1 \pmod{11}$.

b) Najděte inverzi čísla 87 modulo 12.

Protože NSD$(87, 13) = 3$, tak inverze neexistuje.

c) Najděte inverzi čísla 87 modulo 13.

Protože NSD$(87, 13) = 1$, tak inverze existuje. Inverzi určíme pomocí Euklidova algoritmu.

$$\begin{aligned} 87 &= 6 \cdot 13 + 9 \\ 13 &= 1 \cdot 9 + 4 \\ 9 &= 2 \cdot 4 + 1 \\ 4 &= 4 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Z předposlední rovnice dostaneme

$$1 = 1 \cdot 9 - 2 \cdot 4.$$

Dosazením zbytku 4 z předchozí rovnice dostaneme

$$1 = 1 \cdot 9 - 2 \cdot (13 - 1 \cdot 9) = (-2) \cdot 13 + 3 \cdot 9.$$

Dosazením zbytku 9 z předchozí rovnice dostaneme

$$1 = (-2) \cdot 13 + 3 \cdot (87 - 6 \cdot 13) = (-20) \cdot 13 + 3 \cdot 87$$

Nyní víme

$$1 = (-20) \cdot 13 + 3 \cdot 87 \equiv 3 \cdot 87 \pmod{13}$$

Inverze čísla 87 modulo 13 je číslo 3.

Snadno ověříme, že $87 \cdot 3 \equiv 9 \cdot 3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$.

6.4.4. Najděte inverzi čísla a modulo m.

a) Najděte inverzi čísla 91 modulo 13.

Protože NSD$(91, 13) = 13$, tak inverze neexistuje. Platí $91 \equiv 0 \pmod{13}$, proto pro jakékoliv celé číslo a je $a \cdot 91 \equiv a \cdot 0 = 0 \pmod{13}$ a nikdy neplatí $a \cdot 91 \equiv 1 \pmod{13}$.

b) Najděte inverzi čísla 91 modulo 14.

Protože $\mathrm{NSD}(91, 14) = 7$, tak inverze neexistuje. Platí $91 \equiv 7 \pmod{14}$, proto pro jakékoliv celé číslo a je $a \cdot 91 \equiv a \cdot 7 \pmod{14}$. Číslo $a7$ je kongruentní s 0 nebo se 7 modulo 14, nikdy není kongruentní s 1 modulo 14.

c) Najděte inverzi čísla 91 modulo 15.

Inverzi určíme pomocí Euklidova algoritmu. Nejprve nalezením největšího společného dělitele pomocí Euklidova algoritmu ověříme, že $\mathrm{NSD}(91, 15) = 1$ a inverze existuje.

$$\begin{aligned} 91 &= 6 \cdot 15 + 1 \\ 15 &= 15 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Z předposlední rovnice ihned dostaneme

$$1 = 1 \cdot 91 - 1 \cdot 15.$$

Nyní víme

$$1 = 1 \cdot 91 - 1 \cdot 15 \equiv 1 \cdot 91 \pmod{15}$$

Inverze čísla 91 modulo 15 je číslo 1.

Snadno ověříme, že $91 \cdot 1 = 91 \equiv 1 \pmod{1}$.

6.5 Modulární aritmetika

6.5.1. Vypočítejte v příslušné modulární aritmetice

a) $13 +_{11} 39$

Počítáme dle definice

$$13 +_{11} 39 = 13 + 39 \bmod 11 = 52 \bmod 11 = 8.$$

Výpočet můžeme zjednodušit, neboť zbytek součtu je roven součtu zbytků.

$$13 +_{11} 39 = 2 +_{11} 6 = 8 \bmod 11 = 8$$

b) $13 \cdot_{11} 39$

Počítáme součin zbytkových tříd.

$$13 \cdot_{11} 39 = 2 \cdot 6 \bmod 11 = 12 \bmod 11 = 1$$

c) $13 \cdot_{4} 39$

Počítáme součin zbytkových tříd.

$$13 \cdot_4 39 = 1 \cdot 3 \bmod 4 = 3$$

d) $(781 +_5 71) \cdot_7 65$

Počítáme se zbytkovými třídami.

$$(781 +_5 73) \cdot_7 65 = (1 +_5 3) \cdot_7 3 = 4 \cdot_7 3 = 5$$

kód	znak	kód	znak
65	A	78	N
66	B	79	O
67	C	80	P
68	D	81	Q
69	E	82	R
70	F	83	S
71	G	84	T
72	H	85	U
73	I	86	V
74	J	87	W
75	K	88	X
76	L	89	Y
77	M	90	Z

Tabulka 1: část ASCII tabulky.

6.5.2. V Tabulce 1 vidíme část ASCII tabulky. Zakódujte slovo „AHOJ“ tak že ASCII kód každého slova vynásobíte číslem 7 modulo 256.
ASCII kódy písmen slova „AHOJ“ jsou $(65, 72, 79, 74)$. Vynásobením každého kódu posloupnosti číslem 7 modulo 256 dostaneme

$$(65 \cdot_{256} 7, 72 \cdot_{256} 7, 79 \cdot_{256} 7, 74 \cdot_{256} 7) = (455, 504, 553, 518) \equiv (199, 248, 41, 6) \pmod{256}.$$

6.5.3. navážeme na Cvičení 2 Dekódujeme slovo určené posloupností $(199, 248, 41, 6)$ tak, že najdeme inverzi čísla 7 module 256 a čísla v posloupnosti vynásobíme module modulo 256.
nejprve najdeme inverzi k číslu 7 modulo 256. Protože $NSD(256, 7) = 1$, tak inverze existuje. Využitím Euklidova algoritmu dostaneme

Inverzi určíme pomocí Euklidova algoritmu.

$$\begin{aligned} 256 &= 36 \cdot 7 + 4 \\ 7 &= 1 \cdot 4 + 3 \\ 4 &= 1 \cdot 3 + 1 \\ 3 &= 3 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Z předposlední rovnice dostaneme

$$1 = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 3.$$

Dosazením zbytku 3 z předchozí rovnice dostaneme

$$1 = 1 \cdot 4 - 1 \cdot (7 - 1 \cdot 4) = (-1) \cdot 7 + 2 \cdot 4.$$

Dosazením zbytku 4 z předchozí rovnice dostaneme

$$1 = (-1) \cdot 7 + 2 \cdot (256 - 36 \cdot 7) = (-73) \cdot 7 + 2 \cdot 256$$

Nyní víme

$$1 = (-73) \cdot 7 + 2 \cdot 256 \equiv 183 \cdot 7 \pmod{256}$$

Inverze čísla 7 modulo 256 je číslo 183.

Vynásobením každého čísla posloupnosti $(199, 248, 41, 6)$ kódu posloupnosti číslem 183 modulo 256 dostaneme

$$(199 \cdot_{256} 183, 248 \cdot_{256} 183, 41 \cdot_{256} 183, 6 \cdot_{256} 183) = (36417, 45384, 7503, 1098) \equiv (65, 72, 79, 74) \pmod{256}.$$

Posloupnost ASCII kódů $(65, 72, 79, 74)$ odpovídá slovu „AHOJ“.

6.5.4. V Tabulce 1 vidíme část ASCII tabulky. Ukažte, že pokud zakódujeme slovo „AHOJ“ tak že ASCII kód každého slova vynásobíte číslem 12 modulo 256, tak získanou posloupnost čísel nelze dekódovat.
Všimneme, si, že číslo 12 nemá inverzi modulo 256, neboť $(12, 256) = 4$ Pokud ASCII kódy vynásobíme číslem12, tak zašifrovaná data nepůjde ničím vynásobit, aby vyšla původní čísla, protože výsledné součiny posloupnosti budou vždy sudá čísla a modulo 256 zůstanou sudá,. To ale znamená, že i při pokusu o dekódování při vynásobením jakýmkoliv číslem vždy vyjde sudé číslo (a nikdy nevyjde například číslo 65).

6.5.5. navážeme na Cvičení 2 Dekódujeme slovo určené posloupností $(199, 248, 41, 6)$ tak, že najdeme inverzi čísla 7 module 256 a čísla v posloupnosti vynásobíme module modulo 256.
nejprve najdeme inverzi k číslu 7 modulo 256. Protože $NSD(256, 7) = 1$, tak inverze existuje. Využitím Euklidova algoritmu dostaneme

Inverzi určíme pomocí Euklidova algoritmu.

$$\begin{aligned} 256 &= 36 \cdot 7 + 4 \\ 7 &= 1 \cdot 4 + 3 \\ 4 &= 1 \cdot 3 + 1 \\ 3 &= 3 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Z předposlední rovnice dostaneme

$$1 = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 3.$$

Dosazením zbytku 3 z předchozí rovnice dostaneme

$$1 = 1 \cdot 4 - 1 \cdot (7 - 1 \cdot 4) = (-1) \cdot 7 + 2 \cdot 4.$$

Dosazením zbytku 4 z předchozí rovnice dostaneme

$$1 = (-1) \cdot 7 + 2 \cdot (256 - 36 \cdot 7) = (-73) \cdot 7 + 2 \cdot 256$$

Nyní víme

$$1 = (-73) \cdot 7 + 2 \cdot 256 \equiv 183 \cdot 7 \pmod{256}$$

Inverze čísla 7 modulo 256 je číslo 183.

Vynásobením každého čísla posloupnosti $(199, 248, 41, 6)$ kódu posloupnosti číslem 183 modulo 256 dostaneme

$$(199 \cdot_{256} 183, 248 \cdot_{256} 183, 41 \cdot_{256} 183, 6 \cdot_{256} 183) = (36417, 45384, 7503, 1098) \equiv (65, 72, 79, 74) \pmod{256}.$$

Posloupnost ASCII kódů $(65, 72, 79, 74)$ odpovídá slovu „AHOJ“.

6.6 Kongruence

6.6.1. Rozhodněte, zda čísla a, b jsou kongruentní modulo m.

a) Čísla $a = 19$, $b = 11$ modulo 6

Protože rozdíl $19 - 11 = 8$ není násobek modulu 6, tak

$$19 \not\equiv 11 \pmod{6}.$$

b) Čísla $a = 19$, $b = 11$ modulo 4

Protože rozdíl $19 - 11 = 8$ je násobek modulu 4, tak

$$19 \equiv 11 \pmod{4}.$$

c) Čísla $a = 546$, $b = 141$ modulo 11

Vypočítáme rozdíl $546 - 141 = 405$ a ověříme, zda je násobkem modulu 11. Platí

$$405 = 330 + 75 \equiv 75 = 66 + 9 \equiv 9 \pmod{11}.$$

Proto

$$546 \not\equiv 141 \pmod{11}.$$

d) Čísla $a = 546$, $b = 141$ modulo 45

Vypočítáme rozdíl $546 - 141 = 405$ a ověříme, zda je násobkem modulu 45. Platí

$$405 = 450 - 45 \equiv -45 \equiv 0 \pmod{45}.$$

Proto

$$546 \equiv 141 \pmod{45}.$$

6.6.2. Najděte řešení uvedené lineární kongruence.

a) $x \equiv 15 \pmod 9$

Kongruenci nejprve zjednodušíme. Protože $15 = 9 + 6$, tak obecné řešení kongruence $x \equiv 6 \pmod 9$ jsou všechna čísla, která dávají zbytek 6 po dělení 9, tedy $x = 9t + 6$, kde $t \in \mathbb{Z}$.

b) $x \equiv -74 \pmod{12}$

Kongruenci nejprve zjednodušíme. Protože $-74 = -84 + 10$, tak obecné řešení kongruence $x \equiv 10 \pmod{12}$ jsou všechna čísla, která dávají zbytek 10 po dělení 12, tedy $x = 12t + 10$, kde $t \in \mathbb{Z}$.

c) $2x \equiv 5 \pmod{10}$

Všimneme si, že levá strana je vždy sudé číslo, které po dělení 10 nikdy nemůže dát (lichý) zbytek 5. Navíc v kongruenci nemůžeme ani krátit. Kongruence nemá řešení.

Jiné řešení:

Při řešení kongruence bychom hledali inverzi čísla 2 modulo 10. Avšak $\mathrm{NSD}(2, 10) = 2$, a proto číslo 2 nemá inverzi modulo 10. Kongruence nemá řešení.

d) $2x \equiv 6 \pmod{10}$

Číslo 2 nemá inverzi modulo 10, protože $\mathrm{NSD}(2, 10) = 2 \neq 1$. Kongruenci však můžeme nejprve zjednodušit. Krátíme obě strany i modul číslem 2. Dostaneme $x \equiv 3 \pmod 5$. Obecné řešení dané kongruence jsou všechna čísla $x = 5t + 3$, kde $t \in \mathbb{Z}$.

Poznámka: Kongruence řešení má, neboť $\mathrm{NSD}(2, 10) = 2 \mid 6$.

e) $2x \equiv 4 \pmod{10}$

Číslo 2 nemá inverzi modulo 10, protože $\mathrm{NSD}(2, 10) = 2 \neq 1$. Kongruence však může mít řešení, zkusíme ji nejprve zjednodušit. Krátíme obě strany i modul číslem 2. Dostaneme $x \equiv 2 \pmod 5$. Obecné řešení dané kongruence jsou všechna čísla $x = 5t + 2$, kde $t \in \mathbb{Z}$.

Poznámka: Kongruence řešení má, neboť $\mathrm{NSD}(2, 10) = 2 \mid 4$.

f) $2x \equiv 5 \pmod 9$

Najdeme inverzi čísla 2 modulo 9. Protože $\mathrm{NSD}(2, 9) = 1$, tak inverze existuje. Pomocí Euklidova algoritmu počítáme

$$\begin{aligned} 9 &= 4 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0. \end{aligned}$$

Z předposlední rovnice dostaneme

$$1 = 1 \cdot 9 - 4 \cdot 2.$$

Nyní víme

$$1 = 1 \cdot 9 - 4 \cdot 2 \equiv (-4) \cdot 2 \equiv 5 \cdot 2 \pmod 9$$

Inverze čísla 2 modulo 9 je číslo 5.

Obě strany kongruence roznásobíme inverzí 5 a dostaneme

$$\begin{aligned} 5 \cdot 2x &\equiv 5 \cdot 5 \pmod 9 \\ 1x &\equiv 25 \pmod 9 \\ x &\equiv 7 \pmod 9. \end{aligned}$$

Obecné řešení dané kongruence jsou všechna čísla $x = 9t + 7$, kde $t \in \mathbb{Z}$.

Jiné řešení:

Najdeme inverzi čísla 2 modulo 9. Všimneme si, že $5 \cdot 2 = 10 \equiv 1 \pmod 9$, a proto číslo 5 je inverzí čísla 2 modulo 9. Obě strany kongruence roznásobíme inverzí 5 a dostaneme

$$\begin{aligned} 5 \cdot 2x &\equiv 5 \cdot 5 \pmod 9 \\ x &\equiv 25 \pmod 9 \\ x &\equiv 7 \pmod 9. \end{aligned}$$

Obecné řešení dané kongruence jsou všechna čísla $x = 9t + 7$, kde $t \in \mathbb{Z}$.

Jiné řešení:

Kongruenci nejprve zjednodušíme. Přičteme modul 9 k pravé straně (kongruence se nezmění, neboť $9 \equiv 0 \pmod 9$). Upravíme

$$\begin{aligned} 2x &\equiv 5 + 9 \pmod 9 \\ 2x &\equiv 14 \pmod 9 \\ x &\equiv 7 \pmod 9, \end{aligned}$$

kde obě strany jsme krátili číslem 2 nesoudělným s modulem. Obecné řešení dané kongruence jsou všechna čísla $x = 9t + 7$, kde $t \in \mathbb{Z}$.

g) $8x \equiv 5 \pmod{11}$

Podle cvičení ze sekce 6.4 víme, že inverze 8 modulo 11 je číslo 7. Vynásobíme obě strany kongruence a upravíme.

$$\begin{aligned} 8x &\equiv 5 \pmod{11} \\ 7 \cdot 8x &\equiv 7 \cdot 5 \pmod{11} \\ x &\equiv 35 \pmod{11} \\ x &\equiv 2 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Obecné řešení dané kongruence jsou všechna čísla $x = 11t + 2$, kde $t \in \mathbb{Z}$.

6.7 Soustavy kongruencí

6.7.1. Vyřešte následující soustavy kongruencí.

a) $x \equiv 4 \pmod{10}$, $x \equiv 3 \pmod{17}$

Protože každá z kongruencí je řešitelná (ihned vidíme, že $\mathrm{NSD}(1, 10) = 1 \mid 4$ a $\mathrm{NSD}(1, 17) = 1 \mid 3$) a protože oba moduly jsou nesoudělná čísla 10 a 17, tak podle Čínské zbytkové věty z přednášky víme, že soustava má řešení, dokonce nekonečně mnoho řešení modulo 170.

Vyřešíme nejprve první kongruenci, její řešení dosadíme do druhé kongruence a pak vyřešíme druhou kongruenci. Řešení první kongruence ihned dostáváme $x = 4 + 10t$, kde $t \in \mathbb{Z}$. Toto řešení dosadíme za x do druhé kongruence a dostaneme řešení v proměnné t.

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{17} \\ 4 + 10t &\equiv 3 \pmod{17} \\ 10t &\equiv -1 \pmod{17} \\ 10t &\equiv 16 \pmod{17} \\ 5t &\equiv 8 \pmod{17} \\ 5t &\equiv 8 + 17 \pmod{17} \\ 5t &\equiv 25 \pmod{17} \\ t &\equiv 5 \pmod{17} \end{aligned}$$

Společné řešení obou kongruencí je $t = 5 + 17u$, kde $u \in \mathbb{Z}$, avšak řešení musíme vyjádřit v původní proměnné x. Dosadíme za t do řešení první kongruence a dostaneme

$$x = 4 + 10t = 4 + 10(5 + 17u) = 4 + 50 + 170u = 54 + 170u,$$

kde $u \in \mathbb{Z}$. Hledaným řešením jsou všechna celá čísla tvaru $x = 54 + 170u$, kde $u \in \mathbb{Z}$.

b) $2x \equiv 4 \pmod{5}$, $x \equiv 1 \pmod{9}$

Protože každá z kongruencí je řešitelná (ihned vidíme, že $\mathrm{NSD}(2, 5) = 1 \mid 4$ a $\mathrm{NSD}(1, 9) = 1 \mid 1$) a protože oba moduly jsou nesoudělná čísla 10 a 17, tak podle Čínské zbytkové věty z přednášky víme, že soustava má řešení, dokonce nekonečně mnoho řešení modulo 45.

Vyřešíme nejprve první kongruenci, její řešení dosadíme do druhé kongruence a pak vyřešíme druhou kongruenci. Řešení první kongruence dostáváme

$$\begin{aligned} 2x &\equiv 4 \pmod{5} \\ x &\equiv 2 \pmod{5} \end{aligned}$$

Dostáváme řešení $x = 2 + 5t$, kde $t \in \mathbb{Z}$. Toto řešení dosadíme za x do druhé kongruence a dostaneme řešení v proměnné t.

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{9} \\ 2 + 5t &\equiv 1 \pmod{9} \\ 5t &\equiv -1 \pmod{9} \\ 5t &\equiv 8 \pmod{9} \\ 5t &\equiv 8 + 27 \pmod{9} \\ 5t &\equiv 35 \pmod{9} \\ t &\equiv 7 \pmod{9} \end{aligned}$$

Společné řešení obou kongruencí je $t = 7 + 9u$, kde $u \in \mathbb{Z}$, avšak řešení musíme vyjádřit v původní proměnné x. Dosadíme za t do řešení první kongruence a dostaneme

$$x = 2 + 5t = 2 + 5(7 + 9u) = 2 + 35 + 45u = 37 + 45u,$$

kde $u \in \mathbb{Z}$. Hledaným řešením jsou všechna celá čísla tvaru $x = 37 + 45u$, kde $u \in \mathbb{Z}$.

c) $3x \equiv 4 \pmod{6}$, $x \equiv 1 \pmod{9}$

První kongruence soustavy není řešitelná, neboť $\mathrm{NSD}(3, 6) = 3$ a číslo 3 nedělí 4. To znamená, že ani soustava kongruencí nemá žádné řešení.

6.8 Příklady k procvičení

6.8.1. Která čísla dávají zbytek 15 po dělení číslem 8?
Žádná. Zbytek podělení 8 musí být číslo z intervalu $[0, 7]$.

6.8.2. Která čísla jsou kongruentní s 15 modulo 8?
Zadání přepíšeme ve tvaru kongruence $x \equiv 15 \pmod 8$. Zjednodušením dostaneme $x \equiv 15 \equiv 7 \pmod 8$. Obecné řešení dané kongruence jsou všechna čísla $x = 8t + 7$, kde $t \in \mathbb{Z}$.

6.8.3. Kontrolní schéma UPC kódu je $3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 + 3x_7 + x_8 + 3x_9 + x_{10} + 3x_{11} + x_{12} \equiv 0 \pmod{10}$. Je číslo 793573431042 platný UPC kód?
Ověříme, zda

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 + 3x_7 + x_8 + 3x_9 + x_{10} + 3x_{11} + x_{12} \equiv 0 \pmod{10}.$$

Dostaneme

$$21 + 9 + 9 + 5 + 21 + 3 + 12 + 3 + 3 + 0 + 12 + 2 = 100 \equiv 0 \pmod{10}.$$

Jedná se o platný UPC kód.

6.8.4. Kontrolní schéma UPC kódu je $3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 + 3x_7 + x_8 + 3x_9 + x_{10} + 3x_{11} + x_{12} \equiv 0 \pmod{10}$. Je číslo 401305480285 platný UPC kód?
Ověříme, zda

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 + 3x_7 + x_8 + 3x_9 + x_{10} + 3x_{11} + x_{12} \equiv 0 \pmod{10}.$$

Dostaneme

$$12 + 0 + 3 + 3 + 0 + 5 + 12 + 8 + 0 + 2 + 24 + 5 = 74 \not\equiv 0 \pmod{10}.$$

nejedná se o platný UPC kód.

6.8.5. Kontrolní schéma UPC kódu je $3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 + 3x_7 + x_8 + 3x_9 + x_{10} + 3x_{11} + x_{12} \equiv 0 \pmod{10}$. Osmá cifra UPC kódu je znehodnocena 4013054?0285. Určete její hodnotu.
Dosadíme do kongruence

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 + 3x_7 + x_8 + 3x_9 + x_{10} + 3x_{11} + x_{12} \equiv 0 \pmod{10},$$

přičemž $x_8 = x$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
12 + 0 + 3 + 3 + 0 + 5 + 12 + x + 0 + 2 + 24 + 5 &\equiv 0 \pmod{10}\\
x + 66 &\equiv 0 \pmod{10}\\
x + 6 &\equiv 0 \pmod{10}\\
x &\equiv -6 \pmod{10}\\
x &\equiv 4 \pmod{10}.
\end{aligned}$$

Hledaná cifra je 4.

6.8.6. Kontrolní schéma ISBN-10 kódu je $10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 2x_9 + 1x_{10} \equiv 0 \pmod{11}$. Je číslo 8072260014 platný ISBN kód?
Ověříme, zda

$$10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 2x_9 + 1x_{10} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Dostaneme

$$80 + 0 + 56 + 14 + 12 + 30 + 0 + 0 + 2 + 4 = 198 \equiv 0 \pmod{11}.$$

Jedná se o platný ISBN kód.

6.8.7. Kontrolní schéma ISBN-10 kódu je $10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 2x_9 + 1x_{10} \equiv 0 \pmod{11}$. Je číslo 0471595047 platný ISBN kód?
Ověříme, zda

$$10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 2x_9 + 1x_{10} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Dostaneme

$$0+36+56+7+30+45+20+0+8+7=209 \equiv 0 \pmod{11}.$$

Jedná se o platný ISBN kód.

6.8.8. Kontrolní schéma ISBN-10 kódu je $10x_1+9x_2+8x_3+7x_4+6x_5+5x_6+4x_7+3x_8+2x_9+1x_{10} \equiv 0 \pmod{11}$. Je číslo 8072261147 platný ISBN kód?
Ověříme, zda

$$10x_1+9x_2+8x_3+7x_4+6x_5+5x_6+4x_7+3x_8+2x_9+1x_{10} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Dostaneme

$$80+0+56+14+12+30+4+3+8+7=213 \equiv 4 \not\equiv 0 \pmod{11}.$$

Nejedná se o platný ISBN kód.

6.8.9. Kontrolní schéma ISBN-10 kódu je $10x_1+9x_2+8x_3+7x_4+6x_5+5x_6+4x_7+3x_8+2x_9+1x_{10} \equiv 0 \pmod{11}$. Poslední cifra ISBN kódu je znehodnocena 807226114?. Určete její hodnotu.
Dosadíme do kongruence

$$10x_1+9x_2+8x_3+7x_4+6x_5+5x_6+4x_7+3x_8+2x_9+1x_{10} \equiv 0 \pmod{11}.$$

přičemž $x_{10}=x$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
80+0+56+14+12+30+4+3+8+x &\equiv 0 \pmod{11}\\
x+207 &\equiv 0 \pmod{11}\\
x+9 &\equiv 0 \pmod{11}\\
x &\equiv -9 \pmod{11}\\
x &\equiv 2 \pmod{11}.
\end{aligned}$$

Hledaná cifra je 2.

6.8.10. Kontrolní schéma ISBN-10 kódu je $10x_1+9x_2+8x_3+7x_4+6x_5+5x_6+4x_7+3x_8+2x_9+1x_{10} \equiv 0 \pmod{11}$. Najděte kontrolní (poslední) cifru ISBN kódu 013101963?.
Dosadíme do kongruence

$$10x_1+9x_2+8x_3+7x_4+6x_5+5x_6+4x_7+3x_8+2x_9+1x_{10} \equiv 0 \pmod{11}.$$

přičemž $x_{10}=x$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
0+9+24+7+0+5+36+18+6+x &\equiv 0 \pmod{11}\\
x+105 &\equiv 0 \pmod{11}\\
x-5 &\equiv 0 \pmod{11}\\
x &\equiv 5 \pmod{11}.
\end{aligned}$$

Hledaná cifra je 5.

6.8.11. Kontrolní schéma ISBN-10 kódu je $10x_1+9x_2+8x_3+7x_4+6x_5+5x_6+4x_7+3x_8+2x_9+1x_{10} \equiv 0 \pmod{11}$. Najděte kontrolní (poslední) cifru ISBN kódu 430736211?.
Dosadíme do kongruence

$$10x_1+9x_2+8x_3+7x_4+6x_5+5x_6+4x_7+3x_8+2x_9+1x_{10} \equiv 0 \pmod{11}.$$

přičemž $x_{10}=x$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
40+27+0+49+18+30+8+3+2+x &\equiv 0 \pmod{11}\\
x+177 &\equiv 0 \pmod{11}\\
x+1 &\equiv 0 \pmod{11}\\
x &\equiv -1 \pmod{11}\\
x &\equiv 10 \pmod{11}.
\end{aligned}$$

Hledaná cifra je „10“, kterou v ISBN kódu zapisujeme jako X.

6.8.12. Kontrolní schéma ISBN-10 kódu je $10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 2x_9 + 1x_{10} \equiv 0 \pmod{11}$. Sedmá cifra ISBN kódu je znehodnocena 807226?147. Určete její hodnotu.
Dosadíme do kongruence

$$10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 2x_9 + 1x_{10} \equiv 0 \pmod{11}.$$

přičemž $x_7 = x$. Dostaneme

$$\begin{aligned} 80 + 0 + 56 + 14 + 12 + 30 + 4x + 3 + 8 + 7 &\equiv 0 \pmod{11} \\ 4x + 210 &\equiv 0 \pmod{11} \\ 4x + 1 &\equiv 0 \pmod{11} \\ 4x &\equiv -1 \pmod{11} \\ 4x &\equiv 10 \pmod{11} \\ 2x &\equiv 5 \pmod{11} \\ 2x &\equiv 16 \pmod{11} \\ x &\equiv 8 \pmod{11} \end{aligned}$$

Hledaná cifra je 8.

6.8.13. Kontrolní schéma ISBN-10 kódu je $10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 2x_9 + 1x_{10} \equiv 0 \pmod{11}$. Sedmá cifra ISBN kódu je znehodnocena 807226?227. Určete její hodnotu.
Dosadíme do kongruence

$$10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 2x_9 + 1x_{10} \equiv 0 \pmod{11}.$$

přičemž $x_7 = x$. Dostaneme

$$\begin{aligned} 80 + 0 + 56 + 14 + 12 + 30 + x + 6 + 12 + 7 &\equiv 0 \pmod{11} \\ 4x + 213 &\equiv 0 \pmod{11} \\ 4x + 4 &\equiv 0 \pmod{11} \\ 4x &\equiv -4 \pmod{11} \\ x &\equiv -1 \pmod{11} \\ x &\equiv 10 \pmod{11} \end{aligned}$$

Hledaná cifra by měla být 10, což není možné. V kódu musí být poškozeno více znaků.

6.8.14. Kontrolní schéma ISBN-10 kódu je $10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 2x_9 + 1x_{10} \equiv 0 \pmod{11}$. Je číslo 8072261147 platný ISBN kód?
Ověříme, zda

$$10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 2x_9 + 1x_{10} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Dostaneme

$$80 + 0 + 56 + 14 + 12 + 30 + 4 + 3 + 8 + 7 = 214 \equiv -6 \not\equiv 0 \pmod{11}.$$

Nejedná se o platný ISBN kód.

6.8.15. Kontrolní schéma čísla bankovních institucí na šeku je $7x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 7x_4 + 3x_5 + 9x_6 + 7x_7 + 3x_8 + 9x_9 \equiv 0 \pmod{10}$. Je číslo 415002204 platný kód?

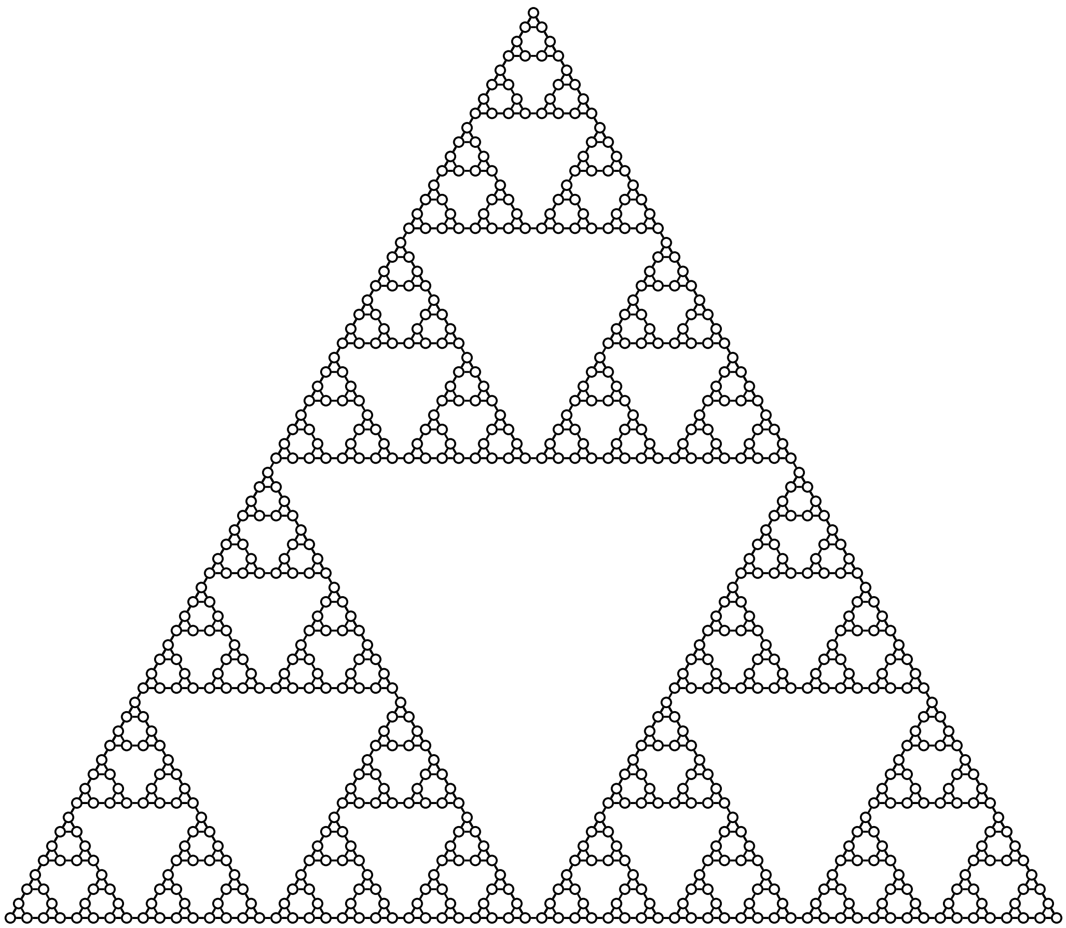
Ověříme, zda

$$7x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 7x_4 + 3x_5 + 9x_6 + 7x_7 + 3x_8 + 9x_9 \equiv 0 \pmod{10}$$

Dostaneme
$$28 + 3 + 45 + 0 + 0 + 18 + 14 + 0 + 36 = 144 \equiv 4 \not\equiv 0 \pmod{10}.$$
Nejedná se o platný kód.

6.8.16. Kontrolní schéma čísla bankovních institucí na šeku je $7x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 7x_4 + 3x_5 + 9x_6 + 7x_7 + 3x_8 + 9x_9 \equiv 0 \pmod{10}$. První cifra kódu je znehodnocena ?06480665. Určete její hodnotu.
Dosadíme do kongruence
$$7x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 7x_4 + 3x_5 + 9x_6 + 7x_7 + 3x_8 + 9x_9 \equiv 0 \pmod{10}$$
přičemž $x_1 = x$. Dostaneme
$$\begin{aligned}
7x + 0 + 54 + 28 + 24 + 0 + 42 + 18 + 45 &\equiv 0 \pmod{10}\\
7x + 211 &\equiv 0 \pmod{10}\\
7x + 1 &\equiv 0 \pmod{10}\\
7x &\equiv -1 \pmod{10}\\
7x &\equiv 9 \pmod{10}\\
7x &\equiv 49 \pmod{10}\\
x &\equiv 7 \pmod{10}.
\end{aligned}$$
Hledaná cifra je 7.

Část II
Úvod do teorie grafů



Stavový graf hlavolamu „hanojské věže“.

1 Pojem grafu

Základní grafové pojmy jsou podrobně zavedeny ve skriptech [UTG].

1.1 Motivační příklady

1.1.1. Devět kamarádů si na Vánoce dalo dárky. Každý dal dárky třem svým kamarádům. Ukažte, že není možné, aby každý dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal.
Situaci si znázorníme grafem. Vrcholy grafu budou kamarádi, máme tedy celkem 9 vrcholů. Hrana bude mezi těmi dvěma vrcholy (kamarády), kteří si navzájem dali dárky.

Pokud by řešení existovalo, tak bychom měli pravidelný graf stupně 3 na 9-ti vrcholech, což není možné. Platí že součet stupňů vrcholů grafu $G = (V, E)$ je roven dvojnásobku počtu hran:

$$\sum_{v\in V(G)} \deg(v) = 2|E(G)|$$

a součet stupňů je tedy *sudé* číslo, neboť každá hrana přispívá do celkového součtu jedničkou za každý koncový vrchol. Avšak v našem grafu by bylo

$$\sum_{v\in V(G)} \deg(v) = \sum_{v\in V(G)} 3 = 9 \cdot 3 = 27.$$

1.1.2. Máme 6 házenkářských týmů, které mají odehrát 15 zápasů, každý s každým. Je možné odehrát celý turnaj během pěti hracích dnů, kdy probíhají současně vždy 3 zápasy?
Ano. Je známa věta, že chromatický index kompletního grafu K_n je $\chi'(K_n) = \Delta(K_n)+1$. Protože existuje dobré hranové barvení grafu K_6 užitím pěti barev, stačí každé barvě přiřadit jeden hrací den a naplánovat tak zápasy během pěti dnů.

1.1.3. Máme 7 házenkářských týmů, které mají odehrát 21 zápasů, každý s každým. Ukažte, že není možné odehrát celý turnaj během šesti hracích dnů, kdy probíhají současně vždy 3 zápasy.
Každý den je možno odehrát nejvýše 3 zápasy, za 6 hracích dnů to je $3 \cdot 6 = 18$ zápasů. Protože zápasů se má hrát celkem 21, úloha nemá řešení.

1.2 Základní třídy grafů

1.2.1.$^\heartsuit$ Nakreslete graf $G = (V, E)$, je-li dáno

a) $V = \{a, b, c, d\}$ a $E = \{ab, ac, ad\}$. $[K_{1,3}]$

b) $V = \{k, l, m, n, o\}$ a $E = \{kl, mn, mo, ln, ko\}$. $[C_5]$

c) $V = \{k, l, m, n, o, p\}$ a $E = \{kl, mn, mp, lo, ok, np\}$. $[2C_3]$

d) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ a $E = \{12, 13, 14, 25, 26, 57, 68\}$ [langusta $L(2, 1, 1)$]

1.2.2.$^\heartsuit$ Kolik hran a kolik vrcholů má P_n (dle značení ve skriptech [UTG])? $[|V(P_n)| = n, |E(P_n)| = n-1]$

1.2.3.$^\heartsuit$ Kolik hran a kolik vrcholů má K_n? $\left[|V(K_n)| = n,\ |E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}\right]$

1.2.4.$^\heartsuit$ Kolik hran a kolik vrcholů má $K_{m,n}$? $[|V(K_{m,n})| = m+n,\ |E(K_{m,n})| = mn]$

1.2.5.$^\heartsuit$ Srovnejme grafy $K_{6,7}$ a K_{10}.

a) Který má více vrcholů?

$|V(K_{6,7})| = 13 > 10 = |V(K_{10})|$

b) Který má více hran?

$|E(K_{6,7})| = 42 < 45 = |E(K_{10})|$

1.2.6.$^\heartsuit$ Srovnejme grafy $K_{5,12}$ a K_{12}.

a) Který má více vrcholů?

$|V(K_{5,12})| = 17 > 12 = |V(K_{12})|$

b) Který má více hran?

$|E(K_{5,12})| = 60 < 66 = |E(K_{12})|$

1.2.7. Pro jaké n je K_n cyklem?

Známe definice kompletního grafu K_n i cyklu C_n. Z definice známe počet hran grafů K_n i C_n. Musí se rovnat počty hran, tj.

$$\begin{aligned} |E(K_n)| &= |E(C_n)| \\ \binom{n}{2} &= n \\ \frac{n(n-1)}{2} &= n \\ n-1 &= 2 \\ n &= 3. \end{aligned}$$

Pouze pro $n = 3$ je K_n cyklem.

1.3 Stupně vrcholů v grafu

1.3.1. Jaký je největší a nejmenší stupeň vrcholu v grafu

a) P_n

Má-li cesta alespoň tři vrcholy, tak je $\delta(P_n) = 1$ a $\Delta(P_n) = 2$. Ale pro cestu s jedinou hranou je $\delta(P_1) = 1 = \Delta(P_1)$. Pokud dovolíme cestu s jediným vrcholem, bude $\delta(P_1) = \Delta(P_1) = 0$.

b) C_n? [$\delta(C_n) = \Delta(C_n) = 2$]

c) K_n? [$\delta(K_n) = \Delta(K_n) = n-1$]

d) $K_{m,n}$? [$\delta(K_{m,n}) = \min\{m,n\}$ a $\Delta(K_{m,n}) = \max\{m,n\}$]

1.3.2.$^\heartsuit$ Napište stupňovou posloupnost grafu

a) P_5, [$(2,2,2,2,1,1)$]

b) C_4, [$(2,2,2,2)$]

c) K_4, [$(3,3,3,3)$]

d) $K_{3,2}$. [$(3,3,2,2,2)$]

1.3.3. Kolik existuje různých grafů na n vrcholech. Předpokládejme, že rozlišujeme pojmenování vrcholů, tj. například pro $V = \{1,2,3\}$ rozlišíme grafy s $E_1 = \{12\}$ a graf s $E_2 = \{23\}$.

Je dobré nakreslit si grafy pro $n = 1$ (jediný), $n = 2$ (dva), $n = 3$ (osm). Nyní nahlédneme, že pro $n = 4$ jich různých grafů 64. Pro každou z $\binom{n}{2}$ hran vybíráme, zda do grafu patří či nepatří. Proto pro graf na n vrcholech je $V^*(2, \binom{n}{2}) = 2^{\binom{n}{2}}$ různých grafů.

1.3.4. Kolik existuje různých bipartitních grafů na $m + n$ vrcholech. Rozlišujeme pojmenování vrcholů!

[2^{mn}]

1.3.5. Pro jaké n je K_n cestou? $[n = 0,\ n = 1]$

1.3.6. Pro jaké n je $K_{m,n}$ cyklem?
Mějme $K_{m,n}$ s partitami U, V, kde $|U| = m$, $|V| = n$. Stupeň každého vrcholu musí být 2. Pro vrcholy z parity $u \in U$ dostaneme

$$\begin{aligned} \deg(u) &= 2 \\ n &= 2. \end{aligned}$$

Podobně pro $v \in V$ je $m = 2$. Pouze kompletní bipartitní graf $K_{2,2}$ je cyklem.

1.3.7. Pro jaké m, n je $K_{m,n}$ cestou?
Je zřejmé, že pro $m \geq 3$ nebo $n \geq 3$ obsahuje graf $K_{m,n}$ vrchol stupně většího než 2 a nemůže být cestou. Zbývající případy probereme podrobně. Pro $m = n = 1$ je $K_{1,1}$ cestou P_1. Pro $m = 1$, $n = 2$ je $K_{1,2}$ cestou P_2 a podobně pro $m = 2$ a $n = 1$ je $K_{2,1}$ cestou P_2.

1.3.8.$^\heartsuit$ Kolik hran má graf

a) s deseti vrcholy stupně 5?

Protože $\sum \deg(v_i) = 2|E|$, dostaneme $|E| = \frac{1}{2} 5 \cdot 10 = 25$

b) s 11 vrcholy stupně 5? [takový graf neexistuje]

c) se stupňovou posloupností $(7, 6, 6, 5, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$ [18]

d) se stupňovou posloupností $(7, 6, 6, 5, 3, 3, 2, 1, 1, 1)$

Součet stupňů je 35, což je liché číslo. Takový graf neexistuje.

e) se stupňovou posloupností $(7, 6, 6, 5, 3, 3, 2, 1, 1)$

Ačkoli součet stupňů je sudé číslo, takový graf neexistuje, protože posloupnost není grafová. Snadno ukážeme užitím věty Havla–Hakimiho.

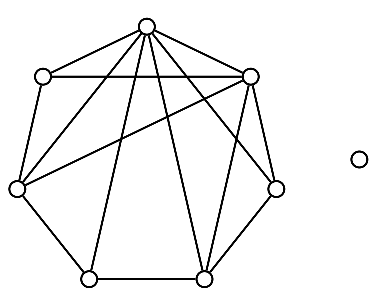
$$(7, 6, 6, 5, 3, 3, 2, 1, 1) \stackrel{HH}{\sim} (5, 5, 4, 2, 2, 1, 0, 1) \sim (5, 5, 4, 2, 2, 1, 1, 0) \stackrel{HH}{\sim}$$

$$\stackrel{HH}{\sim} (4, 3, 1, 1, 0, 1, 0), \sim (4, 3, 1, 1, 1, 0, 0), \stackrel{HH}{\sim} (2, 0, 0, 0, 0, 0),$$

což není grafová posloupnost.

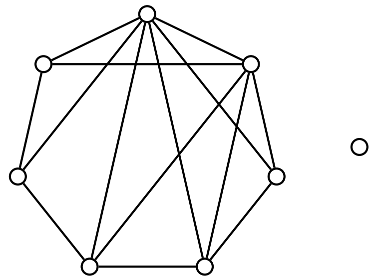
1.3.9. Kolik vrcholů má graf, který má 15 hran, 3 vrcholy stupně 4 a zbývající vrcholy stupně 3?
Z Principu sudosti je $2 \cdot 15 = 2|E| = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 3 \cdot 4 + (x - 3) \cdot 3$. Odtud vyjádříme $x = \frac{30-12}{6} + 3 = 9$.

1.3.10. Určete stupňovou posloupnost grafu G na Obrázku 1.1. Je to jediný graf s touto stupňovou posloupností?



Obrázek 1.1: *Graf G.*

Stupňová posloupnost je $(6,5,4,4,3,3,3,0)$. Graf není jediný, další graf se stejnou stupňovou posloupností je na Obrázku 1.2. Grafy G a G' jistě nejsou isomorfní. V grafu G' jsou dva vrcholy stupně 3 sousední, v grafu G takové dva sousední vrcholy nenajdeme.



Obrázek 1.2: *Graf G'.*

1.3.11. Nakreslete graf se stupňovou posloupností

a)♡ $(9,8,7,6,5,4,3,2,1)$

Takový graf neexistuje podle Principu sudosti, neboť $\sum_{x\in V}\deg(x)=45$ je liché číslo.

b) $(5,2,2,1,1,1)$ [existuje]

c) $(4,4,3,3,2,2,1,1,0,0)$ [existuje]

d) $(5,4,4,3,3,3,2,2)$ [existuje]

e) $(7,6,4,3,3,3,1,1)$

Užitím věty Havla–Hakimiho dostaneme posloupnost

$$(7,6,4,3,3,3,1,1) \overset{HH}{\sim} (5,3,2,2,2,0,0) \overset{HH}{\sim} (2,1,1,1,-1,0),$$

která jistě není grafová.

f)♡ $(5,5,1,1,1,1,1,1,1,1)$

Užitím věty Havla–Hakimiho dostaneme posloupnost

$$(5,5,1,1,1,1,1,1,1,1) \overset{HH}{\sim} (4,0,0,0,0,1,1,1,1) \sim (4,1,1,1,1,0,0,0,0) \overset{HH}{\sim} (0,0,0,0,0,0,0,0),$$

která je jistě grafová. Grafem je dvouhvězda se čtyřmi listy na každém centru.

g)♡ $(5,5,1,1,1,1,1,1)$

Užitím věty Havla–Hakimiho dostaneme posloupnost

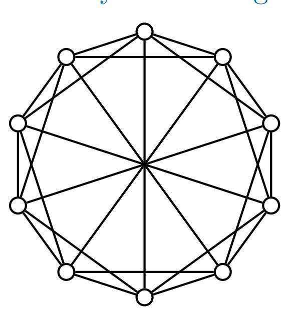
$$(5,5,1,1,1,1,1,1) \overset{HH}{\sim} (4,0,0,0,0,1,1) \sim (4,1,1,0,0,0,0) \overset{HH}{\sim} (0,0,-1,-1,0,0),$$

která jistě není grafová.

h) $(5,5,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ [existuje]

1.3.12. Najděte velikost největší nezávislé množiny vrcholů v grafu $K_{5,5}$. [5]

1.3.13. Najděte velikost největší nezávislé množiny vrcholů v grafu na Obrázku 1.3.



Obrázek 1.3: *Cirkulant* $C_{10}(1,2,5)$.

Největší nezávislá množina vrcholů obsahuje tři vrcholy. Očíslujeme vrcholy cirkulantu proti směru hodinových ručiček $1, 2, \cdots, 10$, nezávislé jsou například vrcholy $1, 4, 7$.

Každé čtyři vrcholy jsou závislé, neboť každý vrchol je spojen hranou se dvěma vrcholy po i proti směru hodinových ručiček. Proto vzdálenost nezávislých vrcholů měřena po obvodu musela být alespoň tři a cirkulant by musel mít alespoň dvanáct vrcholů.

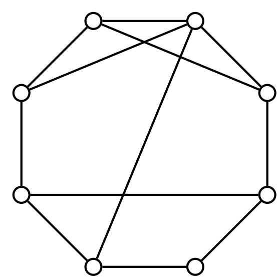
1.4 Podgrafy

Mějme dána kladná celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Cirkulantem $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ rozumíme graf $G = (V, E)$ na n vrcholech $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$, kde hranová množina je

$$E = \{v_i v_{(i+a_j) \bmod n} : 0 \leq i \leq n-1 \wedge 1 \leq j \leq k\}.$$

Příklad cirkulantu $C_{10}(1,2,5)$ je na Obrázku 1.10.

1.4.1. Mějme graf G na Obrázku 1.4.



Obrázek 1.4: *Graf* G.

a)$^\heartsuit$ Jaký je nejdelší cyklus obsažený jako podgraf v grafu G? [C_8]

b)$^\heartsuit$ Jaký je nejkratší cyklus obsažený jako podgraf v grafu G? [C_3]

c)$^\heartsuit$ Jaká je nejdelší cesta obsažená jako podgraf v grafu G? [P_8]

d)$^\heartsuit$ Jaký je nejkratší indukovaný cyklus v grafu G? [C_3]

e)* Jaký je nejdelší indukovaný cyklus v grafu G?

Nejdelší indukovaný cyklus je C_5.

Ukážeme, že nemůže existovat delší indukovaný cyklus. Očíslujeme si vrcholy proti směru hodinových ručiček od vrcholu stupně 4. Vrcholy 1, 2, 3 nemohou současně být v indukovaném cyklu a ani 1, 2, 8 nemohou být v indukovaném cyklu. Vynechat musíme 1 nebo 2. Podobně se ukáže, že vynecháme dva z vrcholů 4, 5, 6 a 7.

f)* Jaká je nejdelší indukovaná cesta v grafu G?

Očíslujeme si vrcholy proti směru hodinových ručiček od vrcholu stupně 4. Nejdelší indukovaná cesta je P_6 na šesti vrcholech, například vynecháním 1 a 7 dotaneme indukovanou cestu $8, 2, 3, 4, 5, 6$ nebo vynecháním 1 a 4 dostaneme indukovanou cestu $3, 2, 8, 7, 6, 5$.

Ukážeme, že delší indukovaná cesta existovat nemůže, protože vynecháním žádného jednoho vrcholu cestu nedostaneme.

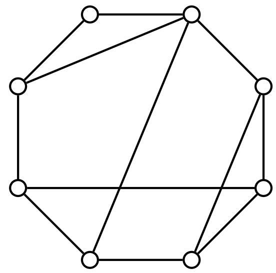
g) Jaká je velikost největší nezávislé množiny vrcholů grafu G?

Největší nezávislá množina má 3 vrcholy, například 1, 4, 7.

Vzhledem k cyklu C_8 mohou existovat nejvýše dvě možné nezávislé množiny čtyř vrcholů. Ani sudé, ani liché vrcholy však nezávislou množinu netvoří.

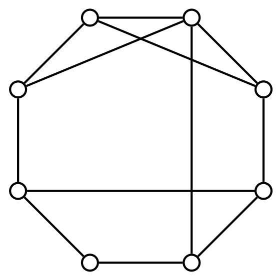
h) Existuje nějaký neisomorfní graf se stejnou stupňovou posloupností?

Ano existuje, příklad je na Obrázku 1.5. Nejsou isomorfní, protože vrchol stupně 4 je sousední vrcholu stupně 2, ale v grafu G nejsou sousední.



Obrázek 1.5: *Graf G' se stupňovou posloupností* $(4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2)$.

i) Ukažte, že graf G'' na Obrázku 1.6 je isomorfní s grafem G.



Obrázek 1.6: *Graf G'' se stupňovou posloupností* $(4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2)$.

Ukážeme, že grafy jsou isomorfní tak, že zkonstruujeme isomorfismus $f : V(G) \to V(G'')$. V grafu G očíslujeme si vrcholy proti směru hodinových ručiček od vrcholu stupně 4 jako $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ a podobně v grafu G očíslujeme vrcholy $1', 2', 3', 4', 5', 6', 7', 8'$. Isomorfismums je například

$$f(1) = 2', \quad f(2) = 1', \quad f(3) = 3', \quad f(4) = 4', \quad f(5) = 6', \quad f(6) = 5', \quad f(7) = 7', \quad f(8) = 8'.$$

1.4.2. Mějme grafy G a H na Obrázku 1.7.

Obrázek 1.7: *Grafy G a H.*

a) Jaká je nejdelší indukovaná cesta v grafu G?

Nejdelší indukovanou cestou v grafu G je P_4, například v_1, v_2, v_3, v_4, v_8.

b) Jaký je nejdelší indukovaný cyklus v grafu G?

Nejdelší indukovaný cyklus v grafu G je C_4, například v_1, v_2, v_5.

c) Jaká je nejdelší indukovaná cesta v grafu H?

Nejdelší indukovanou cestou v grafu H je P_6, například $v_1, v_5, v_6, v_3, v_4, v_8$.

d) Jaký je nejdelší indukovaný cyklus v grafu H?

Nejdelší indukovaný cyklus v grafu H je C_4, například v_1, v_2, v_5.

1.5 Isomorfismus grafů

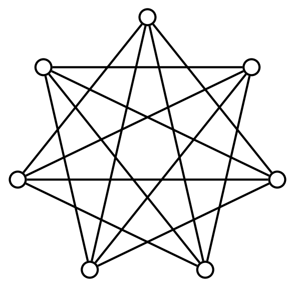
1.5.1. Kolik existuje neisomorfních 2-pravidelných grafů

a) na 5 vrcholech? [1]

b) na 6 vrcholech?

Existují dva neisomorfní 2-pravidelné grafy na šesti vrcholech: C_6 a $2C_3$.

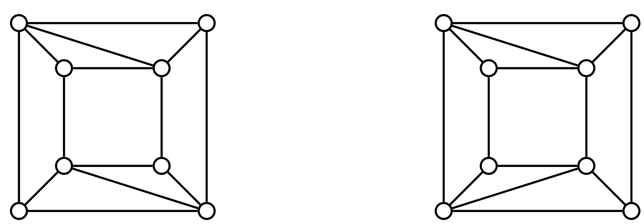
1.5.2. Jsou isomorfní grafy $K_7 - C_7$ a $K_7 - (C_3 \cup C_4)$?



Obrázek 1.8: *Grafy $K_7 - C_7$ a $K_7 - (C_3 \cup C_4)$.*

Ne, museli by mít stejné doplňky. Neexistenci isomorfismu ukážeme nejlépe rozebráním tří vrcholů vynechaného C_3.

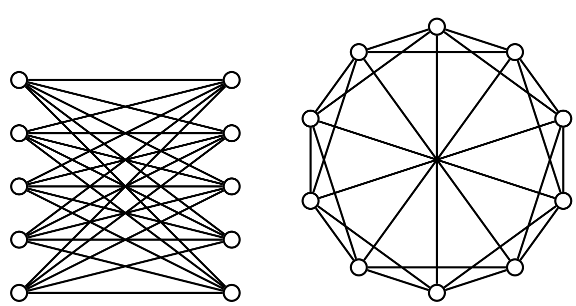
1.5.3. Jsou následující dva grafy G a H isomorfní?



Obrázek 1.9: *Grafy G a H.*

Grafy G a H nejsou isomorfní. Snadné zdůvodnění například je, že podgraf indukovaný na vrcholech stupně 4 je $2K_2$ v G a C_4 v H.

1.5.4. Jsou isomorfní $K_{5,5}$ a cirkulant $C_{10}(1,2,5)$ na Obrázku 1.10?



Obrázek 1.10: *Kompletní bipartitní graf $K_{5,5}$ a cirkulant $C_{10}(1,2,5)$.*

Ne, protože graf $K_{5,5}$ je bipartitní, ale cirkulant není. Bipartitní graf obsahuje jako podgrafy pouze sudé cykly, ale cirkulant $C_{10}(1,2,5)$ obsahuje jako podgraf například i cyklus C_3.

1.5.5. Kolik existuje neisomorfních 5-pravidelných grafů na osmi vrcholech?
Takové grafy existují tři, což snadno nahlédneme z jejich doplňku: $K_8 - C_8$, $K_8 - C_3 - C_5$ a $K_8 - 2C_4$.

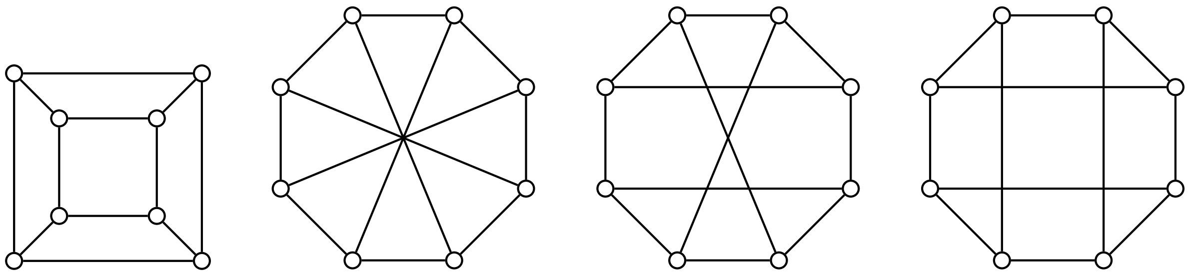
1.5.6. Existují dva neisomorfní grafy se stupňovou posloupností

a) $(3,3,3,3,3,3)$? Najděte je nebo ukažte, že takové grafy neexistují. [ano, $K_6 - C_6$ a $K_6 - 2C_3$]

b) $(3, 3, 2, 2)$? Najděte je nebo ukažte, že takové grafy neexistují.

Takový graf je jediný. Jedná je o graf na 4 vrcholech s pěti hranami. To je K_4 bez jedné hrany, proto je takový graf jediný.

1.5.7. Najděte mezi grafy G_1, G_2, G_3 a G_4 na Obrázku 1.11 všechny isomorfní dvojice. Pečlivě zdůvodněte.



Obrázek 1.11: *Grafy označené po řadě G_1, G_2, G_3 a G_4.*

Graf G_1 není isomorfní s grafem G_2 ani G_3, protože G_1 neobsahuje podgraf C_5. Naproti tomu existuje isomorfismus s grafem G_4 (při isomorfismu, který zobrazí vnitřní vrcholy na levé a pravé).

Z tranzitivity skládání isomorfismů (zobrazení) plyne, že G_4 není isomorfní s grafem G_2 ani G_3.

Zbývá zodpovědět, zda jsou G_2 a G_3 isomorfní. Ukážeme, že isomorfismus existuje. Označme vrcholy G_2 proti směru hodinových ručiček $1, 2, \ldots, 8$ a v G_3 $1', 2', \ldots, 8'$. Zobrazení $f(1) = 4'$, $f(2) = 3'$, $f(3) = 2'$, $f(4) = 1'$, $f(5) = 5'$, $f(6) = 6'$, $f(7) = 7'$ a $f(8) = 8'$ je isomorfismus $G_2 \simeq G_3$.

1.5.8. Najděte všechny neisomorfní jednoduché grafy na čtyřech vrcholech. [jedenáct grafů]

1.6 Implementace grafů

1.6.1.* Naprogramujte algoritmus, jak rozmístit 8 královen na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovaly.

1.6.2. Naprogramujte algoritmus, který vygeneruje všechny grafy na n vrcholech, jestliže rozlišujeme pojmenování vrcholů, tj. například pro $V = \{1, 2, 3\}$ rozlišíme grafy s $E_1 = \{12\}$ a s $E_2 = \{23\}$.

1.7 Příklady k procvičení

1.7.1.$^\heartsuit$ Srovnejme grafy $K_{6,6}$ a K_9.

a) Který má více vrcholů?

$|V(K_{6,6})| = 12 > 9 = |V(K_9)|$

b) Který má více hran?

$|E(K_{6,6})| = 36 = |E(K_9)|$

1.7.2. Srovnejme grafy $K_{20,20}$ a K_{29}.

a) Který má více vrcholů?

$|V(K_{20,20})| = 40 > 29 = |V(K_{29})|$

b) Který má více hran?

$|E(K_{6,6})| = 400 < 406|E(K_{29})|$

1.7.3. Kolik hran a kolik vrcholů má C_n?
Z definice můžeme pro počet vrcholů odvodit:

$$|V(C_n)| = |\{a_i : i = 1, 2, \ldots, n\}| = n$$

Podobně pro počet hran máme

$$|E(C_n)| = |\{a_i a_{i+1} : i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{a_n a_1\}| = (n-1) + 1 = n$$

1.7.4. Pro jaké m, n neobsahuje $K_{m,n}$ žádný cyklus?
Je zřejmé, že pro $m \geq 2$ nebo $n \geq 2$ obsahuje graf $K_{m,n}$ v každé partitě dva vrcholy u_1, u_2 a v_1, v_2 a na nich cyklus u_1, v_1, u_2, v_2. Zbývající případy probereme podrobně. Pro $m = 1$ a $n \geq 1$ má graf $K_{1,n}$ pouze jeden vrchol stupně většího než 1 a proto neobsahuje žádný cyklus. Podobně pro $m \geq 1$ a $n = 1$.

1.7.5.♡ Kolik hran musíme odebrat z grafu K_6, abychom dostali $K_{3,3}$? [6 hran]

1.7.6. Pro která n je následující stupňová posloupnost grafová?

a) $(n, n-1, \dots, 1)$

Takový jednoduchý graf neexistuje, neboť pro graf na n vrcholech je nejvyšší stupeň roven $n-1$, nikoli n. Proto pro žádnou hodnotu n není daná posloupnost grafová.

b) $(n-1, n-2, \dots, 0)$

V grafu na n vrcholech, ve kterém je vrchol stupně $n-1$ nemůže existovat jiný izolovaný vrchol stupně 0. Takový jednoduchý graf existuje pouze v případě, že $n-1 = 0$, tj. pro $n = 1$. Takovým grafem je pouze K_1 a posloupnost je grafová pouze pro $n = 1$.

c) $(n, n, n-n, n-1, n-2, n-2, \dots, 1, 1)$

Posloupnost je grafová pro každé $n \geq 1$. Tvrzení ukážeme indukcí.

Základ indukce: pro $n = 1$. Posloupnost $(1, 1)$ je grafová, neboť je jedná o stupňovou posloupnost grafu K_2.

Indukční krok: Předpokládejme, že posloupnost $P = (n, n, n-1, n-1, n-2, n-2, \dots, 1, 1)$ je grafová. Ukážeme, že také posloupnost $P' = (n+1, n+1, n, n, n-n, n-1, n-2, n-2, \dots, 1, 1)$ je grafová.

Protože posloupnost $P = (n, n, n-1, n-1, n-2, n-2, \dots, 1, 1)$ je grafová, existuje graf G, který má tuto stupňovou posloupnost. Přidáme vrcholy x a y. Vrchol x spojíme hranou s vrcholem y, s jedním z vrcholů stupně 1, dále s jedním z vrcholů stupně 2 atd. až s jedním z vrcholů stupně n, celkem s $n+1$ vrcholy. Dostaneme tak graf G' se stupňovou posloupností $(n+1, n+1, n, (n-1)+1, n-1, (n-2)+1, n-2, (n-3)+1, \dots, 1+1, 1, 1) = (n+1, n+1, n, n, n-n, n-1, n-2, n-2, \dots, 1, 1)$. Proto také posloupnost P' je grafová a důkaz končí.

1.7.7. Pro které hodnoty n a r existuje grafu na n vrcholech, kde každý vrchol je stupně r? Dokažte.
Podle Principu sudosti neexistuje graf na lichém počtu vrcholů, kde každý vrchol je lichého stupně. Pro ostatní případy

- n liché, r sudé
- n sudé, r sudé
- n sudé, r liché

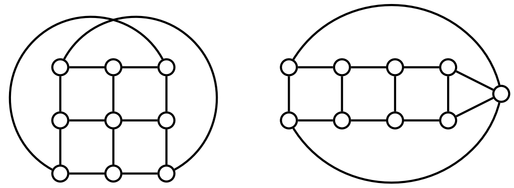
Takový graf vždy existuje.

Konstrukce například užitím cirkulantu. Pro r sudé stačí vzít $C(1, 2, \dots, \frac{r}{2})$, pro r liché (a n sudé dle Principu sudosti) vezmeme $C(1, 2, \dots, \frac{r-1}{2}, \frac{n}{2})$.

1.7.8. Jsou grafy $K_{3,3}$ a cirkulant $C_6(1, 3)$ isomorfní? [ano]

1.7.9. Jsou grafy $K_{4,4}$ a cirkulant $C_8(1, 2)$ isomorfní?
Cirkulant $C_8(1, 2)$ obsahuje trojúhelníky, zatímco bipartitní graf $K_{4,4}$ ne.

1.7.10. Jsou následující dva grafy G a H isomorfní?



Obrázek 1.12: *Grafy G a H.*

Grafy G a H nejsou isomorfní. Pokud odstraníme (jediný) vrchol stupně 4, tak v G nejsou žádné dva vrcholy stupně 2 sousední, zatímco v grafu G budou vrcholy stupně 2 po dvou sousední.

1.7.11.* Na jakém nejmenším počtu vrcholů najdete dva neisomorfní grafy se stejnou stupňovou posloupností?

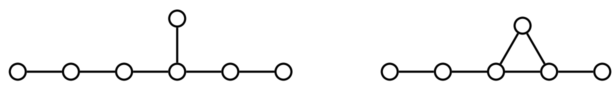
Pro grafy na méně než pěti vrcholech snadno ověříme prozkoumáním případů, že graf je určen stupňovou poslouností jednoznačně.

- jeden vrchol (jeden graf): (0)
- dva vrcholy (dva grafy): $(0,0)$, $(1,1)$
- tři vrcholy (čtyři grafy): $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,2,1)$, $(2,2,2)$
- čtyři vrcholy (jedenáct grafů): $(0,0,0,0)$, $(1,1,0,0)$, $(1,1,1,1)$, $(1,2,1,0)$, $(1,2,2,1)$, $(3,1,1,1)$, $(2,2,2,0)$, $(2,2,2,2)$, $(3,2,2,1)$, $(3,3,2,2)$, $(3,3,3,3)$.

Pro 5 vrcholů najdeme $G = P_4$ a $G' = P_1 \cup C_3$.

1.7.12.* Strnulý graf má pouze triviální automorfismus. Najděte strnulý graf s co nejmenším počtem vrcholů.

Nejmenší strom je cesta P_6 s připojeným vrcholem ke čtvrtému vrcholu, nejmenší graf je C_3 s připojenými cestami P_1 a P_2.



Obrázek 1.13: *Nejmenší strom a nejmenší graf s triviálním automorfismem.*

1.7.13. Kolik existuje grafů se sedmi vrcholy stupně 2?

Existují dva takové grafy: C_7 a $C_3 \cup C_4$.

1.7.14. Kolik existuje grafů s deseti vrcholy stupně 2?

Existuje pět takových grafů. Jeden s jednou komponentou: C_7 Tři se dvěma komponentami: $C_3 \cup C_7$, $C_4 \cup C_6$, $C_5 \cup C_5$. Jeden se třemi komponentami $C_3 \cup C_3 \cup C_4$. Celkem $1 + 3 + 1 = 5$.

2 Souvislost grafu

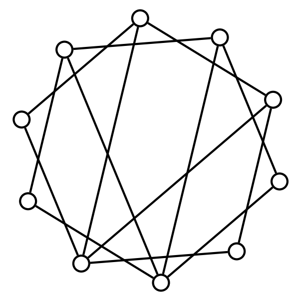
Souvislost grafu je zavedena ve skriptech [UTG].

2.1 Souvislost a komponenty grafu

2.1.1.♡ Kolik komponent souvislosti má souvislý graf?
Z definice souvislosti existuje mezi každými dvěma vrcholy souvislého grafu sled. Dále zavedeme relaci jako v definici komponent grafu. Dva vrcholy jsou v relaci, jestliže mezi nimi v grafu G existuje sled. Tato relace je ekvivalence (reflexivní, symetrická i tranzitivní) a (podle definice komponenty) komponenta je graf indukovaný na každé třídě rozkladu. Pokud je graf souvislý, jsou každé dva vrcholy v relaci a rozklad má jedinou třídu. Proto souvislý graf má jedinou komponentu.

2.1.2.♡ Kolik komponent souvislosti má nesouvislý graf? [alespoň dvě komponenty]

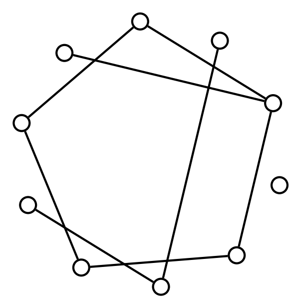
2.1.3.♡ Kolik komponent souvislosti má graf na Obrázku 2.1? Je souvislý?



Obrázek 2.1: *Graf G.*

[dvě komponenty, ne]

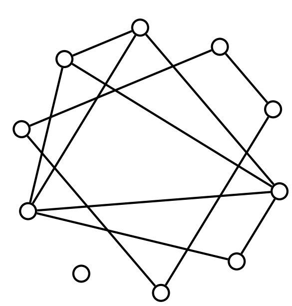
2.1.4. Kolik komponent souvislosti má graf G na Obrázku 2.2? Je souvislý?



Obrázek 2.2: *Graf G.*

[tři komponenty, ne]

2.1.5.♡ Kolik komponent souvislosti má graf na Obrázku 2.3? Je souvislý?



Obrázek 2.3: *Graf G.*

[tři komponenty, ne]

2.1.6. Kolik komponent souvislosti má cirkulant $C_{12}(3,6)$? [tři]

2.1.7. Kolik komponent má graf s deseti vrcholy stupně 5? Dokažte.
Protože každý vrchol je stupně 5, má každý vrchol pět sousedních vrcholů v téže komponentě a každá komponenta má alespoň šest vrcholů. Pokud by graf měl mít více než jednu komponentu, musel by mít alespoň $6+6=12$ vrcholů, což není možné. Proto má graf jen jedinou komponentu (viz například Obrázek 1.10).

2.1.8. Kolik komponent může mít graf s deseti vrcholy a 25 hranami? Dokažte.
Graf z předchozího příkladu 7 má $10 \cdot 5/2 = 25$ hran. Ukážeme, že podmínka stanovena v tomto příkladu je volnější. Graf, který má celkem 25 hran,

- může být souvislý (například $K_{5,5}$),
- může mít dvě komponenty (například K_1 spolu s K_9, ze kterého vynecháme $\binom{9}{2} - 25 = 36 - 25 = 11$ hran tak, aby zůstal souvislý graf; například 9 hran cyklu a dvě jeho chordály),
- může mít tři komponenty (například dvě kopie K_1 spolu s K_8, ze kterého vynecháme $\binom{8}{2} = 28-25 = 3$ hrany; výsledný graf je jistě souvislý, protože K_8 je hranově 7-souvislý).
- nemůže mít čtyři komponenty, neboť největší taková komponenta by měla 7 vrcholů a v ní by bylo nejvíce $\binom{7}{2} = 21 < 25$ hran.

Dále se podobným argumentem jako ve vzorovém příkladu ukáže, že jiné rozdělení na 4 komponenty také není možné.

2.1.9. Kolik existuje různých grafů s deseti vrcholy, třemi komponentami a 25 hranami? Dokažte.
Podle předchozího příkladu 8 víme, že takový graf existuje. Největší komponenta musí mít alespoň 8 vrcholů, jinak dvě komponenty, které mají v součtu nejvýše 9 vrcholů nemohou mít celkem 25 hran.

Hledaný graf obsahuje dvě kopie K_1 spolu s K_8, ze kterého vynecháme $\binom{8}{2} = 28-25 = 3$ hrany. Existuje celkem 5 možností, které snadno popíšeme v doplňku grafu K_8 bez tří hran:

- tři vynechané hrany jsou nezávislé,
- dvě vynechané hrany jsou incidentní a třetí je nezávislá,
- tři vynechané hrany tvoří cestu délky 3,
- tři vynechané hrany tvoří hvězdu $K_{1,3}$,
- tři vynechané hrany tvoří cyklus C_3.

2.1.10.$^\heartsuit$ Kolik komponent má graf s patnácti vrcholy stupně 5? Dokažte.
Součet stupňů je $5 \cdot 15 = 75$, ale podle Principu sudosti je součet stupňů v grafu sudé číslo. Proto takový graf neexistuje.

2.1.11. Kolik komponent může mít graf s deseti vrcholy stupně 2? Dokažte.
Protože každý vrchol je stupně 2, má každý vrchol dva sousední vrcholy v téže komponentě a každá komponenta má alespoň tři vrcholy. Pokud by graf měl mít více než tři komponentu, musel by mít alespoň $3 \cdot 4 = 12$ vrcholů, což není možné. Proto má graf jednu (C_{10}), dvě ($2C_5$) nebo tři komponenty ($2C_3 \cup C_4$).

2.1.12. Kolik nejvýše hran může mít graf na deseti vrcholech, který má dvě komponenty? Najdete takový graf?
Předpokládejme, že máme graf se dvěma komponentami H_1 a H_2, který má největší počet hran. Nejprve si všimneme, že obě komponenty jsou kompletní grafy, jinak bychom mohli nějaké hrany přidat (G by nebyl a největším počtem hran).

Máme proto $G \simeq K_i \cup K_{10-i}$. Vyjádříme si počet hran v závislosti na proměnné i.

$$|E(G)| = |E(K_i)|+|E(K_{10-i})| = \binom{i}{2}+\binom{10-i}{2} = \frac{1}{2}i(i-1)+\frac{1}{2}(10-i)(9-i) = \frac{1}{2}\left(i^2 - i + 90 - 19i + i^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2i^2 - 20i + 90\right) = i^2 - 10i + 45 = (i-5)^2 + 20.$$

Najdeme (celočíselné) maximum funkce $E(i) = i^2 - 10i + 45$ v závislosti na proměnné i na intervalu $\langle 1, 9\rangle$. K řešení můžeme použít diferenciální počet a nebo pozorování, že grafem kvadratické funkce s *reálnou* proměnnou i by byla parabola otevřená směrem nahoru. Minimum (vrchol) má v bodě $[5, 20]$, maximum nabývá v krajních bodech intervalu $\langle 1, 9\rangle$. Vzhledem k symetrii úlohu je $E_{max}(G) = E(9) = E(1) = 1 - 10 + 45 = 36$. Maximální počet hran s danými parametry má graf $G = K_1 \cup K_9$.

2.1.13. Kolik nejvýše hran může mít graf na deseti vrcholech, který má dvě komponenty a žádný vrchol stupně většího než 3? Najdete takový graf?
Odhad počtu hran grafu G z Principu sudosti

$$|E(G)| = \frac{1}{2}\sum_{x \in V(G)} \deg(x) \le \frac{1}{2}10 \cdot 3 = 15.$$

Kdyby komponenty G měly pět vrcholů, tak byl součet stupňů musel být menší než $3 \cdot 5$, nejvýše $3+3+3+3+2$ a počet hran by byl nejvýše $\frac{1}{2}(14+14) = 14$ hran. Pokud by některá komponenta měla méně než 4 vrcholy, tak stupně vrcholů by byly menší než 3. Proto pokud má existovat graf s počet hran 15, musí jedna komponenta mít 4 vrcholy stupně 3, tj. K_4. Druhá komponenta bude mít 6 vrcholů stupně 3. Takové grafy existují dva (doplněk je 2-regulární graf): $K_6 - C_6$ a $K_6 - (C_3 \cup C_3)$. Grafy $K_4 \cup K_6 - C_6$ i $K_6 - (C_3 \cup C_3)$ mají $6 + 9 = 15$ hran.

2.1.14. Kolik nejméně hran může mít graf na deseti vrcholech, který má dvě komponenty?
Grafy, které mají nejmenší počet hran a jsou přitom souvislé, jsou stromy. Proto hledaný graf je lesem, jehož každá komponenta je strom.

Je-li první komponenta strom na t vrcholech, má $t-1$ hran. Druhá komponenta je na $10-t$ vrcholech a má $9-t$ hran. Celkem má graf $(t-1)+(9-t) = 8$ hran.

2.1.15. Kolik nejméně hran může mít graf na n vrcholech, který má k komponent?
Grafy, které mají nejmenší počet hran a jsou přitom souvislé, jsou stromy. Proto hledaný graf je lesem, jehož každá komponenta je strom.

Je-li každá komponenta strom na n_i vrcholech, má každá $n_i - 1$ hran. A protože $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, má graf celkem $\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k = n - k$ hran.

2.2 Prohledávání grafu

2.2.1. Jaká je složitost algoritmu (uvedeného na přednášce) pro prohledávání do šířky? $[O(n+m)]$

2.2.2. Jaká je složitost algoritmu (uvedeného na přednášce) pro prohledávání do hloubky? $[O(n+m)]$

2.3 Vyšší stupně souvislosti

2.3.1. Mějme kompletní bipartitní graf $K_{m,n}$.

a) Jaký je hranový stupeň souvislosti $K_{m,n}$?

Pomocí Mengerových vět snadno ukážeme, že hranový stupně souvislosti grafu $K_{m,n}$ je $\min\{m, n\}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $m \ge n$, proto $\min\{m, n\} = n$.

Označme partity grafu $K_{m,n}$ jako U a W a jejich vrcholy $u_1, u_2, \ldots, u_m$ a $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Nyní zkonstruujeme mezi libovolnými dvěma různými vrcholy x, y grafu $K_{m,n}$ n hranově disjunktních cest.

1. Jsou-li $x, y \in U$, můžeme vrcholy v U přečíslovat tak, aby $x = u_1$ a $y = u_2$. Nyní cesty $P^{(1)} = u_1, w_1, u_2$, $P^{(2)} = u_1, w_2, u_2$, až $P^{(n)} = u_1, w_n, u_2$ jsou hranově disjunktní.
2. Jsou-li $x, y \in W$, můžeme vrcholy v W přečíslovat tak, aby $x = w_1$ a $y = w_2$. Nyní cesty $P^{(1)} = w_1, u_1, w_2$, $P^{(2)} = w_1, u_2, w_2$, až $P^{(n)} = w_1, u_n, w_2$ jsou hranově disjunktní.

3. Jsou-li $x \in U$ a $y \in W$ (podobně naopak), můžeme vrcholy v U a W přečíslovat tak, aby $x = u_1$ a $y = w_2$. Nyní cesta (hrana) $P^{(1)} = u_1, w_1$ a cesty, $P^{(2)} = u_1, w_2, u_2, w_1$, $P^{(3)} = u_1, w_3, u_3, w_1$, až $P^{(n)} = u_1, w_n, u_n, w_1$ jsou hranově disjunktní.

Protože mezi libovolnými dvěma vrcholy x, y grafu $K_{m,n}$ existuje n hranově disjunktních cest a protože odstraněním všech n hran z jednoho vrcholu partity U dostaneme nesouvislý graf, je hranový stupeň souvislosti grafu $K_{m,n}$ roven $\min\{m, n\}$.

Na druhou stranu hranový stupeň souvislosti nemůže být větší než n, neboť odebereme-li všech n hran incidentních s vrcholem u_1, zůstane izolovaný vrchol u_1 a výsledný graf není souvislý.

b) Jaký je vrcholový stupeň souvislosti $K_{m,n}$?

Protože cesty zkonstruované v předchozím příkladu jsou nejen hranově, ale i vrcholově disjunktní, je důkaz i řešení analogické.

Pro $m = n = 1$ je graf kompletní a jeho vrcholový stupeň souvislosti je $m = n = 1$. Pro $m \geq 2$ můžeme uvažovat následovně: vrcholový stupeň souvislosti nemůže být větší než n, neboť odebereme-li všech n vrcholů z menší partity, dostaneme nesouvislý graf.

2.3.2. Mějme cyklus C_n.

a) Jaký je hranový stupeň souvislosti C_n?

Odebráním libovolné hrany z C_n dostaneme cestu P_{n-1} (dle značení skript). Graf $C_n - xy$ zůstane souvislý a hranová souvislost je proto větší než 1. Ukážeme, že je 2.

Zvolíme libovolný vrchol x grafu C_n. Odebráním obou incidentních hran dostaneme izolovaný vrchol a cestu P_{n-2}, tj. dvě komponenty. Proto je hranová souvislost C_n rovna 2.

b) Jaký je vrcholový stupeň souvislosti C_n?

Odebráním libovolného vrcholu z C_n dostaneme cestu P_{n-2} (dle značení skript). Graf $C_n - v$ zůstane souvislý a vrcholová i hranová souvislost jsou větší než 1. Ukážeme, že je 2.

Zvolíme libovolný vrchol x grafu C_n a odebereme oba jeho sousedy. Nyní mohou nastat dva případy

1. $n = 3$ a bylo tedy $C_3 = K_3$. Odebráním dostaneme jen jeden izolovaný vrchol. Podle definice je vrcholová souvislost grafu K_3 rovna 2
2. $n > 3$ a odebráním sousedních vrcholů dostaneme izolovaný vrchol a zůstanou i další vrcholy, tedy alespoň dvě komponenty.

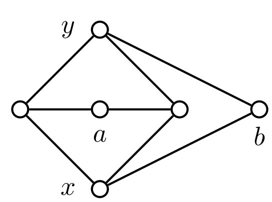
Vrcholová souvislost grafu C_n je 2.

2.3.3.$^\heartsuit$ Víte, že minimální stupeň grafu G je 5.

a) Co můžete říci o hranové souvislosti grafu G? [hranový stupeň souvislosti je nejvýše 5]

b) Co můžete říci o vrcholové souvislosti grafu G? [vrcholový stupeň souvislosti je nejvýše 5]

2.3.4. Máme dán graf $K_{3,3}$ bez jedné hrany, viz Obrázek 2.4.



Obrázek 2.4: *Graf $K_{3,3} - e$.*

a) Kolik hran musíme z grafu vynechat, aby neexistovala cesta mezi vrcholy a, b? Zdůvodněte!

Odebráním obou hran incidentních s vrcholem a dostaneme nesouvislý graf. Protože najdeme dvě hranově disjunktní cesty mezi a a b, nestačí odebrat jedinou hranu.

b) Kolik hran musíme z grafu vynechat, aby neexistovala cesta mezi vrcholy x, y? Zdůvodněte!

Odebráním všech tří hran incidentních s vrcholem x dostaneme nesouvislý graf. Protože najdeme tři hranově disjunktní cesty mezi x a y, nestačí odebrat dvě hrany.

2.3.5.$^\heartsuit$ Kolik musíme přidat hran do grafu P_5, aby byl 2-souvislý? [jednu]

2.3.6. Kolik musíme přidat hran do grafu P_6, aby byl 3-souvislý?
Aby graf byl 3-souvislý, musí být nejmenší stupeň grafu 3 (jinak by stačilo odebrat vrcholy sousední s vrcholem nejmenšího stupně). Podle Principu sudosti by takový graf měl mít $\frac{1}{2}3 \cdot 6 = 9$ hran. Ale P_6 má jen 5 hran, musíme přidat alespoň čtyři hrany.

Naproti tomu čtyři hrany přidat stačí tak, abychom graf doplnili na $K_{3,3}$. Výsledný graf je 3-souvislý podle Mengerových vět, neboť mezi každou dvojicí vrcholů najdeme tři interně disjunktní cesty.

2.3.7. Najděte příklad grafu, kde každý vrchol je stupně r a hranová i vrcholová souvislost je 1.

2.3.8. Najděte příklad grafu, kde každý vrchol je stupně r a hranová i vrcholová souvislost je 2. [například dvě kopie grafu $K_{r+1} - e$, kde vrcholy stupně $r - 1$ z různých kopií jsou spojeny hranami]

2.3.9. Najděte příklad grafu, kde každý vrchol je stupně r a hranová i vrcholová souvislost je $k \le r$.

2.3.10. Mějme libovolná přirozená čísla $a \le b \le c$. Najděte příklad grafu, kde každý vrchol je stupně c a hranová souvislost je b a vrcholová souvislost je a.

2.3.11. Najděte příklad souvislého grafu, jehož vrcholová souvislost je menší než hranová souvislost. [motýlek]

2.3.12. Najděte příklad souvislého grafu, jehož hranová souvislost je menší než vrcholová souvislost.
Ukážeme, že takový graf neexistuje.
Důkaz 1: zvolením koncového vrcholu hranového řezu
Má-li graf G vrcholovou souvislost k, existuje v něm k hran tak, že odebráním těchto k hran dostaneme nesouvislý graf. Zvolme pro každou hranu ten její koncový vrchol, který je stupně většího než 1. Pokud takový vrchol neexistuje, musí být $G \simeq K_2$ a hranová i vrcholová souvislost jsou rovny 1 (hranová souvislost není menší).
Důkaz 2: Užitím Mengerových vět
Má-li graf G vrcholovou souvislost k, existuje v něm dle jedné Mengerovy věty mezi dvěma libovolnými vrcholy k vrcholově disjunktních cest. Vrcholově disjunktní cesty nesdílí žádný vrchol (kromě koncových vrcholů) a proto jsou i hranově disjunktní a tak podle druhé Mengerovy věty je i hranová souvislost alespoň k. Platí proto

$$\text{vrcholová souvislost } G \le \text{hranová souvislost } G.$$

2.3.13. Nakreslete 2-souvislý graf na co nejmenším počtu vrcholů tak, aby z něj přidáním jediné hrany vznikl 3-souvislý graf.
Takový graf by mohl být například $K_4 - e$.

2.3.14.* Dokážete nakreslit 2-souvislý graf na co nejmenším počtu vrcholů a nejvýše dvěma vrcholy stupně dva tak, že přidáním jediné hrany nevznikne 3-souvislý graf?
Příklady řešení viz obrázek 2.5.

Obrázek 2.5: *2-souvislé grafy, přidáním jedné hrany nevznikne 3-souvislý graf.*

2.4 Příklady k procvičení

2.4.1.$^\heartsuit$ Může existovat souvislý graf, který má více vrcholů než hran? Pokud ano, najděte příklad, pokud ne, dokažte. [ano, každý strom]

2.4.2. Najděte všechny souvislé grafy, které mají více vrcholů než hran.
Stromy jsou minimální souvislé grafy na n vrcholech, proto žádný souvilý graf s méně než $n-1$ hranami na n vrcholech nemůže existovat. Naproti tomu je-li počet hran $n-1$ a graf je souvislý, musí býti stromem. Pokud by nebyl acyklický, tak vynecháním některé hrany nějakého cyklu dostaneme opět souvislý graf, který by měl méně než $n-1$ hran, což není možné. Hledané grafy jsou právě stromy.

2.4.3. Může existovat souvislý graf, který má n vrcholů a méně než $n-1$ hran? Pokud ano, najděte příklad, pokud ne, dokažte.
Takový graf nemůže existovat. Ukážeme, že graf na n vrcholech, který obsahuje $n-2$ hran, není souvislý.

Graf na n vrcholech bez hran má n komponent. Přidáním jedné hrany do grafu, může snížit počet komponent o 1. Pokud má hrana každý koncový vrchol v jiné komponentě, pokud jsou oba koncové vrcholy z téže komponenty, počet komponent se nezmění. Přidáním libovolných $n-2$ hran ubude nejvýše $n-2$ komponent a z celkového počtu n komponent musí v grafu zůstat alespoň 2 komponenty. Proto graf na n vrcholech s méně než $n-1$ hranami není souvislý.

Jiné řešení:
Pokud víme, že strom na n vrcholech je minimální souvislý graf na daném počtu vrcholů, tak hledaný graf musí být stromem. Víme ale (z přednášek), že strom na n vrcholech má $n-1$ hran. Proto souvislý graf na n vrcholech s méně než $n-1$ hranami není souvislý.

2.4.4. Ukažte, že není možné putovat koněm po celé šachovnici 3×3.
Není možno skočit na prostřední políčko. Příslušný graf není souvislý.

2.4.5. Kolik nejvíce hran může mít graf s $n \geq 2$ vrcholy a 2 komponentami?
Velikosti komponenet budou, $n_1 = n-1$ a $n_2 = 1$, počet hran bude $\binom{n-1}{2}$.

2.4.6.* Kolik nejvíce hran může mít graf s n vrcholy a k komponentami? Předpokládáme, že $k \leq n$.
Velikosti komponenet budou $n_1 = n-k+1$ a $n_2 = n_3 = \ldots = n_k = 1$.

2.4.7. Kolik nejméně hran musí mít 3-souvislý graf

a) na 6 vrcholech? [9]

b) na 12 vrcholech?

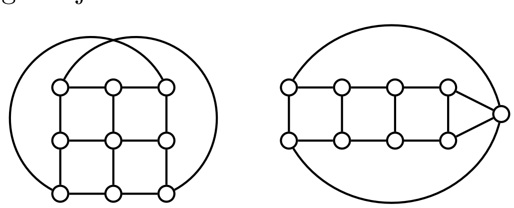
Každý vrchol hledaného souvislého grafu musí být stupně alespoň 3, jinak by stačilo odebrat 2 sousední vrcholy vrcholu stupně 2, abychom dostali nesouvislý graf. Z Principu sudosti je

$$2|E| = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq 3|V(G)| = 36.$$

Proto musí mít hledaný graf alespoň 18 hran. Příkladem takového grafu je $C_{12}(1,6)$, proto takový graf s 18 hranami existuje.

c) na 9 vrcholech?

Podobným výpočtem jako v předchozí čásli dostaneme $|E| \geq \frac{27}{2}$. Proto hledaný graf musí mít alespoň 14 hran. Příklad takového grafu je na Obrázku 2.6.



Obrázek 2.6: *3-souvislé grafy se 14 hranami.*

2.4.8. Definujme graf $Z_2(n)$ jako graf, jehož vrcholy jsou všechny dvouprvkové podmnožiny nějaké n prvkové množiny, $n \geq 2$. Dva vrcholy jsou sousední, jestliže odpovídající vrcholy jsou disjunktní.

a) Pro která n je graf $Z_2(n)$ souvislý? $[n \geq 5]$

b) Je graf $Z_2(n)$ pravidelný? [ano]

c) Jaký je stupeň souvislosti grafu $Z_2(n)$? [pro $n = 1$ neezistuje; pro $n = 2$ triviální graf; pro $n = 3, 4$ nesouvislý; pro $n \geq 5$ je stupeň souvislosti $\binom{n-2}{2}$]

2.4.9. Definujme graf $Z_2^*(n)$ jako graf, jehož vrcholy jsou všechny dvouprvkové podmnožiny nějaké n prvkové množiny, $n \geq 2$. Dva vrcholy jsou sousední, jestliže odpovídající vrcholy nejsou disjunktní.

a) Pro která n je graf $Z_2(n)$ souvislý? [všechna $n \geq 2$]

b) Je graf $Z_2(n)$ pravidelný? [ano]

c) Jaký je stupeň souvislosti grafu $Z_2(n)$? $[n - 2]$

2.4.10.* Na množině čtyř vrcholů konstruujeme náhodný jednoduchý neorientovaný graf (bez smyček) tak, že každou dvojici vrcholů spojíme hranou s pravděpodobností p. Určete pravděpodobnost, že výsledný graf bude obsahovat a) alespoň jeden izolovaný vrchol, b) alespoň jeden trojúhelník.

2.4.11. Pat a Mat hrají hru: Mají daný souvislý graf G a buď Pat odstraní p vrcholů nebo Mat odstraní m hran. Kdo odstraní méně objektů (vrcholů nebo hran), vyhrál. Kdo vyhraje, jestliže

a) $G = P_n$? [remíza pro $n = 1$ a $n \geq 3$, pro $n = 2$ vyhraje Mat]

b) $G = K_n$? [remíza pro $n = 1$, pro $n \geq 22$ vyhraje Mat]

c) $G = C_n$? [remíza pro $n \geq 4$, pro $n = 3$ vyhraje Mat]

d) $G = K_{m,n}$? [pro $m = n = 1$ vyhraje Mat, jinak remíza]

2.4.12. Mějme přirozené číslo $n \neq 2$. Ukažte, že cirkulant $C_{2n}(1, n)$ je 3-souvislý.

Nejprve ukážeme, že vrcholová ani hranová souvislost cirkulantu $G = C_{2n}(1, n)$ není vyšší než 3. Odstraníme-li všechny vrcholy sousední s jedním pevně zvoleným vrcholem, dostaneme nesouvislý graf nebo triviální graf. Proto $\kappa(G) \leq 3$, $\kappa'(G) \leq 3$.

Dále ukážeme, že mezi libovolnou dvojicí vrcholů $u, v \in V(G)$ existují alespoň tři interně (a tedy i hranově) disjunktní cesty. Vrcholy cirkulantu označíme po řadě $v_1, v_2, \ldots, v_{2n}$. Bez újmy na obecnosti zvolíme $u = v_1$ a $v = v_i$ pro $i \in [2, n]$ (všimněte si, že $i \in [n + 1, 2n]$ při vhodném označení nenastane). Nyní tři interně disjunktní cesty jsou:

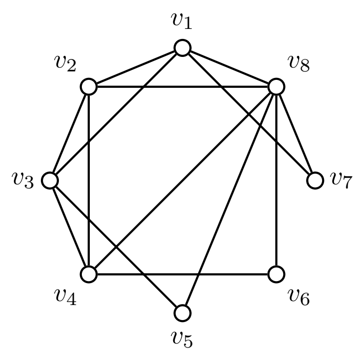
$$P_1 = v_1, v_2, \ldots, v_i, \qquad P_2 = v_1, v_{n+1}, \ldots, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_i, \qquad P_3 = v_1, v_{2n}, \ldots, v_{n+i}, v_i.$$

3 Eulerovské a hamiltonovské grafy

Eulerovské a hamiltonovské grafy jsou zavedeny ve skriptech [UTG].

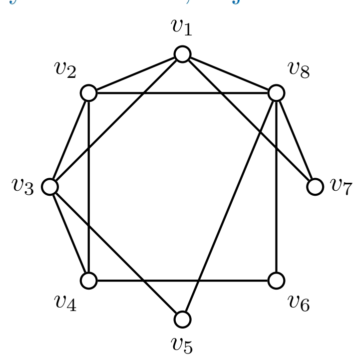
3.1 Eulerovské grafy

3.1.1. Je graf na Obrázku 3.1 eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.



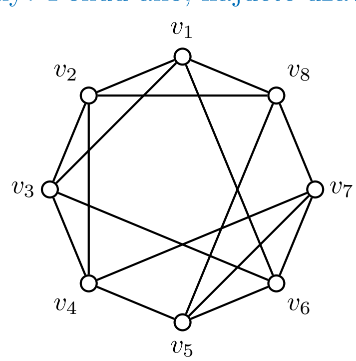
Obrázek 3.1: *Graf G.*

3.1.2. Je graf na Obrázku 3.2 eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.



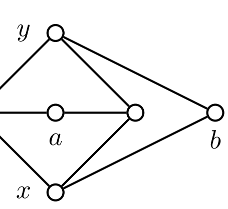
Obrázek 3.2: *Graf G.*

3.1.3. Je graf na Obrázku 3.3 eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.



Obrázek 3.3: *Graf G.*

3.1.4. Máme dán graf $K_{3,3}$ bez jedné hrany, viz Obrázek 3.4.



Obrázek 3.4: *Graf* $K_{3,3} - e$.

a) Je možno graf $K_{3,3} - e$ nakreslit jedním uzavřeným tahem? Nakreslete nebo zdůvodněte, proč to není možné. [ne]

b) Je možno graf $K_{3,3} - e$ nakreslit jedním otevřeným tahem? Nakreslete nebo zdůvodněte, proč to není možné. [ne]

c) Je možno graf $K_{3,3} - e$ nakreslit dvěma otevřenými tahy? Nakreslete nebo zdůvodněte, proč to není možné. [ano]

d) Kolik nejméně hran je třeba přidat do grafu $K_{3,3} - e$, aby jej bylo možno nakreslit jedním otevřeným tahem? [1 hranu]

e) Kolik nejméně hran je třeba přidat do grafu $K_{3,3} - e$, aby jej bylo možno nakreslit jedním uzavřeným tahem? [2 hrany]

3.1.5. Je cirkulant $C_6(1,2)$ s vrcholovou množinou $V = \{v_i : i = 1,2,\ldots,6\}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [ano, například $v_1, v_3, v_5, v_1, v_2, v_4, v_6, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1$]

3.1.6. Je cirkulant $C_6(1,3)$ s vrcholovou množinou $V = \{v_i : i = 1,2,\ldots,6\}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [není eulerovský]

3.1.7. Je cirkulant $C_8(1,2)$ s vrcholovou množinou $V = \{v_i : i = 1,2,\ldots,8\}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [ano, například $v_1, v_3, v_5, v_7, v_1, v_2, v_4, v_6, v_8, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_1$]

3.1.8.$^\heartsuit$ Pro která n je možno K_n nakreslit jedním uzavřeným tahem? [pro n liché]

3.1.9. Pro která n je možno K_n nakreslit jedním otevřeným a nikoli uzavřeným tahem? [pouze pro $n = 2$]

3.1.10. Pro která m, n je možno $K_{m,n}$ nakreslit jedním uzavřeným tahem? [pro m, n sudé]

3.1.11. Pro která n je možno $K_{m,n}$ nakreslit jedním otevřeným tahem? [pro $m = 2$, n liché nebo $n = 2$, m liché nebo $m = n = 1$]

3.1.12. Dokažte, že eulerovský graf neobsahuje most.
Nechť G je eulerovský graf a hrana $e = xy$ je v tomto grafu mostem. Graf G má tedy všechny vrcholy sudých stupňů. Vytvořme graf $G' = G - e$. G' má přesně dvě komponenty L a L', přičemž $x \in V(L), y \in V(L')$ a $\deg_{G'}(x), \deg_{G'}(y)$ jsou lichá čísla. Tedy komponenta L resp. L' má přesně jeden vrchol lichého stupně, což není možné.

3.1.13. Klasické domino obsahuje kostky s čísly 0 až 6. Z kostek je možno sestavit uzavřený cyklus, kdy kostky na sebe navazují stejnou hodnotou.

a) Vysvětlete, proč tomu tak je, s v využitím teorie grafů?

Sestavíme kompletní graf, jehož vrcholy jsou čísla 0 až 6. Každá kostka odpovídá jedná hraně grafu, dubly by odpovídaly smyčkám, pro jednoduchost je nejprve vyřadíme. Uvedený graf je souvislý, pravidelný (každý vrchol je stupně 6) a jedná se proto o eulerovský tah, který odpovídá cyklu všech kostek kromě dublů. Dubly však můžeme snadno vložit mezi kterékoliv dvě kostky, které navazují příslušným číslem.

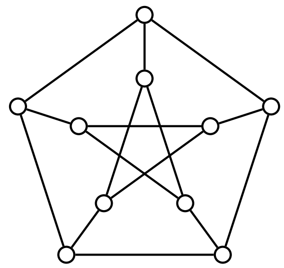
b) Je možno podobně sestavit cyklus pro domino s čísly 0 až 9? [ne]

3.1.14. Ukažte, že pro nesouvislé grafy nemusí platit, že graf s $2t$ vrcholy lichého stupně je možno nakreslit t otevřenými eulerovskými tahy.
Stačí vzít nesouvislý graf $K_1 \cup K_2$, případně $K_2 \cup K_3$. Oba mají dva vrcholy stupně lichého a není možné je nakreslit jedním otevřeným tahem.

3.2 Hamiltonovské grafy

3.2.1. Nechť $V(G)$ grafu G je množina všech dvouprvkových podmnožin množiny $[1,5]$ a nechť hrana $XY \in E(G)$ právě tehdy, když jsou dvouprvkové podmnožiny X, Y disjunktní ($X \cap Y = \emptyset$). Nakreslete graf.

Jedná se o Petersenův graf. Jeho nakreslení je na Obrázku 3.5.



Obrázek 3.5: *Petersenův graf.*

Vrcholy na vnějším cyklu označíme po řadě $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,4\}$, $\{3,5\}$. Vnitřní vrcholy označíme po řadě $\{4,5\}$, $\{2,5\}$, $\{2,3\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$.

3.2.2. Je Petersenův graf hamiltonovský? Své tvrzení dokažte.

Sestavíme-li graf G podle zadání, zjistíme, že má $\binom{5}{2} = 10$ vrcholů. Každý je stupně 3, neboť dvouprvková množina $\{a,b\}$ je disjunktní právě s $\binom{5-2}{2} = 3$ dvouprvkovými množinami. Proto má G dle Principu sudosti celkem $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 = 15$ hran.

Nakreslíme-li si graf G, zjistíme, že se jedná o tzv. *Petersenův graf*. Je známo, že Petersenův graf neobsahuje hamiltonovský cyklus.

Důkazů neexistence hamiltonovského cyklu v Petersenově grafu existuje celá řada. Mezi nejhezčí patří převedení neexistence hamiltonovského cyklu na neexistenci dobrého hranového 3-barvení (obarvení všech hran $P(5,2)$ pomocí tří barev tak, aby žádné dvě incidentní hrany neměly stejnou barvu).

Důkaz povedeme sporem. Pokud by v grafu existoval hamiltonovský cyklus, tak by byl délky 10 a jeho hrany bychom mohli střídavě obarvit barvami 1 a 2. Zbylé hrany tvoří perfektní párování (G je 3-pravidelný) a tak by existovalo dobré hranové 3-obarvení Petersenova grafu.

Ukážeme ale, že Petersenův graf nemá dobré hranové barvení. Při známém nakreslení Petersenova grafu mějme vrcholy vnějšího cyklu $\{1,2\}, \{4,5\}, \{1,3\}, \{2,5\}, \{3,4\}$ a odpovídající vrcholy uvnitř $\{3,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{1,4\}, \{1,5\}$. Hrany vnějšího lichého cyklu jsou obarveny třemi barvami (dvě barvy použité dvakrát). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že hrany jsou postupně barev $1, 2, 1, 2, 3$ (počítáno od hrany z vrcholu $\{1,2\}$). Nyní

- hrana $\{1,2\} - \{3,5\}$ musí být barvy 2
- hrana $\{4,5\} - \{2,3\}$ musí být barvy 3
- hrana $\{1,3\} - \{2,4\}$ musí být barvy 3
- hrana $\{2,5\} - \{1,4\}$ musí být barvy 3
- hrana $\{3,4\} - \{1,5\}$ musí být barvy 1

To si dále vynutí barvy hran

- hrana $\{3,5\} - \{1,4\}$ musí být barvy 1
- hrana $\{3,5\} - \{2,4\}$ musí být barvy 1
- hrana $\{1,5\} - \{2,3\}$ musí být barvy 2
- hrana $\{1,5\} - \{2,4\}$ musí být barvy 2

Poslední hrana $\{1,4\} - \{2,3\}$ nemůže mít

- barvu 1, protože barvu 1 má incidentní hrana $\{3,5\} - \{1,4\}$
- barvu 2, protože barvu 2 má incidentní hrana $\{1,5\} - \{2,3\}$
- barvu 3, protože barvu 3 mají incidentní hrany $\{2,3\} - \{4,5\}$ a $\{1,4\} - \{2,5\}$

Dostali spor (Petersenův graf současně má i nemá dobré hranové 3-barvení), a proto nemůže mít Petersenův graf hamiltonovskou kružnici.

3.3 Příklady k procvičení

3.3.1. Je graf $K_{4,4}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [ano]

3.3.2. Je graf $K_{4,6}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [ano]

3.3.3. Pro které n je graf $K_{2,n}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [n sudé]

3.3.4. Najděte příklad souvislého grafu, který má dva vrcholy lichého stupně a všechny ostatní vrcholy sudého stupně a do kterého

a) stačí přidat jedinou hranu tak, aby byl eulerovský. Jaký je nejmenší takový graf? [$K_5 - e$, P_2]

b) není možné přidat jedinou hranu tak, aby byl eulerovský. Jaký je nejmenší takový graf? [$K_4 - e$, K_2]

3.3.5. Pro každé t najděte příklad souvislého grafu, který

a) je souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit t otevřenými tahy. [K_{2t}]

b) není souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit t otevřenými tahy. [tK_2]

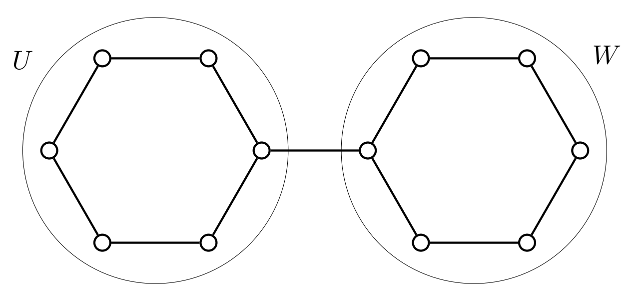
c) je souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit t otevřenými tahy, ale není možné přidáním t hran získat eulerovský graf. [K_{2t}]

d)* je souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit t otevřenými tahy, a přidáním t hran je možné získat eulerovský graf.. [$K_{1,2t}$]

3.3.6. Pro libovolné sudé r a libovolné $n > r$ najděte příklad r-pravidelného eulerovského grafu na n vrcholech.

Hledaným grafem je například cirkulant $G = C_n(1, 2, \ldots, \frac{r}{2})$. Každý vrchol v_i je spojen hranou s vrcholy v_{i+1} a v_{i-1}, v_{i+2} a v_{i-2}, $\ldots$, $v_{i+\frac{r}{2}}$ a $v_{i-\frac{r}{2}}$, a proto je každý vrchol stupně r. Cirkulant G je jistě eulerovský.

3.3.7. Máme dán graf G na Obrázku 3.6.



Obrázek 3.6: *Graf G*.

a) Je graf G eulerovský? [ne]

b) Jak přidat hrany pouze mezi vrcholy v množině U nebo pouze mezi vrcholy v množině W tak, aby vznikl eulerovský graf? Pokud to není možné, dokažte!

Doplnit hrany pouze v rámci množin U a W nestačí, abychom dostali eulerovský graf. Graf G obsahuje dva vrcholy lichého stupně, v každé z množin U a W jeden. Označme je například $u \in U$, $w \in W$. Součet stupňů vrcholů v množině U je lichý. Přidáním libovolné hrany, například do množiny U, se zvětší součet stupňů vrcholů v množině U o 2. Přidáním t hran se zvětší součet stupňů o $2t$ Proto zůstane v U vždy vrchol lichého stupně. Podobně můžeme najít zdůvodnění i pro množinu W.

c) Jestliže dovolíme, aby alespoň jedna přidaná hrana měla jeden koncový vrchol v množině U a druhý v množině W, může přidáním hran vzniknout eulerovský graf? Jestliže ano, kolik nejméně hran je třeba přidat? Pokud to není možné, dokažte!

Stačí přidat dvě hrany. Označme koncové vrcholy mostu na Obrázku 3.6 u, v. Dále označme w libovolný další vrchol, který není sousední s u ani s v. Přidáním hran uw, wv dostaneme eulerovský graf, ve kterém jsou vrcholy u, v a w stupně 4 a zbývající vrcholy jsou stupně 2.

3.3.8. Ukažte, že souvislý graf s $2t$ vrcholy lichého stupně je možno nakreslit t otevřenými eulerovskými tahy.

Do grafu přidáme vrchol s a všechny hrany xs, kde x je nějaký vrchol lichého stupně. Získáme graf G', který je souvislý a všechny vrcholy (včetně s) jsou sudého stupně. Graf je eulerovský a existuje v něm eulerovský tah. Vynecháme-li v tomto tahu všechny výskyty vrcholu s (je jich t), rozpadne se uzavřený tah na t otevřených netriviálních tahů. Žádný z tahů není triviální tah x, neboť to by musel být vrchol x spojen dvěma hranami s vrcholem s.

4 Vzdálenost a metrika v grafu

Pojem vzdálenosti v grafu je popsán ve skriptech [UTG].

4.1 Motivační příklady

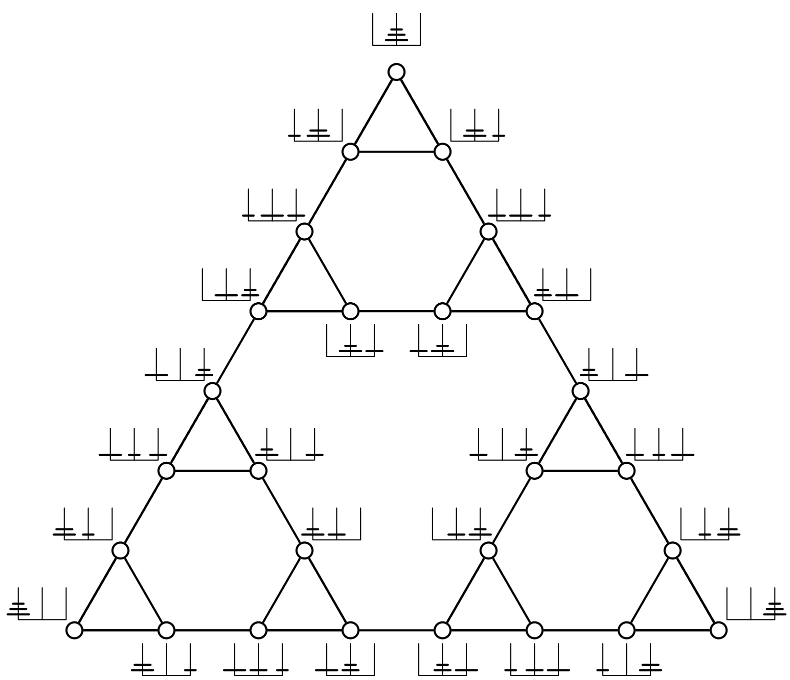
4.1.1.* Hlavolam známý jako „Hanojské věže“[1] má tři kolíky a sadu osmi disků různých velikostí. Na začátku je všech osm disků seřazeno podle velikosti na prvním kůlu. Úkolem je přemístit všechny disky na jiný kůl za dodržení následujících podmínek:

1. vždy se přesunuje pouze jeden disk,
2. nikdy nesmí ležet větší disk na menším.

Namodelujte úlohu užitím grafu a pro tři disky najděte nejkratší možné řešení.
Sestavíme stavový graf $Hanoi_n$. Každé přípustné rozmístění disků bude odpovídat jednomu vrcholu grafu. Stačí uvážit počet rozmístění tří disků na tři kůly. Pořadí disků na každém kůlu je pak určeno jednoznačně. Stavový graf bude mít $V^*(3,3) = 3^3 = 27$ vrcholů.

Pokud máme hanojské věže s jediným diskem, stavový graf je $Hanoi_1 = C_3$. Přidáme-li druhý disk, můžeme jej přidat na kterýkoliv kůl. Pro každou volbu kůlu vezmeme jednu kopii grafu $Hanoi_1$. Hranou spojíme dva vrcholy z různých kopií, jen pokud můžeme přemístit větší disk. To je možné pouze v případě, že malý disk je na jiném kůlu než velký disk. Takových stavů je celkem šest: dva pro každé umístění malého disku. Dostaneme bude stavový graf $Hanoi_2$.

Podobně pro tři a více disků můžeme stavový graf $Hanoi_n$ sestavit tak, že vezmeme tři kopie grafu $Hanoi_{n-1}$ a hranou spojíme vždy ty stavy, kdy máme všechny menší disky na jednom kůlu a přemístíme nový největší disk z jednoho kůlu na druhý. Takových stavů je opět celkem šest: dva pro každé umístění všech menších disků na jednom kůlu.

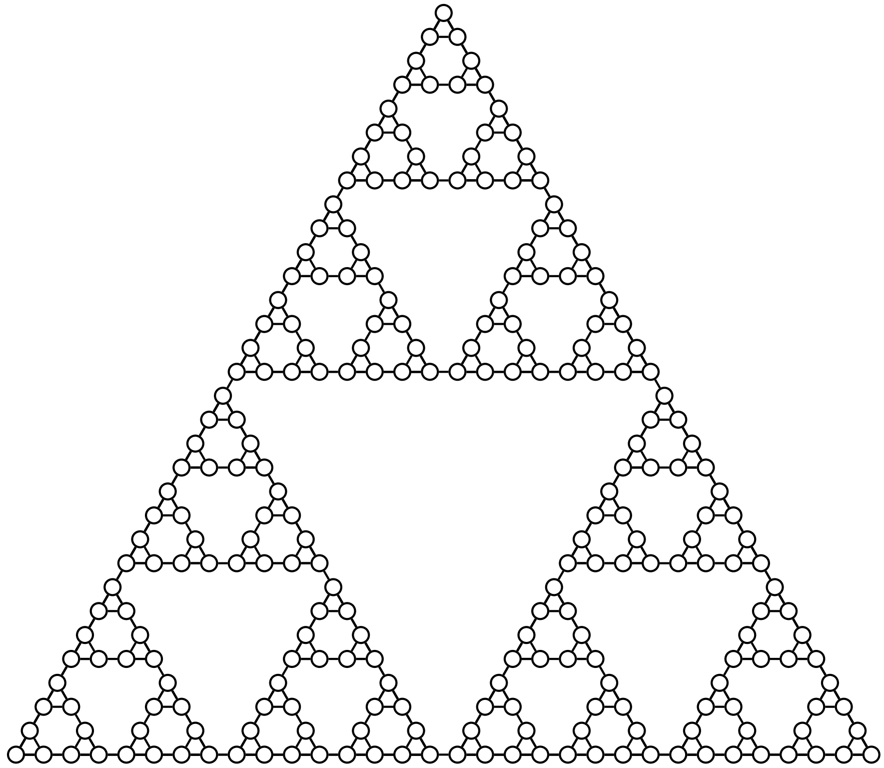


Obrázek 4.1: *Stavový graf pro $n = 3$.*

Nejkratší řešení pak odpovídá nejkratší cestě mezi dvěma vrcholy, které odpovídají stavům, kdy máme všechny disky na jednom kůlu. Jsou to „rohové“ vrcholy v grafu $Hanoi_n$. Pro každý přidaný disk se počet vrcholů na nejkratší cestě mezi „rohovými“ vrcholy zdvojnásobí. Pro jeden disk jsou na nejkratší cestě 2 vrcholy, pro dva disky 4 vrcholy, pro tři disky 8 vrcholů a obecně pro n disků 2^n vrcholů. Délka cesty pak je počet hran na této cestě, což je $2^n - 1$. Pro $n = 3$ má nejkratší řešení $2^3 - 1 = 7$ tahů.

[1] Hanojské věže vymyslel v roce 1883 Francouzský matematik Édouard Lucas.

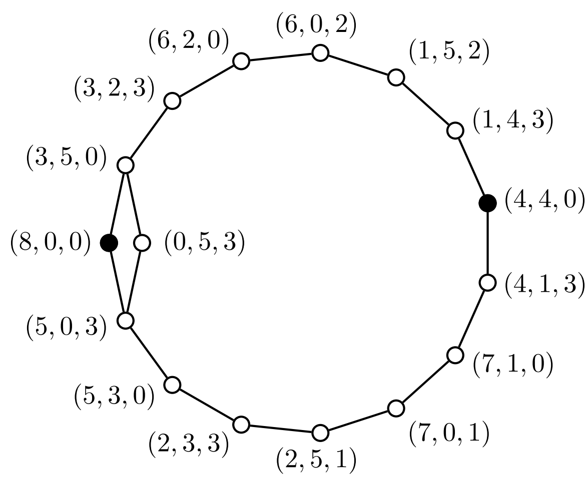
Pro zajímavost je na Obrázku 4.2 stavový graf $Hanoi_5$.



Obrázek 4.2: *Stavový graf pro $n = 5$.*

4.1.2. Máme osmi litrovou nádobu s vínem a dvě prázdné nádoby – pětilitrovou a třílitrovou. Rozdělte osm litrů na čtyři a čtyři litry jen s užitím těchto nádob, bez použití odměrky. Úloha namodelujte grafem a najděte nejkratší řešení a popište všechna přípustná řešení.

Úlohu namodelujeme grafem, kde každý vrchol bude reprezentovat přípustné rozdělení osmi litrů do tří nádob. Hranou spojíme dva vrcholy, pokud je možno z jednoho rozdělení obdržet přelitím druhé rozdělení a naopak. Dostaneme graf jako na obrázku. Orientované hrany, kdy je možné přelití jen jedním směrem, zavádět nebudeme. Rozborem situací na obrázku vidíme, že by se jednalo pouze o orientované hrany, které by vedly „zprava doleva“ a nezkrátí řešení.



Obrázek 4.3: *Stavový graf.*

Ihned vidíme, že nejkratší řešení je na osm tahů. Existují celkem čtyři řešení (pokud nepočítáme možnosti, kdy se některý stav zopakuje). Pokud nepřeléváme nesmyslně komplikovaně, tak existují jen dvě různá řešení.

4.1.3. Máme osmi litrovou nádobu s vínem a dvě prázdné nádoby – pětilitrovou a třílitrovou. Je možno odměřit libovolné (celočíselné) množství vína? Pokud ne, zjistěte jaké. Pokud ano, dokažte.

Podle grafu na Obrázku 4.3 vidíme, že je možno odměřit libovolné celočíselné množství $0, 1, \ldots, 8$.

4.2 Vzdálenost v grafu

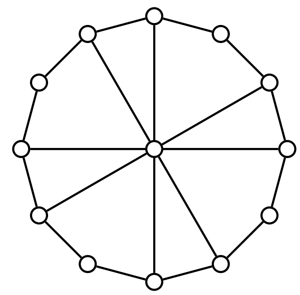
4.2.1.♡ Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu K_4? [1]

4.2.2.♡ Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu K_1? [0]

4.2.3.♡ Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu C_7? [3]

4.2.4.♡ Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu $K_{7,8}$? [2]

4.2.5. Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu G na Obrázku 4.4?



Obrázek 4.4: *Graf G.*

Pokud graf očíslujeme jako ciferník hodin, tak nejvzdálenější vrcholy jsou 1 a 7. Jsou ve vzdálenosti 4. Protože centrální vrchol je ve vzdálenosti nejvýše 2 od každého dalšího vrcholu, tak žádné vrcholy ve vzdálenosti větší než 4 nejsou.

4.2.6. Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu K_n?
Všechny dvojice vrcholů jsou sousední, dva různé vrcholy jsou ve vzdálenosti 1. Protože $\forall u \in V(G)$ platí $\mathrm{dist}(u,u) = 0$, tak pro $n = 1$ je největší vzdálenost dvou vrcholů v K_1 rovna 0.

4.2.7.♡ Jaká je největší možná vzdálenost dvou různých vrcholů v grafu P_n? [$n-1$ (oba koncové vrcholy cesty P_n.]

4.2.8. Jaká je největší možná vzdálenost dvou různých vrcholů v grafu $K_{m,n}$? [1 pro $m = n = 1$, jinak 2]

4.2.9. Jaká je největší možná vzdálenost dvou různých vrcholů v grafu C_n?
Označím si libovolný vrchol v_1. Ostatní vrcholy označím po řadě $v_2, v_3, \ldots, v_n$. Nyní od vrcholu v_1 ve vzdálenosti 1 jsou vrcholy v_2 a v_n, ve vzdálenosti 2 jsou vrcholy v_3 a v_{n-1}, ve vzdálenosti 3 jsou vrcholy v_3 a v_{n-2}, atd. Ve vzdálenosti k jsou vrcholy v_{k+1} a v_{n-k+1}. Protože vzdálenost je délka nejkratší cesty, musí platit, že v_{k+1} je blíže v_1 než v_{n-k+1}, tedy

$$\begin{aligned} k+1 &\le n-k+1 \\ k &\le n-k \\ 2k &\le n \\ k &\le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor . \end{aligned}$$

4.2.10. Najděte příklad grafu na osmi vrcholech, ve kterém je minimální i maximální vzdálenost dvou různých nesousedních vrcholů 2. [$K_{4,4}$ nebo $K_8 - e$]

4.2.11. Najděte graf s co nejmenším počtem hran na osmi vrcholech, ve kterém je minimální i maximální vzdálenost dvou různých nesousedních vrcholů 2.
Příklady grafů jsou $K_{t,8-t}$. Ukážeme, že hvězda $K_{1,7}$ je nejmenší vzhledem k počtu hran.

Pokud má graf alespoň dvě komponenty, je největší možná vzdálenost dvou vrcholů (diametr) ∞. Stačí vzít dva vrcholy z různých komponent, mezi nimi neexistuje cesta a jejich vzdálenost je z definice ∞.

Víme, že strom je minimální souvislý graf na daném počtu vrcholů (Věta 5.10. ve skriptech [UTG]) a proto hledaný graf je stromem. Vynecháním libovolné hrany bychom dostali nesouvislý graf s diametrem ∞. Dále víme, že strom na n vrcholech má $n-1$ hran (Věta 5.4. ve skriptech [UTG]), proto je minimální počet hran grafu diametru 2 na osmi vrcholech rovna sedmi (příkladem je právě $K_{1,7}$).

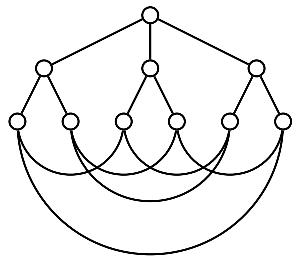
4.2.12. Najděte graf s co největším počtem hran na osmi vrcholech, ve kterém je minimální i maximální vzdálenost dvou různých nesousedních vrcholů 2.

Hledaný graf má mít co nejvíce hran. Nemůže se jednat o kompletní graf K_8, neboť v něm nejsou žádné dva různé nesousední vrcholy. Stačí vzít K_8 bez jedné hrany uv a vzdálenost vrcholů u a v je 2 (nejsou sousední), zatímco vzdálenost libovolných dvou jiných vrcholů je 1.

4.2.13. Najděte graf s co největším počtem vrcholů, ve kterém je maximální vzdálenost dvou různých nesousedních vrcholů 2 a nejvyšší stupeň vrcholu je 3.

Nejprve ukážeme, že hledaný graf G může mít nejvýše 10 vrcholů. Pokud zvolíme libovolný vrchol $v \in V(G)$, tak ve vzdálenosti 1 mohou být nejvýše 3 vrcholy sousední s v. Označme je u_1, u_2, u_3. Každý z nich může mít nejvýše dva sousedy, označme je $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, u_{31}, u_{32}$. To je celkem $1 + 3 + 6 = 10$ vrcholů. Další vrcholy již v G být nemohou, byly by ve větší vzdálenosti než 2 od vrcholu v.

Dále ukážeme, že takový graf, aby největší možná vzdálenost dvou libovolných vrcholů byla 2, existuje. Hledaným grafem je například graf na Obrázku 4.5. Jedná se o překreslený Petersenův graf.



Obrázek 4.5: *3-pravidelný graf s největším stupněm 3 a největší možná vzdáleností dvou vrcholů 2.*

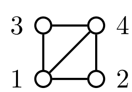
4.2.14. Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu W_n?

Ukážeme, že vzdálenost dvou vrcholů nemůže být větší než 2. Vezměme dva libovolné vrcholy $x, y \in V(W_n)$.

1. Je-li $x = y$, je $\mathrm{dist}(x, y) = 0$
2. Je-li $x \neq y$ a je-li jeden z vrcholů centrální vrchol kola v_0, potom je $\mathrm{dist}(x, y) = 1$, protože centrální vrchol je sousední se všemi.
3. Je-li $x \neq y$ a není-li ani jeden z vrcholů centrálním vrcholem, potom v případě, že x a y jsou sousední je $\mathrm{dist}(x, y) = 1$
4. Jinak je $\mathrm{dist}(x, y) \geq 2$. Současně ale víme, že $\mathrm{dist}(x, y) \leq \mathrm{dist}(x, v_0) + \mathrm{dist}(v_0, y) = 1 + 1 = 2$. Proto je $\mathrm{dist}(x, y) = 2$.

Celkem dostáváme, že pro $n = 3$, kdy na vnějším cyklu kola nenajdeme dva nesousední vrcholy ($W_3 = K_4$), je největší možná vzdálenost dvou vrcholů 1. Jinak je největší možná vzdálenost dvou vrcholů 2.

4.2.15. Vypočítejte metriku (matici udávající vzdálenosti mezi vrcholy) grafu $K_4 - e$ na Obrázku 4.6.



Obrázek 4.6: *Graf K_4 bez jedné hrany.*

Sestavíme nejprve výchozí matici dle matice sousednosti (místo 0 budou ∞ jen na hlavní diagonále zůstanou 0).

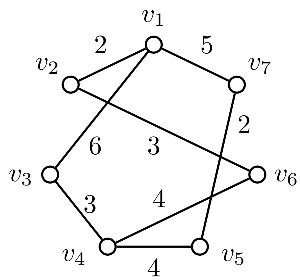
$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \infty & 1 \\ 1 & \infty & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom algoritmem najdeme kratší cesty přes vrcholy 1, 2, 3, a 4. Dostaneme metriku

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.3 Vzdálenost v ohodnocených grafech

4.3.1. Máme dán graf G na Obrázku 4.7. Jaká je největší možná vážená vzdálenost mezi vrcholy v grafu G?



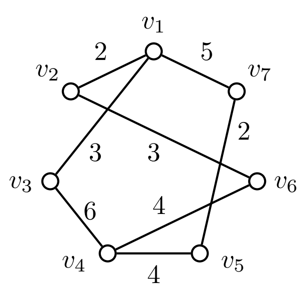
Obrázek 4.7: *Graf G.*

Sestavíme metriku, která popisuje vzdálenosti mezi jednotlivými dvojicemi vrcholů. Dostaneme

$$\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6\\ v_7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 9 & 7 & 5 & 5\\ 2 & 0 & 8 & 7 & 9 & 3 & 7\\ 6 & 8 & 0 & 3 & 7 & 7 & 9\\ 9 & 7 & 3 & 0 & 4 & 4 & 6\\ 7 & 9 & 7 & 4 & 0 & 8 & 2\\ 5 & 3 & 7 & 4 & 8 & 0 & 10\\ 5 & 7 & 9 & 6 & 2 & 10 & 0 \end{pmatrix}\end{array}$$

Největší možná vzdálenost je 10 mezi vrcholy v_6 a v_7.

4.3.2. Máme dán graf G na Obrázku 4.8. Jaká je největší možná vážená vzdálenost mezi vrcholy v grafu G?



Obrázek 4.8: *Graf G.*

Sestavíme metriku, která popisuje vzdálenosti mezi jednotlivými dvojicemi vrcholů. Dostaneme

$$\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6\\ v_7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 9 & 7 & 5 & 5\\ 2 & 0 & 5 & 7 & 9 & 3 & 7\\ 3 & 5 & 0 & 6 & 10 & 8 & 8\\ 9 & 7 & 6 & 0 & 4 & 4 & 6\\ 7 & 9 & 10 & 4 & 0 & 8 & 2\\ 5 & 3 & 8 & 4 & 8 & 0 & 10\\ 5 & 7 & 8 & 6 & 2 & 10 & 0 \end{pmatrix}\end{array}$$

Největší možná vzdálenost je 10 mezi vrcholy v_3 a v_5 a mezi vrcholy v_6 a v_7.

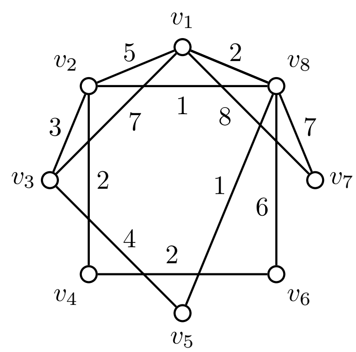
4.3.3. Jaká největší možná vážená vzdálenost může být mezi dvěma vrcholy v cyklu délky 9, který je ohodnocený všemi čísly $1, 2, \ldots, 9$, každým právě na jedné hraně v libovolném pořadí.

Jedno jak budou ohodnocení hranám přiřazena, vždy bude mezi dvěma pevně zvolenými vrcholy jedna cesta kratší a druhá delší, neboť součet $\sum_{i=1}^{9} = 45$ je lichý. Obě možné cesty mezi zvolenými vrcholy dají v součtu 45.

Největší možná vážená vzdálenost je $\lfloor\frac{45}{2}\rfloor = 22$, protože při libovolném rozdělení ohodnocení bude menší z obou možných součtů nejvýše 22. Taková vzdálenost může být realizována. Zvolíme ohodnocení po řadě $9, 6, 5, 2, 8, 7, 4, 3, 1$. Největší možná vzdálenost je $\min\{9+6+5+2, 8+7+4+3+1\} = \min\{22, 23\} = 22$.

4.4 Nejkratší cesta v ohodnoceném grafu – Dijkstrův algoritmus

4.4.1. Máme dán graf jako na Obrázku 4.9.



Obrázek 4.9: *Graf G.*

a) Jaké jsou vzdálenosti všech vrcholů od vrcholu v_1? [$\text{dist}(v_1, v_1) = 0$, $\text{dist}(v_1, v_2) = 3$, $\text{dist}(v_1, v_3) = 6$, $\text{dist}(v_1, v_4) = 5$, $\text{dist}(v_1, v_5) = 3$, $\text{dist}(v_1, v_6) = 7$, $\text{dist}(v_1, v_7) = 8$, $\text{dist}(v_1, v_8) = 2$]

b) V jakém pořadí budou zpracovány vrcholy při běhu Dijkstrova algoritmu s výchozím vrcholem v_1? [$v_1, v_8, v_2, v_5, v_4, v_3, v_6, v_7$ nebo $v_1, v_8, v_5, v_2, v_4, v_3, v_6, v_7$]

c) Jaké jsou vzdálenosti všech vrcholů od vrcholu v_3? [$\text{dist}(v_3, v_1) = 6$, $\text{dist}(v_3, v_2) = 3$, $\text{dist}(v_3, v_3) = 0$, $\text{dist}(v_3, v_4) = 5$, $\text{dist}(v_3, v_5) = 4$, $\text{dist}(v_3, v_6) = 7$, $\text{dist}(v_3, v_7) = 11$, $\text{dist}(v_3, v_8) = 4$]

d) V jakém pořadí budou zpracovány vrcholy při běhu Dijkstrova algoritmu s výchozím vrcholem v_3? [$v_3, v_2, v_5, v_8, v_4, v_1, v_6, v_7$ nebo $v_3, v_2, v_8, v_5, v_4, v_1, v_6, v_7$]

e) Jaké jsou vzdálenosti všech vrcholů od vrcholu v_5? [$\text{dist}(v_5, v_1) = 3$, $\text{dist}(v_5, v_2) = 2$, $\text{dist}(v_5, v_3) = 4$, $\text{dist}(v_5, v_4) = 4$, $\text{dist}(v_5, v_5) = 0$, $\text{dist}(v_5, v_6) = 6$, $\text{dist}(v_5, v_7) = 8$, $\text{dist}(v_5, v_8) = 1$]

f) V jakém pořadí budou objeveny vrcholy při běhu Dijkstrova algoritmu s výchozím vrcholem v_5? [$v_5, v_8, v_2, v_1, v_3, v_4, v_6, v_7$ nebo $v_5, v_8, v_2, v_1, v_4, v_3, v_6, v_7$]

g) Které dva vrcholy jsou nejvzdálenější? Jaká je jejich vzdálenost? [v_6 a v_7, $\text{dist}(v_6, v_7) = 12$]

h) Ze kterého vrcholu je maximální vzdálenost do všech ostatních vrcholů nejmenší?

4.4.2. Ve kterém místě selže Dijkstrův algoritmus, jestliže připustíme i záporná ohodnocení hran?
Dijkstrův algoritmus se spoléhá na fakt, že vzdálenost do zpracovaného vrcholu se už nemůže zmenšit. V grafu, ve kterém připustíme záporné váhy, by bylo možno vzdálenost zmenšit i přes vrcholy s větší vzdáleností.

4.5 Příklady k procvičení

Hyperkrychlí řádu n budeme rozumět takový graf $G(V, E)$ na 2^n vrcholech, jehož vrcholovou množinu tvoří všechny binární vektory délky n

$$V = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

a hrana je mezi každými dvěma vrcholy, jejichž vektory se liší v jediné souřadnici

$$E = \{(a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_n) : (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in V \wedge \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| = 1\}.$$

Hyperkrychle řádu n se značí Q_n.

4.5.1. Mějme graf Q_3 (hyperkrychle řádu 3). Kolik nejméně hran musíme přidat, aby největší možná vzdálenost mezi vrcholy grafu byla 2?
Stačí přidat dvě hrany, například na jednu stěnu krychle. Potom je nejmenší možná vzdálenost mezi vrcholy 2. Přidat jednu hranu nestačí, neboť libovolně kde ji přidáme, vždy najdeme dva vrcholy ve vzdálenosti 3

- přidáme-li stěnovou úhlopříčku $(0,0,0)$ a $(1,1,0)$, budou vrcholy $(0,1,1)$ a $(1,0,1)$ ve vzdálenosti 3
- přidáme-li tělesovou úhlopříčku $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$, budou vrcholy $(1,1,0)$ a $(0,0,1)$ ve vzdálenosti 3

4.5.2.$^\heartsuit$ Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu Q_n? Dokažte [n]

4.5.3.* Jak převést úlohu hledání nejkratší cesty i pro grafy s ohodnocenými vrcholy?
Nafouknutím grafu: místo každého vrcholu stupně d ohodnoceného hodnotou w dáme $K_{\deg(v)} = K_d$. Každá hrana bude ohodnocena w. Každá z hran, která byla incidentní s vrcholem v bude nyní incidentní s jiným vrcholem K_d.

4.5.4. Kolik nejvíce vrcholů může mít graf, který má největší možnou vzdálenost mezi dvěma vrcholy rovnou 2?
Graf $K_{m,n}$ má největší možnou vzdálenost dvou vrcholů rovnou 2 (každé dva vrcholy ze stejné partity). Proto není žádné omezení na počet vrcholů, graf může mít libovolný počet vrcholů větší než 2.

4.5.5. Kolik nejvíce vrcholů může mít 3-pravidelný graf, který má největší možnou vzdálenost mezi dvěma vrcholy rovnou 2? Nakreslete příklad takového grafu.
Vezmeme-li libovolný vrchol v, má právě tři sousedy a každý z nich nejvýše dva další sousedy. To je celkem 10 vrcholů, Další vrcholy v grafu být nemohou, neboť by byly od vrcholu v ve větší vzdálenosti než 2. Takový graf existuje, jedná se právě o Petersenův graf.

4.5.6. V jednom okrese je 15 velkých měst a každé město je spojeno silnicí s alespoň sedmi jinými.

a) Dokažte, že z libovolného města do libovolného jiného se dá dostat buď přímou cestou nebo přes jedno jiné město.

   Postupujeme nepřímo. Kdyby existovalo město A spojené se alespoň sedmi městy a jiné město B spojené s jinými sedmi městy a mezi A a B by nebyla žádná cesta, tak by v okrese muselo existovat alespoň $1+1+7+7=16$, což není možné.

b) Jak by se úloha změnila, kdyby každé město mělo být spojeno silnicí s právě sedmi jinými?

   Úloha by neměla řešení podle principu sudosti, neboť odpovídající graf by měl 15 vrcholů stupně 7.

4.5.7. Mějme graf G, ve kterém je každý vrchol stupně 4. a) Vypočítejte, jaký je nejmenší možný počet vrcholů v grafu G, které jsou od nějakého pevně zvoleného vrcholu ve vzdálenosti 3. Najděte příklad takového grafu. b) Vypočítejte, jaký je největší možný počet vrcholů v grafu G, které jsou od nějakého pevně zvoleného vrcholu ve vzdálenosti 3. Najděte příklad takového grafu.
a) Nejmenší počet vrcholů ve vzdálenosti 3 je 0, neboť například graf K_5 má všechny vrcholy stupně 4 a ve vzdálenosti 3 není žádný vrchl, neboť všechny dvojice různých vrcholů jsou ve vzdálenosti 1.

b) Největší počet vrcholů ve vzdálenosti 1 od vrcholu stupně 4 je 4. Každý z těchto 4 vrcholů může mít až tři další sousedy, což dává $4 \cdot 3 = 12$ vrcholů ve vzdálenosti 2. Každý z těchto 12 vrcholů může mít až tři další sousedy, což dává $12 \cdot 3 = 36$ vrcholů ve vzdálenosti 3.

Příkladem takového grafu je dvojice kvaternárních stromů propojených na čtvrté úrovni pomocí $36 \cdot 3 = 108$ hran.

5 Stromy

Stromy a jejich základní vlastnosti jsou popsány ve skriptech [UTG].

5.1 Motivační příklady

5.1.1. Můžeme algoritmus hledání centra použít i pro jiné grafy než stromy? Najdete alespoň jeden takový graf? Vysvětlete!

Použijeme-li algoritmus pro grafy, které obsahují cyklus, algoritmus nikdy neskončí. Protože v průběhu algoritmu se odstraňují pouze listy, zůstane (po skončení kroku čáslo 2 algoritmu ze skript) cyklus a nebude možno najít žádný list.

Bude-li naopak graf nesouvislý, tak zůstanou (po skončení druhého kroku) izolované vrcholy a grafy K_2. Centrum lesa nebude určeno jednoznačně, pouze centra jednotlivých komponent (stromů).

5.2 Základní vlastnosti stromů

5.2.1. Kolik neisomorfních lesů existuje na čtyřech vrcholech?

Lesy existují:

- $4K_1$
- $K_2 \cup 2K_1$
- $2K_2$, $P_2 \cup K_1$
- $K_{1,3}$, P_3

5.2.2. Kolik neisomorfních stromů existuje na pěti vrcholech?

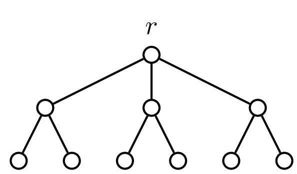
Stromy existují tři:

- P_4
- P_3 s jedním vrcholem připojeným k vrcholu stupně 2
- $K_{1,4}$

Celkem 3 stromy.

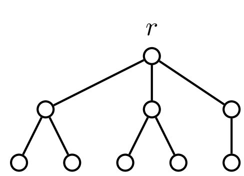
5.2.3.♡ Najděte centra následujících stromů.

a) Strom T na Obrázku 5.1.



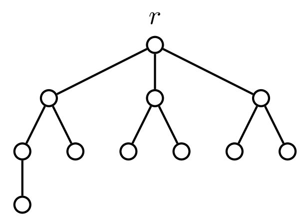
Obrázek 5.1: *Strom T.*

b) Strom T na Obrázku 5.2.



Obrázek 5.2: *Strom T.*

c) Strom T na Obrázku 5.3.



Obrázek 5.3: *Strom T.*

5.2.4. Najděte takový graf se dvěma kružnicemi, že vynecháním jediné hrany vznikne strom.
Takový strom neexistuje.

Nejprve ukážeme, že pokud strom obsahuje dvě kružnice, tyto dvě kružnice nesdílí žádnou hranu. Pokud by kružnice C_1 a C_2 sdílely hranu xy, tak vynecháním hrany xy z cyklu C_1 zůstane v grafu cesta mezi vrcholy x a y a podobně z cyklu C_2 zůstane v grafu také (druhá) cesta mezi x a y. Spojením těchto dvou cest dostaneme uzavřený sled, ze kterého je možno vybrat třetí cyklus C_3, což by byl spor, neboť graf obsahuje pouze cykly dva.

Nyní víme, že obě kružnice v grafu nesdílí žádnou hranu. Vynecháním libovolné hrany e_1 z C_1 zůstane graf souvislý (vynechaná hrana e_1 neovlivní souvislost grafu) a bude navíc obsahovat jako podgraf druhý cyklus C_2. Graf nebude acyklický a proto takový graf, který splňuje podmínky zadání, neexistuje.

Podobně vynecháním libovolné hrany e_2 z C_2 zůstane graf souvislý (vynechaná hrana e_2 neovlivní souvislost grafu) a graf bude bez cyklů, tj. strom. □

Jiný důkaz:
Podle Důsledku 5.8. ve skriptech [UTG], vznikne přidáním hrany právě jeden cyklus. Existence grafu se zadání by byla ve sporu s tímto důsledkem. □

5.2.5. Kolik hran je třeba vynechat z kompletního grafu K_n, aby zůstala kostra?
Víme, že kompletní graf K_n má $\binom{n}{2}$ hran a kostra je stromem, který má $n-1$ hran. Z celkového počtu $\binom{n}{2}$ hran má zůstat $n-1$. Proto je třeba vynechat právě

$$\binom{n}{2} - (n-1) = \binom{n}{2} - (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1) - (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = \binom{n-1}{2}$$

hran.

5.2.6. Máme dán strom se 17 vrcholy.

a) Kolik odebereme vrcholů (dle algoritmu z přednášky), než najdeme centrum?

Centrum je tvořeno buď jedním vrcholem, nebo hranou mezi dvojicí vrcholů. Zbylé vrcholy jsou v průběhu algoritmu odstraněny. Celkem musí být odstraněno 16 nebo 15 vrcholů.

Stromem, ze kterého bude odstraněno 16 vrcholů je například P_{16}. Stromem, ze kterého bude odstraněno 15 vrcholů je například cesta na 16 vrcholech s jedním listem připojeným k vrcholu stupně 2.

b) Kolik nejméně nastane takových kroků, kdy odstraňujeme listy?

Pro strom $K_{1,16}$ stačí jediný krok „holení“, než dostaneme centrum. Podobně pro dvojhvězdu $S(t, 15-t)$, kde $t \in [1, 14]$.

c) Kolik nejvíce nastane takových kroků, kdy odstraňujeme listy?

Každý netriviální strom obsahuje alespoň dva vrcholy stupně 1. Cesta je takový strom, který obsahuje právě dva vrcholy stupně 1. Pro strom P_{16} je třeba odstraňovat $\lfloor \frac{17}{2} \rfloor = 8$ krát oba listy.

5.2.7.♡ Máme dán strom se 4 vrcholy. Kolik odebereme vrcholů (dle algoritmu z přednášky), než najdeme centrum? [2 nebo 3]

5.2.8.♡ Strom má 56 hran. Kolik může mít vrcholů?
Podle Věty 5.4. ve skriptech [UTG] je počet hran stromu o jednu menší než počet hran. Proto je jednoznačně určeno, že strom má 57 vrcholů.

5.2.9. Acyklický graf má 70 vrcholů a 60 hran. Kolik má komponent?
V acyklickém grafu je každá komponenta stromem. Strom má o jednu hranu méně než vrcholů. Protože je o 10 hran méně než vrcholů, má les 10 komponent.

5.2.10. Acyklický graf má 60 vrcholů a 70 hran. Kolik má komponent?
V acyklickém grafu je každá komponenta stromem. Strom má o jednu hranu méně než vrcholů. Protože je hran více než vrcholů, takový acyklický graf nemůže existovat.

5.2.11.♡ Najděte graf se dvěma kružnicemi, ze kterého vynecháním dvou hran vznikne strom. [lehké]

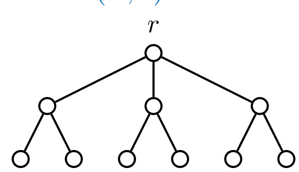
5.2.12. Najděte graf se dvěma kružnicemi, ze kterého vynecháním tří hran vznikne strom. [neexistuje]

5.2.13. Najděte graf se třemi kružnicemi, ze kterého vynecháním tří hran vznikne strom. [existuje]

5.2.14. Najděte graf se třemi kružnicemi, ze kterého vynecháním dvou hran vznikne strom. [existuje]

5.3 Kořenové a pěstované stromy

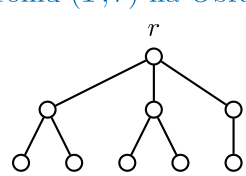
5.3.1. Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, r) na Obrázku 5.4.



Obrázek 5.4: *Kořenový strom* (T, r).

[00010110010110010111]

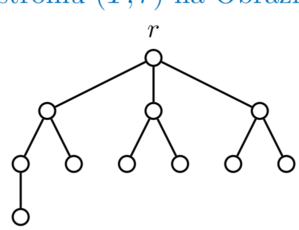
5.3.2. Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, r) na Obrázku 5.5.



Obrázek 5.5: *Kořenový strom* (T, r).

[000101100101100111]

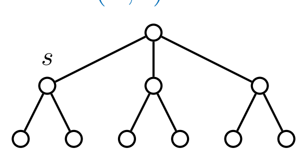
5.3.3. Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, r) na Obrázku 5.6.



Obrázek 5.6: *Kořenový strom* (T, r).

[0000110110010110010111]

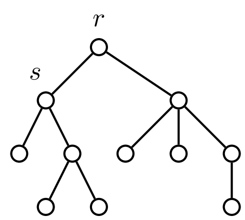
5.3.4. Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, s) na Obrázku 5.7.



Obrázek 5.7: *Kořenový strom* (T, s).

[00101000101100101111]

5.3.5. Máme dán strom T na Obrázku 5.8.



Obrázek 5.8: *Strom* T*, vyznačené vrcholy* r*,* s*.*

a) Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, r). [0001001011100101001111]

b) Najděte a zapište minimální kód kořenového stromu (T, r). [0000101101100011010111]

c) Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, s). [0010010110001010011111]

d) Najděte a zapište minimální kód kořenového stromu (T, s). [0000011010111001011011]

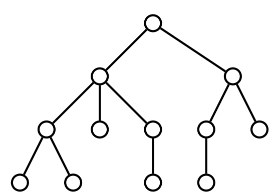
5.3.6. Nakreslete pěstovaný kořenový strom daný následujícím kódem.

a) 000000000111111111 [strom isomorfní s P_8]

b) 00010110010110010111 [viz Obrázek 5.4]

c) 0000101101001110001101111

Obrázek pěstovaného stromu je na Obrázku 5.9.



Obrázek 5.9: *Pěstovaný kořenový strom daný kódem* 0000101101001110001101111.

d) 0000101101001110001101111 [toto není korektní kód]

e) 0000101101100111000110111 [toto není korektní kód]

5.3.7. Je kód pěstovaného kořenového stromu daného následujícím kódem minimální?

a) 000000000111111111. [ano]

b) 00010110010110010111 [ano]

c) 00011001011001001011 1

Kód má více nul než jedniček, nejedná se o platný kód.

d) 00010110011001010111

Kód není minimální, protože kódy podstromů kořene 0011, 001011, 00101011 by musely být v jiném pořadí.

e) 0000110110110001010111

Kóde není platný, protože již po 12 bitech obsahuj *stejně* jedniček jako nul. Nejedná se o platný kód.

f) 00001011010011100011011 1

Jedná se o kód stromu, ale ne o minimální kód. Desátý a jedenáctý symbol „10“ by musely být prohozeny na „01“.

5.4 Isomorfismus stromů

5.4.1. Kolik existuje neisomorfních lesů na pěti vrcholech?

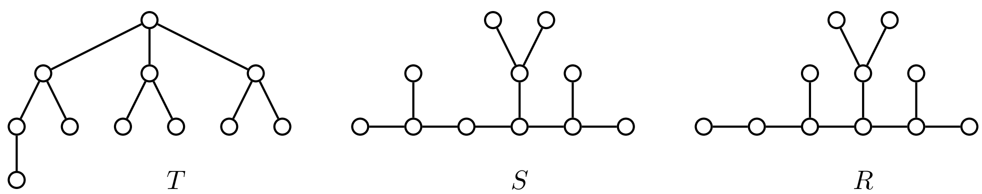
Systematicky projdeme všechny možné lesy na pěti vrcholech. Jednotlivé možnosti rozdělíme podle počtu hran

- bez hran existuje jediný les: $5K_1$
- s 1 hranou existuje jediný les $K_2 \cup 3K_1$
- se 2 hranami existují dva lesy $K_2 \cup K_2 \cup K_1$, $P_2 \cup 2K_2$
- se 3 hranami existují tři lesy $K_{1,3} \cup K_1$, $P_3 \cup K_1$, $P_2 \cup K_2$
- se 4 hranami existují tři stromy (a současně lesy) cesta P_4, cesta P_3 s jedním vrcholem připojeným k nelistovému vrcholu (dvojhvězda $DS(2,1)$) a hvězda $K_{1,4}$.

Existuje celkem 10 lesů.

5.4.2. Které kořenové stromy mají jednoznačně určený kód i když nejsou pěstované? [takové, kde všechny vrcholy ve vzdálenosti d od kořene mají stejný stupeň]

5.4.3. Rozhodněte, které z následujících stromů na Obrázku 5.10 jsou isomorfní.

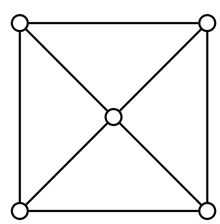


Obrázek 5.10: *Stromy T, S a R.*

[isomorfní jsou T a R]

5.5 Kostry grafů

5.5.1. Kolik koster má následující graf W_4? Předpokládejme, že rozlišujeme vrcholy.



Obrázek 5.11: *Graf W_4.*

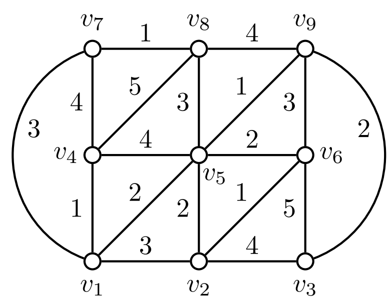
Protože W_4 má 8 hran a kostra na pěti vrcholech má 4 hrany, musíme odstranit čtyři hrany a rozbít každý z $4C_3 + 4C_4 + C_4 + 4C_5$ cyklů. Máme několik možností:

- odstranit jednu hranu „vnějšího“ cyklu C_4 ($\binom{4}{1}$ mopžnosti) a tři hrany vnitřní ($\binom{4}{3}$ možností), celkem $4 \cdot 4 = 16$ možností
- odstranit dvě protilehlé hrany „vnějšího“ cyklu C_4 (2 možnosti) a dvě hrany vnitřní ($2 \cdot 2$ možnosti), celkem $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ možností
- odstranit dvě sousední hrany „vnějšího“ cyklu C_4 (4 možnosti) a dvě hrany vnitřní tak, aby nebyl izolovaný vrchol ($\binom{3}{1}$ možnosti), celkem $4 \cdot 3 = 12$ možností

- odstranit tři hrany „vnějšího“ cyklu C_4 $(\binom{4}{3})$ a jednu hranu vnitřní tak, aby se rozbil cyklus (2 možnosti), celkem $4 \cdot 2 = 8$ možností
- odstranit čtyři hrany „vnějšího“ cyklu, zůstane $K_{1,4}$ (1 možnost)

Celkem máme
$$16 + 8 + 12 + 8 + 1 = 45 \text{ možností.}$$

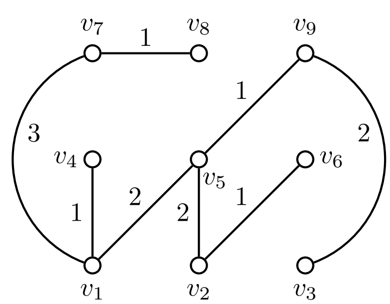
5.5.2. Máme dán graf G na Obrázku 5.12.



Obrázek 5.12: *Graf G.*

a) Najděte minimální kostru grafu G pomocí Kruskalova (hladového) algoritmu. Jaká je váha minimální kostry?

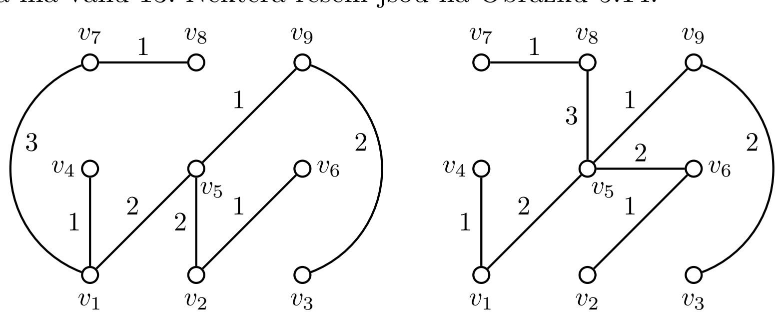
Nejprve seřadíme hrany podle váhy do (neklesající) posloupnosti. Dostaneme $\underbrace{v_1v_4, v_2v_6, v_5v_9, v_7v_8}_{1}$, $\underbrace{v_1v_5, v_2v_5, v_3v_9, v_5v_6}_{2}$, $\underbrace{v_1v_2, v_1v_7, v_5v_8, v_6v_9}_{3}$, $\underbrace{v_2v_3, v_4v_5, v_4v_7, v_8v_9}_{4}$, $\underbrace{v_3v_6, v_4v_8}_{5}$. Budeme postupně vybírat hrany tak, aby nevznikl cyklus. Minimální kostra má váhu 13 a je na Obrázku 5.13.



Obrázek 5.13: *Graf G.*

b) Najděte minimální kostru grafu G pomocí Jarníkova (Primova) algoritmu. Výchozí vrchol je v_1. Jaká je váha minimální kostry?

Ze seznamu hran vybíráme tu, která má mejmenší váhu a přidáním ke stromu nevznikne cyklus. Minimální kostra má váhu 13. Některá řešení jsou na Obrázku 5.14.



Obrázek 5.14: *Graf G.*

c) Najděte minimální kostru grafu G pomocí Borůvkova algoritmu. Jaká je váha minimální kostry?

Borůvkův algoritmus nemůžeme použít. Váhy hran by musely být různé.

5.5.3. Jaké vlastnosti musí mít ohodnocení grafu, aby všechny tři algoritmy (Borůvkův, Jarníkův/Primův i Kruskalův (hladový) našly vždy stejnou kostru?
Aby byklo možno použít Borůvkův algoritmus, nesmí žádné dvě hrany mít stejné ohodnocení, tj. ohodnocení musí být injekcí do oboru hodnot. V takovém případě bude minimální kostra určena jednoznačně, neboť nebude existovat jiná kostra s minimálním ohodnocením. Každá hrana kostry by mohla zaměněna pouze za hranu s vyšším ohodnocením.

5.5.4. Mějme dán kompletní graf K_n, jehož množina vrcholů je $V = [1, n]$. Každou hranu uv ohodnotíme součtem $u + v$. Jak vypadá minimální kostra takto ohodnoceného kompletního grafu?
Postupujeme-li při hledání kostry Jarníkovým algoritmem z vrcholu 1, tak v každém kroku bude přidána hrana do vrcholu x, která vychází z vrcholu 1. Jakákoliv jiná hrana yx by měla vyšší ohodnocení $y+x$ než hrana $1x$ s ohodnocením $1 + x$.

5.5.5. Mějme dán kompletní graf K_n, jehož množina vrcholů je $V = [1, n]$. Každou hranu uv ohodnotíme součtem $2u + 5v$, kde $u < v$. Jak vypadá minimální kostra takto ohodnoceného kompletního grafu?
Postupujeme-li při hledání kostry Jarníkovým algoritmem z vrcholu 1, tak v každém kroku bude přidána hrana do vrcholu x, která vychází z vrcholu 1. Jakákoliv jiná hrana yx by měla vyšší ohodnocení $2y + 5x$, resp. $5u + 2v$, než hrana $1x$ s ohodnocením $2 + 5x$, resp. $5 + 2y$.

5.6 Příklady k procvičení

5.6.1.$^\heartsuit$ Kolik různých koster má cyklus C_n? Předpokládejme, že rozlišujeme vrcholy.
Stačí odstranit libovolnou hranu, vždy zůstane cesta P_{n-1}. Tato cesta je kostrou, protože je souvislá a má $n - 1$ hran. Rozlišujeme-li, kterou hranu odstraníme, dostaneme n různých koster.

5.6.2.$^\heartsuit$ Kolik různých neisomorfních koster má cyklus C_n? Předpokládejme, že nerozlišujeme vrcholy.
Stačí odstranit libovolnou hranu, vždy zůstane cesta P_{n-1}.

5.6.3. Máme graf K_4.

a) Kolik různých neisomorfních koster má graf K_4?

Hledáme vlastně počet neisomorfních stromů na 4 vrcholech. Jsou dva: cesta P_3 a hvězda $K_{1,3}$.

b) Kolik různých koster má graf K_4?

Protože jsou dva neisomorfní stromy na 4 vrcholech: cesta P_3 a hvězda $K_{1,3}$, máme celkem

$$\frac{4!}{2} + 4 \cdot 1 = 16$$

koster. Dvanáct jich je isomorfních s cestou P_3 a čtyři s hvězdou $K_{1,3}$.

5.6.4. Máme graf K_5.

a) Kolik různých koster má graf K_5? [125]

b) Kolik různých neisomorfních koster má graf K_5? [3]

5.6.5. Máme graf K_6.

a) Kolik různých koster má graf K_6? [1296]

b) Kolik různých neisomorfních koster má graf K_6? [6]

5.6.6. Kolik hran je třeba vynechat z kompletního bipartitního grafu $K_{m,n}$, aby zůstala kostra?
Z celkového počtu $m \cdot n$ hran má zůstat $m + n - 1$. Proto je třeba vynechat právě

$$mn - (m + n - 1) = mn - m - n + 1 = m(n - 1) - (n - 1) = (m - 1)(n - 1)$$

hran.

5.6.7. Kolik nejméně vrcholů musí mít graf, který má dvě hranově disjunktní kostry? Najdete takový graf?
Musí platit, že v kompletním grafu je alespoň $2(n - 1)$ hran. Upravíme

$$\begin{aligned} \binom{n}{2} &\geq 2(n-1) \\ \frac{1}{2}n(n-1) &\geq 2(n-1) \\ n &\geq 4. \end{aligned}$$

Graf K_4 vskutku obsahuje dvě hranově disjunktní kostry: cesta P_3 a její doplněk (také cesta P_3).

5.6.8. Najděte příklad souvislého grafu, který má 1001 koster.
Protože $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, stačí vzít tři cykly C_7, C_{11} a C_{13} a spojit je v některém vrcholu.

5.6.9. Zavedeme pojem inverzního kódu. Máme strom T a nějaký jeho kód C. Inverzní kód C' dostaneme tak, že zaměníme 0 a 1 a napíšeme kód v opačném pořadí. Najděte takový netriviální strom T, který má

a) stejný kód i inverzní kód, [cesta s kořenem v listu]

b) různý kód a inverzní kód, přičemž strom T' příslušný inverznímu kódu je isomorfní se stromem T,

c) různý kód a inverzní kód, přičemž strom T' příslušný inverznímu kódu není isomorfní se stromem T,

d) inverzní kód stejný jako minimální kód. [cesta s kořenem v listu]

5.6.10. Máme strom T a jeho kód C. Cestou ve strom T budeme rozumímět podgraf, který je isomorfní s cestou. Co můžeme říci o nejdelší cestě ve stromu T, je-li v kódu C pět po sobě jdoucích nul?
Z kostrukce stromu vyplývá, že T obsahuje cestu délky alespoň 4. Toto tvrzení nejde zlepšit, například v $T = P_4$ s kořenem v listu je pouze cesta délky 4.

5.6.11. Máme strom T a jeho *minimální* kód C. Cestou ve strom T budeme rozumímět podgraf, který je isomorfní s cestou. Co můžeme říci o nejdelší cestě ve stromu T, je-li v kódu C pět po sobě jdoucích nul?
Z kostrukce stromu vyplývá, že T obsahuje cestu délky alespoň 4. Toto tvrzení nejde zlepšit, například v $T = P_4$ s kořenem v listu je pouze cesta délky 4.

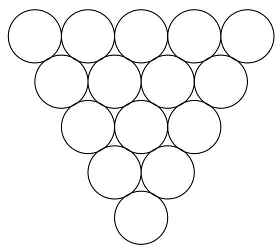
6 Barevnost a kreslení grafů

Pojmy barevnosti grafu a rovinného zakreslení grafu jsou popsány ve skriptech [UTG].

6.1 Motivační příklady

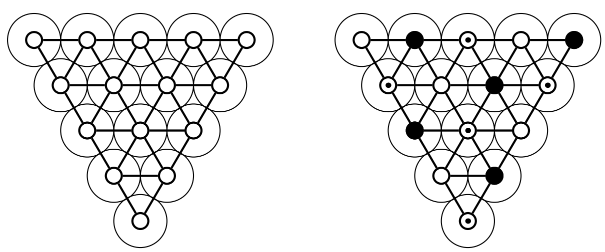
6.1.1. Skladovací problém: Ve skladu potravin máme různé druhy zboží. Podle hygienických norem se nesmí některé druhy potravin skladovat spolu v jedné místnosti. Naším úkolem je zjistit, kolik nejméně místností je potřeba ve skladu pronajmout, aby bylo zboží uloženo podle předpisů. Jak namodelujete skladovací problém pomocí teorie grafů.
Vrcholy budou jednotlivé druhy zboží a hranou spojíme ty dva druhy zboží, které nemohou být skladovány spolu. Hledáme minimální počet barev pro dobré vrcholové barvení grafu.

6.1.2. Kolik nejméně barev je potřeba na obarvení 15 biliárových koulí v trojúhelníkovém postavení tak, aby žádné dvě dotýkající se koule nebyly obarveny stejnou barvou?



Obrázek 6.1: *Biliárové koule v trojúhelníkovém postavení.*

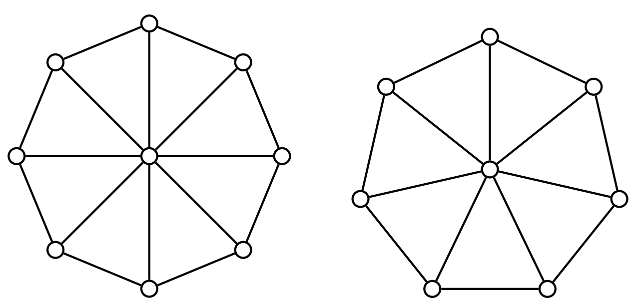
Sestavíme graf, kde vrcholy odpovídají biliárovým koulím a dva vrcholy jsou spojeny hranou, pokud se odpovídající biliárové koule dotýkají. Dostaneme graf jako na Obrázku 6.2. Potřebujeme alespoň tři barvy, neboť v grafu najdeme podgraf K_3 (najdeme tři koule, které se navzájem dotýkají). Naproti tomu tři barvy stačí, graf (koule) můžeme obarvit jako na Obrázku 6.2.



Obrázek 6.2: *Biliárové koule obarvené třemi barvami.*

6.2 Vrcholové barvení grafů

6.2.1. Jaké je chromatické číslo (barevnost) následujících grafů?



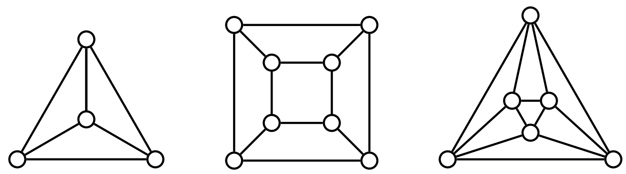
Obrázek 6.3: *Grafy W_8 a W_7.*

a) Graf W_8, viz Obrázek 6.3?

Chromatické číslo grafu W_8 není 2, protože není bipartitní (obsahuje podgraf K_3). Na dobré obarvení stačí 3 barvy: vnější cyklus je bipartitní a vnitřní vrchol obarvíme barvou 3.

b) Graf W_7, viz Obrázek 6.3?

Chromatické číslo grafu W_7 není 2, protože není bipartitní (obsahuje liché cykly). Ukážeme, že chromatické číslo není 3. Všimneme si, že „prostřední“ vrchol musí být jiné barvy než všechny ostatní vrcholy, protože je se všemi sousední. Zbylé vrcholy tvoří lichý cyklus a na jeho dobré obarvení potřebujeme další tři barvy. Proto je $\chi(W_7) = 4$.



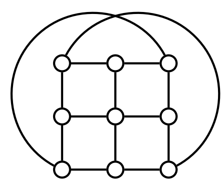
Obrázek 6.4: *Rovinná nakreslení pravidelného čtyřstěnu, šestistěnu a osmistěnu.*

c) Graf pravidelného čtyřstěnu, viz Obrázek 6.4. [4]

d) Graf pravidelného šestistěnu, viz Obrázek 6.4. [2]

e) Graf pravidelného osmistěnu, viz Obrázek 6.4. [3]

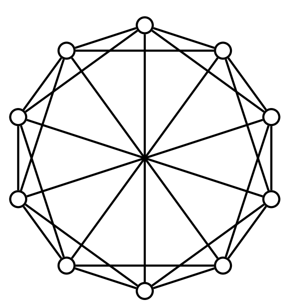
6.2.2. Jaké je chromatické číslo (barevnost) grafu G na Obrázku 6.5?



Obrázek 6.5: *Graf G.*

Graf není bipartitní, neboť obsahuje lichý cyklus. Proto je potřeba alespoň 3 barvy. Snadno ukážeme, že tři barvy stačí, neboť obarvíme vrcholy (po řádcích) střídavě barvami 1 a 2, přičemž oba horní nebo oba dolní rohové vrcholy obarvíme barvou 3. Dostaneme dobré vrcholové barvení grafu G.

6.2.3. Jaké je chromatické číslo (barevnost) cirkulantu $C_{10}(1, 2, 5)$ na Obrázku 6.6?



Obrázek 6.6: *Cirkulant $C_{10}(1, 2, 5)$.*

Graf není bipartitní, neboť obsahuje lichý cyklus. Protože největší nezávislá množina obsahuje 3 vrcholy (viz cvičení 13 na straně 95), nebudou stačit tři barvy, ale bude třeba alespoň čtyři barvy. Snadno ukážeme, že 4 barvy stačí, neboť obarvíme vrcholy (po řadě) barvami 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 4, Dostaneme dobré vrcholové barvení grafu G.

6.2.4. Kolik nejméně hran musíme vynechat z grafu W_8 (viz Obrázek 6.3), aby chromatické číslo výsledného grafu bylo 2?

Graf W_8 obsahuje 8 trojúhelníků K_3. Aby chromatické číslo bylo 2, musíme vynechat tolik hran, abychom „rozbili“ všechny trojúhelníky. Odebráním jedné „obvodové“ hrany rozbijeme nejvýše jeden trojúhelník. Odebráním jedné „špice“ rozbijeme nejvýše dva trojúhelníky. Vskutku stačí odebrat čtyři hrany incidentní s každým druhým obvodovým vrcholem a dostaneme (bipartitní) graf, jehož chromatické číslo je 2.

6.2.5. Kolika nejvýše barvami obarvíme kompletní bipartitní graf s alespoň třemi vrcholy, jestliže mu přidáme jednu hranu?
Přidaná hrana musí spojovat dva vrcholy téže partity. V kompletním bipartitním grafu přidáním hrany xy do jedné partity musel vzniknout lichý cyklus xyz, kde z je libovolný vrchol z druhé partity. Proto podle Věty 6.7. ve skriptech [UTG] na obarvení takového grafu je potřeba minimálně tři barvy. Obarvíme-li všechny vrcholy v druhé partitě barvou 1, všechny vrcholy kromě x v partitě s hranou xy barvou 2 a vrchol x barvou 3, dostaneme obarvení zadaného grafu. Stačí nám vždy 3 barvy.

6.2.6. Kolika nejvýše barvami obarvíme kompletní bipartitní graf, jestliže mu přidáme dvě hrany?
Jsou-li přidané hrany ve stejné partitě, ukážeme, že stačí 3 barvy. Pokud podgraf indukovaný na hranách v partitě je K_2, obarvíme vždy jeden koncový vrchol barvou 3 a ostatní barvou 1. Všechny vrcholy v druhé partitě obarvíme barvou 2.

Jsou-li přidané hrany u_1u_2, v_1v_2 v různých partitách, jsou potřeba 4 barvy, protože graf indukovaný na vrcholech u_1, u_2, v_1, v_2 je kompletní. Obarvíme všechny vrchly v jedné partitě barvou 1, vrchol u_1 barvou 3. Dále obarvíme všechny vrchly v druhé partitě barvou 2, vrchol v_1 barvou 4. Dostaneme dobré vrcholové barvení.

6.2.7.♡ Kolika barvami lze obarvit strom?
Rozlišíme dva případy stromu T:

1. má-li T jediný vrchol, stačí nám barva jediná,
2. má-li T alespoň dva vrcholy, tak protože neobsahuje lichý cyklus (neobsahuje žádný cyklus), je T bipartitní a na jeho dobré obarvení stačí dvě barvy.

6.2.8. Kolik barev je potřeba na obarvení (jaká je barevnost) $K_n - e$? $[n-1]$

6.2.9. Kolik barev je potřeba na obarvení (jaká je barevnost) C_n s jednou přidanou hranou v_1v_i, $i \in [1, n]$?
Jestliže n je liché, potřebujeme na obarvení cyklu C_n alespoň tři barvy. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že vrchol v_1 je obarven barvou 3 a na ostatních vrcholech se pravidelně střídají barvy 1 a 2. Protože koncový vrchol v_1 hrany v_1v_i je obarven barvou 3 a druhý ne, je toto barvení dobré i pro cyklus s přidanou hranou.

Je-li n sudé, stačí na obarvení C_n dvě barvy a to jediným způsobem (až na pojmenování barev). Dále rozlišíme dva případy. Jestliže i je liché, spojuje hrana v_1v_i dva vrcholy stejné barvy. Proto dobré barvení získáme, bude-li vrchol v_1 obarven barvou 3 a barevnost grafu bude 3.

Jestliže i je sudé, spojuje hrana v_1v_i dva vrcholy různé barvy a barevnost grafu je 3.

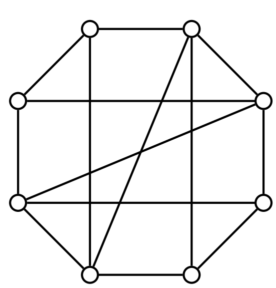
6.2.10. Mám dán graf G. Co můžeme říci o barvenosti grafu G, jestliže známe $\Delta(G)$?
Ukážeme matematickou indukcí vzhledem k počtu vrcholů, že pro barevnost grafu G platí $\chi(G) \leq 1+\Delta(G)$. Je-li G triviální graf, jistě stačí $1 + \Delta(G) = 1 + 0 = 1$ barva.

Nyní předpokládejme, že pro graf na méně než n vrcholech platí $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$. Ukážeme, že i graf na n vrcholech lze (dobře) obarvit $1 + \Delta(G)$ barvami. Vezmeme libovolný vrchol v grafu G a odebráním v dostaneme G'. Nejvyšší stupeň se odebráním vrcholu jistě nezvětšil, proto na obarvení G' stačí $1 + \Delta(G') \leq 1 + \Delta(G)$ barev.

Nyní stačí vrchol v obarvit tou z $1 + \Delta(G)$ barev, která se mezi nejvýše $\Delta(G)$ sousedy vrcholu v nevyskytuje.

6.3 Rovinné kreslení grafu

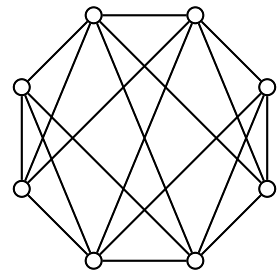
6.3.1. Pokud je to možné, nakreslete graf G na Obrázku 6.7 tak, aby se hrany neprotínaly.



Obrázek 6.7: *Graf G.*

[G je rovinný]

6.3.2. Pokud je to možné, nakreslete graf G na Obrázku 6.8 tak, aby se hrany neprotínaly.



Obrázek 6.8: *Graf G.*

[G je rovinný]

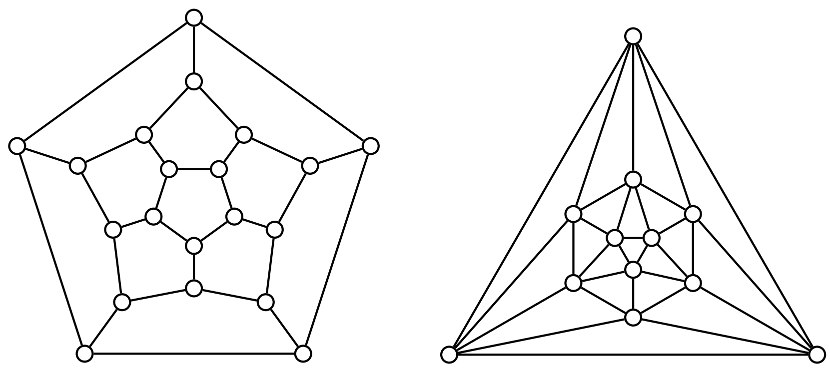
6.3.3. Ukažte, že po přidání libovolné hrany do grafu na Obrázku 6.8 výsledný graf již nebude rovinný.
Podle důsledku Eulerova vzorce může rovinný graf na n vrcholech obsahovat nejvýše $3n-6$ hran. Graf na Obrázku 6.8 má 8 vrcholů a 18 hran. Přidáním libovolné hrany by měl 19 hran, což by bylo ve sporu s nerovností $19 = |E| \leq 3n - 6 = 3 \cdot 8 - 6 = 18$.

6.3.4. Pokud je to možné, nakreslete rovinný graf pravidelného čtyřstěnu.
Viz Obrázek 6.4.

6.3.5. Pokud je to možné, nakreslete rovinný graf pravidelného šestistěnu (krychle).
Viz Obrázek 6.4.

6.3.6. Pokud je to možné, nakreslete rovinný graf pravidelného osmistěnu.
Viz Obrázek 6.4.

6.3.7. Nakreslete rovinný graf pravidelného dvanáctistěnu.
Viz Obrázek 6.9.



Obrázek 6.9: *Rovinná nakreslení pravidelného dvanáctistěnu a dvacetistěnu.*

6.3.8. Nakreslete rovinný graf pravidelného dvacetistěnu.
Viz Obrázek 6.9.

6.3.9. Nakreslete rovinný graf osmistěnu a najděte odpovídající duální graf. [duální graf pravidelného osmistěnu je graf pravidelného šestistěnu (krychle)]

6.3.10. Nakreslete rovinný graf dvanáctistěnu a najděte odpovídající duální graf. [duální graf pravidelného dvanáctistěnu je graf pravidelného dvacetistěnu]

6.3.11. Máme nějaké rovinné nakreslení pravidelného osmistěnu. Stěny pravidelného osmistěnu jsou trojúhelníky.

a) Kolik má oblastí?

Jedná se o pravidelný osmistěn, graf bude mít 8 oblastí.

b) Kolik má hran?

Protože stěny pravidelného osmistěnu jsou ohraničeny trojúhelníky, má graf osm oblastí ohraničených třemi hranami. Protože každá hrana je započítána dvakrát (jednou za každou sousedící stěnu), má graf celkem $\frac{1}{2}8 \cdot 3 = 12$ hran.

c) Kolik má vrcholů?

Podle předchozích cvičení víme, že graf pravidelného osmistěnu má osm oblastí a 12 hran. Z Eulerova vzorce dostaneme, že má $v = 2 - f + e = 2 - 8 + 12 = 6$ vrcholů.

d) Kolik dalších hran můžeme do roviného nakreslení osmistěnu přidat tak, aby graf zůstal rovinný?

Víme, že rovinný graf na $v = 6$ vrcholech má nejvýše $3v - 6 = 18 - 6 = 12$ hran. Proto již nemůžeme přidat žádnou hranu.

6.3.12. Máme nějaké rovinné nakreslení pravidelného šestistěnu (krychle).

a) Kolik má oblastí?

Jedná se o pravidelný šestistěn, graf bude mít 6 oblastí.

b) Kolik má hran?

Protože stěny pravidelného šestistěnu jsou čtverce, má graf šest oblastí ohraničených čtyřmi hranami. Protože každá hrana je započítána dvakrát (jednou za každou sousedící stěnu), má graf celkem $\frac{1}{2}6 \cdot 4 = 12$ hran.

c) Kolik má vrcholů?

Podle předchozích cvičení víme, že graf pravidelného osmistěnu má 6 oblastí a 12 hran. Z Eulerova vzorce dostaneme, že má $v = 2 - f + e = 2 - 6 + 12 = 8$ vrcholů.

d) Kolik dalších hran můžeme do roviného nakreslení krychle přidat tak, aby graf zůstal rovinný?

Víme, že rovinný graf na $v = 8$ vrcholech má nejvýše $3v - 6 = 24 - 6 = 18$ hran. Proto můžeme přidat až 6 hran – do každé stěny můžeme přidat úhlopříčku.

6.3.13. Máme nějaké rovinné nakreslení pravidelného dvanáctistěnu. Stěny pravidelného dvanáctistěnu jsou pětiúhelníky.

a) Kolik má oblastí?

Jedná se o pravidelný dvanáctistěn, graf bude mít 12 oblastí.

b) Kolik má hran?

Protože stěny pravidelného dvanáctistěnu jsou pětiúhelníky, má graf dvanáct oblastí ohraničených pěti hranami. Protože každá hrana je započítána dvakrát (jednou za každou sousedící stěnu), má graf celkem $\frac{1}{2}12 \cdot 5 = 30$ hran.

c) Kolik má vrcholů?

Podle předchozích cvičení víme, že graf pravidelného dvanáctistěnu má 12 oblastí a 30 hran. Z Eulerova vzorce dostaneme, že má $v = 2 - f + e = 2 - 12 + 30 = 20$ vrcholů.

d) Kolik dalších hran můžeme do roviného nakreslení dvanáctistěnu přidat tak, aby graf zůstal rovinný?

Víme, že rovinný graf na v vrcholech, $v = 20$, má nejvýše $3v - 6 = 60 - 6 = 54$ hran. Proto můžeme přidat až 24 hran – do každé z dvanácti stěn můžeme přidat dvě úhlopříčky do jednoho vrcholu.

6.3.14. Máme nějaké rovinné nakreslení pravidelného dvacetistěnu. Stěny pravidelného dvacetistěnu jsou trojúhelníky.

a) Kolik má oblastí?

Jedná se o pravidelný dvacetistěn, graf bude mít 20 oblastí.

b) Kolik má hran?

Protože stěny pravidelného šestistěnu jsou trojúhelníky, má graf dvacet oblastí ohraničených třemi hranami. Protože každá hrana je započítána dvakrát (jednou za každou sousedící stěnu), má graf celkem $\frac{1}{2}20 \cdot 3 = 30$ hran.

c) Kolik má vrcholů?

Podle předchozích cvičení víme, že graf pravidelného osmistěnu má 20 oblastí a 30 hran. Z Eulerova vzorce dostaneme, že má $v = 2 - f + e = 2 - 20 + 30 = 12$ vrcholů.

d) Kolik dalších hran můžeme do roviného nakreslení dvacetistěnu přidat tak, aby graf zůstal rovinný?

Víme, že rovinný graf na $v = 12$ vrcholech má nejvýše $3v - 6 = 36 - 6 = 30$ hran. Proto již nemůžeme přidat žádnou hranu.

6.3.15. Kolik má souvislý rovinný graf stěn, víte-li že má

a) 20 vrcholů a 25 hran?

Z Eulerova vzorce dostaneme $f = 2 + e - v = 2 + 25 - 20 = 7$ stěn.

b) 16 vrcholů a 15 hran?

Z Eulerova vzorce dostaneme $f = 2 + e - v = 2 + 15 - 16 = 1$ stěna.

c) 25 vrcholů a 22 hran? [takový souvislý graf neexistuje]

d) 5 vrcholů a 10 hran?

Takový souvislý graf sice existuje (kompletní graf K_5) ale není rovinný. Rovinný graf na 5 vrcholech má nejvýše $e \leq 3v - 6 = 15 - 6 = 9$ hran.

6.3.16. Nakreslete graf K_4 tak, aby

a) se hrany neprotínaly [graf K_4 je grafem pravidelného čtyřstěnu]

b) a navíc aby byly úsečky.

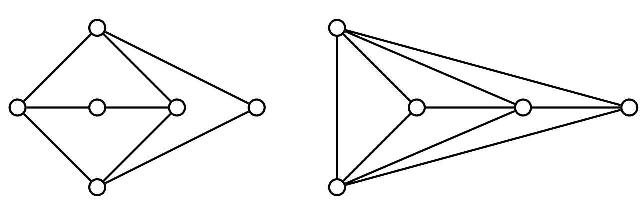
Graf K_4 je grafem pravidelného čtyřstěnu, řešení je na Obrázku 6.4.

6.3.17. Nakreslete graf $K_5 - e$ tak, aby

a) se hrany neprotínaly [$K_5 - e$ je rovinný, nakreslení existuje]

b) a navíc aby byly úsečky.

Řešení je na Obrázku 6.10.



Obrázek 6.10: *Rovinná nakreslení grafů $K_{3,3} - e$ a $K_5 - e$.*

6.3.18. Nakreslete graf $K_{3,3} - e$ tak, aby

a) se hrany neprotínaly [$K_{3,3} - e$ je rovinný, nakreslení existuje]

b) a navíc aby byly úsečky.

Řešení je na Obrázku 6.10.

6.3.19. Najděte rovinný graf, který má nejmenší stupeň vrcholů 5.

Protože každý vrchol má být stupně alespoň 5, jistě musí graf obsahovat alespoň 6 vrcholů. Ukážeme si, že užitím známých tvrzení můžeme odhadnout nejmenší počet vrcholů rovinného grafu s $\delta(G) = 5$.

Označme v počet vrcholů, e počet hran a f počet stěn hledaného rovinného grafu. Podle Důsledku 6.14. ze skript [UTG] víme, že každý rovinný graf na v vrcholech má nejvýše $3v - 6$ hran.

$$e \leq 3v - 6$$

Konečně z Principu sudosti víme, že součet stupňů je roven dvojnásobku počtu hran. Protože každý vrchol je stupně alespoň 5, dostaneme

$$5v \leq \sum_{x \in V(G)} \deg(x) = 2e. \tag{2}$$

Porovnáním dostaneme

$$5v \leq 2e \leq 6v - 12 \qquad \Rightarrow \qquad 12 \leq v.$$

Hledaný graf má alespoň 12 vrcholů a ze vztahu 2 má alespoň 30 hran, protože

$$e \geq \frac{5v}{2} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30.$$

Pokud takový graf existuje na dvanácti vrcholech s třiceti hranami, má podle Eulerova vztahu

$$f = 2 - v + e = 2 - 12 + 30 = 20$$

má právě 20 stěn. Vskutku, graf pravidelného dvacetistěnu je jedním z hledaných grafů, viz Obrázek 6.9.

6.3.20.* Najděte nekonečně mnoho neisomorfních souvislých rovinných grafů, které mají nejmenší stupeň vrcholů 5.

Stačí vzít n kopií grafů pravidelného dvacetistěnu, v každém vybrat jeden vrchol vnější stěny x_i a přidat hrany $x_i x_{i+1}$, pro $i = 1, \ldots, n-1$ a hranu $x_n x_1$. Takový graf je rovinný, neboť se jedná o cyklus C_n, kde do každého vrcholu je připojena jedna kopie grafu pravidelného dvacetistěnu. Graf má n vrcholů stupně 7 a všechny ostatní vrcholy stupně 5.

6.3.21. Do rovinného nakreslení stromu přidáme dvě hrany, které se navzájem nekříží a nekříží ani žádnou původní hranu stromu. Kolik bude mít výsledný graf oblastí (stěn)?

Mějme strom na n vrcholech. Nový graf bude mít $v = n$ vrcholů, $e = n - 1 + 2 = n + 1$ hran, a podle Eulerova vzorce $f = 2 + e - v = 2 + n - (n+1) = 3$ oblastí.

6.4 Rozpoznání rovinných grafů

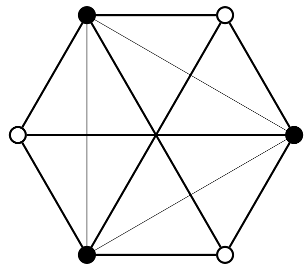
6.4.1.♡ Pro která n je graf K_n rovinný? Zdůvodněte. [pro $1 \leq n \leq 4$, užitím Kuratowského věty]

6.4.2.♡ Pro která m, n je graf $K_{m,n}$ rovinný? Zdůvodněte.

Aby graf $K_{m,n}$ byl rovinný, nesmí obsahovat $K_{3,3}$ jako podgraf. Je-li $m = 1$, n může být libovolné. Grafem je hvězda $K_{1,n}$ (strom), které je rovinná. Je-li $m = 2$, n může být libovolné. Grafem je spojením dvou hvězd $K_{1,n}$, existuje jeho rovinné nakreslení. Je-li $m > 2$, musí být $n \leq 2$, jinak $K_{m,n}$ obsahuje $_{3,3}$ jako podgraf.

6.4.3. Existuje rovinné nakreslení pro $K_6 - C_3$? Zdůvodněte.

Graf $K_6 - C_3$ obsahuje podgraf $K_{3,3}$. Podle Kuratowského věty není rovinný. Mimochodem přemístěním vrcholu vpravo úplně doleva dostaneme nakreslení s jediným křížením hran.



Obrázek 6.11: *Graf $K_6 - C_3$ není rovinný.*

6.4.4. Nakreslete nějaký rovinný graf s 12 hranami a 8 stěnami.

Dle Eulerovy věty má takový graf $v = 2 + e - f = 2 + 12 - 8 = 6$ vrcholů.

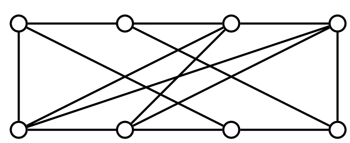
Například graf pravidelného osmistěnu (cyklus C_6 s jedním cyklem C_3 uvnitř a druhým cyklem C_3 „venku“).

Existují i jiné takové grafy? (Asi ne.)

6.4.5. Nakreslete nějaký rovinný graf s 21 hranami a 16 stěnami.

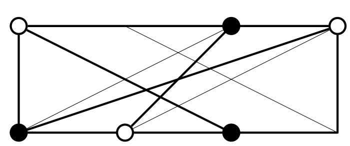
Takový graf neexistuje. Podle Eulerovy by takový graf G měl $v = 2 + e - f = 2 + 21 - 16 = 7$ vrcholů. Podle Principu sudosti by měl G součet stupňů 42 a protože žádný vrchol nemůže být stupně většího než 6, musel by G být kompletní graf K_7. Ten však není planární podle Kuratowského věty, neboť obsahuje podgraf K_5.

6.4.6.* Je graf G na Obrázku 6.12 rovinný? Zdůvodněte.



Obrázek 6.12: *Graf G.*

Graf G obsahuje podgraf isomorfní s rozdělením grafu $K_{3,3}$. Podle Kuratowského věty není rovinný.



Obrázek 6.13: *Podgraf G isomorfní s rozdělením grafu $K_{3,3}$.*

6.4.7. Najděte chybu v následujícím důkazu: Mějme takový graf G, že na jeho dobré vrcholové barvení je potřeba alespoň 5 barev. V grafu G musí být vrcholy stupně alespoň 5, které jsou sousední s vrcholy čtyř ostatních barev, jinak bychom je mohli přebarvit a použít méně než 5 barev. Jiste najdeme takovou množinu pěti vrcholů různé barvy, které tvoří podgraf K_5.

V roviném grafu podle Kuratowského věty neexistuje podgraf isomorfní s K_5 a proto (podle předchozího zdůvodnění) na obarvení roviného grafu budou stačit vždy čtyři barvy.

Chyba je v předpoklady, že graf, na jehož obarvení je potřeba alespoň 5 barev, musí obsahovat podgraf K_5. Například graf W_7, do kterého přidáme druhý centrální vrchol y a spojíme ho hranami se všemi vrcholy cyklu C_7 i s centrálním vrcholem x kola W_7, neobsahuje K_5 jako podgraf (žádné tři vrcholy na obvodu kola nejsou navzájem sousední) a přitom je potřeba na obarvení grafu alespoň 5 barev: dvě na centrální vrcholy x a y a tři na vrcholy cyklu C_7. Na základě tohoto neplatného tvrzení je pak již snadné chybně „dokázat“ větu o čtyřech barvách.

6.5 Barvení map a rovinných grafů

6.5.1. Kolik nejméně barev je třeba na dobré vrcholové barvení rovinného nakreslení grafů?

a) $K_5 - e$

Nesousední vrcholy obarvíme stejnou barvou. Ale obsahuje podgraf K_4, proto je potřeba alespoň 4 barvy.

b) $K_{3,3} - e$ [2]

6.5.2. Najdete rovinný graf, na jehož obarvení je potřeba alespoň 5 barev? Zdůvodněte. [takový graf neexistuje podle Věty o 4 barvách]

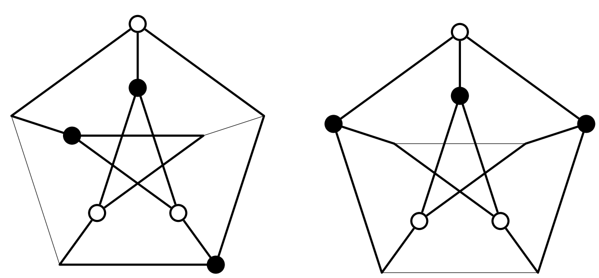
6.5.3. Kolik barev je třeba na dobré obarvení hyperkrychle Q_n? [2 (je bipartitní)]

6.5.4. Najdete graf s největším stupněm 2 na jehož dobré vrcholové barvení jsou potřeba alespoň 3 barvy? Zdůvodněte.
Například C_{2k+1} pro $k \geq 1$.

6.5.5. Najděte graf s největším stupněm r na jehož dobré vrcholové barvení je potřeba alespoň $r+1$ barev. [K_{r+1}]

6.5.6. Najdete graf s největším stupněm 3 na jehož dobré vrcholové barvení je potřeba minimálně 5 barev? Zdůvodněte. [takový graf neexistuje]

6.5.7. Je Petersenův graf rovinný? Zdůvodněte.
Petersenův graf jistě neobsahuje rozdělení grafu K_5, protože nemá žádný vrchol stupně většího než 3. Dále pokud víme, že nejkratší cyklus v Petersonově grafu má délku 5, tak je zřejmé, že neobsahuje jako podgraf ani $K_{3,3}$, protože $K_{3,3}$ obsahuje C_4 jako podgraf. Petersenův graf však obsahuje rozdělení grafu $K_{3,3}$, viz Obrázek 6.14, proto není rovinný.



Obrázek 6.14: *Petersenův graf obsahuje rozdělení grafu* $K_{3,3}$.

6.6 Příklady k procvičení

6.6.1. Máme dánu hyperkrychli řádu n, značíme ji Q_n (viz strana 119).

a) Jaký je počet vrcholů Q_n?

Vrcholy hyperkrychle jsou všechny binární vektory délky n. Těch je $V^*(2,n) = 2^n$.

b) Jaký je stupeň vrcholů v grafu Q_n?

Každý vrchol je spojen hranou se všemi vrcholy, jejichž odpovídající binární vektory se liší v jediné souřadnici. Binární vektory vrcholů krychle Q_n mají n souřadnic, proto je každý vrchol stupně n.

Jiné řešení:

Q_n je regulární graf. V každém kroku rekurzívní konstrukce přidáme ke každému vrcholu jednu hranu a zvýšíme stupeň vrcholu, proto $\deg_{Q_n} v = n$.

c) Jaký je počet hran Q_n?

V hyperkrychli je podle předchozích příkladů 2^n vrcholů a každý je stupně n. Podle principu sudosti je dvojnásobek počtu hran roven součtu stupňů všech vrcholů

$$2|E(Q_n)| = n \cdot 2^n.$$

Odtud snadno vyjádříme, že $|E(Q_n)| = n \cdot 2^{n-1}$.

d) Jaké je chromatické číslo Q_n?

Ukážeme, že chromatické číslo Q_n je 2, neboli že Q_n bipartitní graf. Stačí obarvit vrcholy, které mají sudý počet jedniček barvou 0 a vrcholy, které mají lichý počet jedniček barvou 1. Toto barvení je dobré, neboť hranou jsou spojeny pouze vrcholy, které se liší v jediné souřadnici a tedy takové, jejichž počet jedniček se liší o jedna.

Jiné řešení:

Matematickou indukcí vzhledem k parametru n ukážeme, že Q_n je bipartitní graf.

Základ indukce: Nejmenší netriviální hyperkrychle je $Q_1 = K_{1,1}$, která je jistě bipartitní.

Indukční krok: Indukční předpoklad: Předpokládejme, že Q_n je bipartitní graf. Nyní ukážeme, že také Q_{n+1} je bipartitní graf. Graf Q_{n+1} se skládá ze dvou kopií bipartitního grafu Q_n. Každou z nich obarvíme dvěma barvami, jednu barvami $1, 2$ druhou opačně barvami $2, 1$. Q_{n+1} vznikne spojením hranami mezi odpovídajícími vrcholy. Tyto dvojice vrcholů mají vždy různou barvu, proto je $\chi(Q_n) = 2$.

e) Pro které hodnoty n je graf Q_n rovinný?

Graf Q_n je bipartitní (viz část d), proto neobsahuje žádný lichý cyklus ani trojúhelník a podle Důsledku 6.16. ve skriptech [UTG] obsahuje každý rovinný graf bez trojúhelníků vrchol stupně nejvýše 3. Protože podle části c) jsou v Q_n všechny vrcholy stupně n, nejsou hyperkrychle Q_n pro $n \geq 4$ rovinné. Rovinná nakreslení grafů Q_1, Q_2 a Q_3 snadno najdete sami.

6.6.2. Podle předpisů se káva nesmí skladovat společně s rýží, rýže s moukou, mouka s jablky a jablka se nesmí skladovat společně s tropickým ovocem. Kolik nejméně místností je potřeba pro uskladnění všech druhů zboží?

6.6.3. Máme za úkol pronajmout skladové prostory, ve kterých se budou skladovat broskve, kukuřice, papriky, pšenice, rajčata, švestky a konzervy. Podle předpisů se obiloviny nesmí skladovat společně s ovocem, rajčata ani papriky se nesmí skladovat s pšenicí nebo kukuřicí a broskve se nesmí skladovat s rajčaty. Kolik nejméně místností je třeba pronajmout pro uskladnění všech druhů zboží?

6.6.4. Kolik hran stačí přidat do cyklu C_n, aby výsledný graf nebyl rovinný?
Rozlišíme několik případů. Je-li $n = 3$ nebo $n = 4$, přidáním hran nemůže vzniknout jednoduchý graf, který není rovinný. Nebude obsahovat ani K_5 ani $K_{3,3}$ ani jejich rozdělení.

Je-li $n = 5$, tak jediný nerovinný graf na pěti vrcholech je K_5. Bude třeba přidat právě 5 hran.

Je-li $n \geq 6$, stačí přidat 3 hrany: v_1v_4, v_2v_5 a v_3v_6. Dostaneme graf $K_{3,3}$, pro $n > 6$ dostaneme rozdělení grafu $K_{3,3}$.

6.6.5. Máme dány hyperkrychli Q_4 (viz strana 119). Je Q_4 rovinný graf?
Není. Protože hyperkrychle Q_4 je bipartitní graf na $v = 16$ vrcholech, tak neobsahuje trojúhelník a musela by mít nejvýše $2v - 4 = 28$ hran. Každý vrchol je však stupně 4 a má podle Principu sudosti 32 hran.

6.6.6. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ uveďte příklad grafu G, aby platilo $\Delta(G) - \chi(G) \geq k$.
Hledaným grafem je například kompletní bipartitní graf $K_{k+2,k+2}$. Evidentně platí $\chi(K_{k+2,k+2}) = 2$, neboť se jedná o bipartitní graf. Dále platí $\delta(K_{k+2,k+2}) = k + 2$, neboť každý vrchol je stupně $k + 2$. Proto $\Delta(G) - \chi(G) = k + 2 - 2 = k$, kde k je libovolné přirozené číslo.

7 Toky v sítích

Pojem sítě a definice toku v síti jsou jsou popsány ve skriptech [UTG].

7.1 Definice sítě

7.1.1. Pro které vrcholy sítě neplatí zákony kontinuity? [zdroj a stok]

7.1.2. Jak v síti namodelovat neorientovanou hranu? [dvojicí nesouhlasně orientovaných hran]

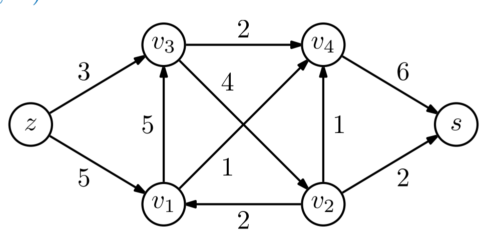
7.1.3. Může pro (jediný) zdroj platit zákon kontinuity?
Ano, ale pouze v případě, že tok v síti je nulový.

7.1.4. Může v síti něco přitékat do zdroje? [ano]

7.1.5. Může být tok na hranách vycházející ze zdroje větší, než tok na hranách přitékajících do stoku?
Ano, ale aby byly splněnu zákony kontinuity, tak musí současně do zdroje další jednotky přitékat.

7.2 Hledání maximálního toku

7.2.1. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 7.1.



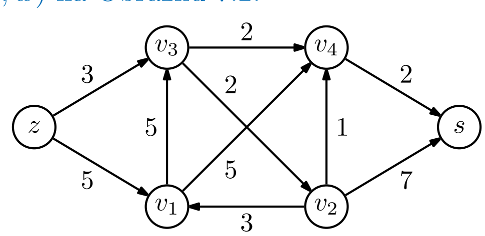
Obrázek 7.1: *Síť* (G, z, s, w).

a) Jaká je hodnota největšího toku v síti S? Najděte jej! [6]

b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti S? Najděte minimální řez. [6, $\{v_3v_4, v_1v_4, v_2v_4, v_2z\}$]

c) Jak vypadá množina U po skončení algoritmu? [$U = \{s, v_1, v_2, v_3\}$]

7.2.2. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 7.2.



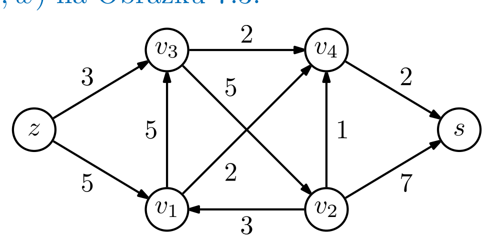
Obrázek 7.2: *Síť* (G, z, s, w).

a) Jaká je hodnota největšího toku v síti S? Najděte jej! [4]

b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti S? Najděte minimální řez. [4, $\{v_3v_2, v_4z\}$]

c) Jak vypadá množina U po skončení algoritmu? [$U = \{s, v_1, v_3, v_4\}$]

7.2.3. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 7.3.



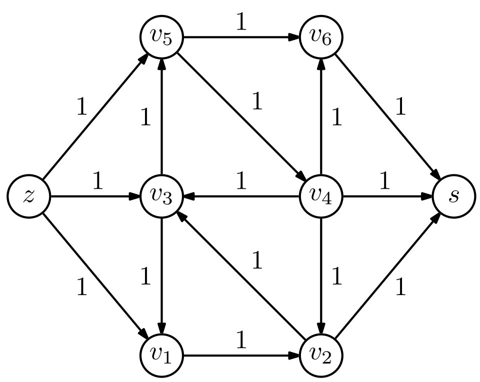
Obrázek 7.3: *Síť* (G, z, s, w).

a) Jaká je hodnota největšího toku v síti S? Najděte jej! [7]

b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti S? Najděte minimální řez. $[7, \{v_3v_2, v_4z\}]$

c) Jak vypadá množina U po skončení algoritmu? $[U = \{s, v_1, v_3, v_4\}]$

7.2.4. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 7.4.



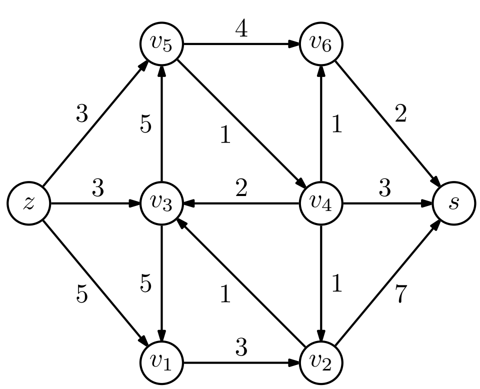
Obrázek 7.4: *Síť* (G, z, s, w).

a) Jaká je hodnota největšího toku v síti S? Najděte jej! [3]

b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti S? Najděte minimální řez. $[3, \{sv_1, sv_3, sv_5\}]$

c) Jak vypadá množina U po skončení algoritmu? $[U = \{s\}]$

7.2.5. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 7.5.



Obrázek 7.5: *Síť* (G, z, s, w).

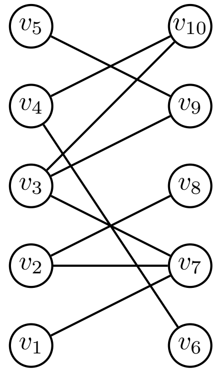
a) Jaká je hodnota největšího toku v síti S? Najděte jej! [6]

b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti S? Najděte minimální řez. $[6, \{v_1v_2, v_5v_4, v_6z\}]$

c) Jak vypadá množina U po skončení algoritmu? $[U = \{s, v_1, v_3, v_5, v_6\}]$

7.3 Zobecnění sítí a další aplikace

7.3.1. Najděte největší párování v následujícím grafu. Zdůvodněte, proč neexistuje větší párování.



Obrázek 7.6: *Bipartitní graf G.*

Maximální párování obsahuje 4 hrany, například: $M = \{v_2v_8, v_3v_5, v_4v_6, v_5v_9\}$. Větší párování neexistuje, neboť okolí množiny čtyř vrcholů $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ obsahuje pouze tři vrcholy v_7, v_9, v_{10}. Představíme-li si vrcholy levé partity jako množiny a vrcholy v pravé partitě jako prvky těchto množin, pak podle Hallovy věty neexistuje úplné párování.

7.3.2. Existuje systém různých reprezentantů pro následující systém množin? Pokud ano, najděte ho, pokud ne, dokažte to.

$$M_1 = \{1,2,4\}, M_2 = \{1,3,7\}, M_3 = \{1,5,6\}, M_4 = \{2,6,7\}, M_5 = \{2,3,5\}, M_6 = \{3,4,6\}, M_7 = \{4,5,7\}$$

Systém reprezentantů je například $x_1 = 1$, $x_2 = 7$, $x_3 = 5$, $x_4 = 6$, $x_5 = 2$, $x_6 = 3$, $x_7 = 4$.

7.3.3. Existuje systém různých reprezentantů pro následující systém množin? Pokud ano, najděte ho, pokud ne, dokažte to.

$$M_1 = \{1,4,5\}, M_2 = \{1,4,6\}, M_3 = \{1,5,6\}, M_4 = \{2,3,5\}, M_5 = \{4,5,6\}, M_6 = \{4,5,7\}, M_7 = \{4,6,7\}$$

Systém reprezentantů neexistuje: $|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_5 \cup M_6 \cup M_7| = |\{1,4,5,6,7\}| = 5 \ngeq 6$.

7.4 Příklady k procvičení

7.4.1. Najděte příklad sítě, kde kapacity hran jsou celočíselné a maximální tok není celočíselný.
Taková síť podle Důsledku 11.7. neexistuje.

Reference

[ZDM] M. Kubesa, Základy diskrétní matematiky, VŠB–TU Ostrava, skriptum (2012).

[UTG] P. Kovář, Úvod do teorie grafů, VŠB–TU Ostrava, skriptum (2021).

[H] P. Hliněný, Diskrétní matematika, skriptum, VŠB (2005).

[TG] P. Kovář, Teorie grafů, VŠB–TU Ostrava, skriptum (2022).

[MN] J. Matoušek, J. Nešetřil, Kapitoly z diskrétní matematiky, Univerzita Karlova, Praha (2003),

[DMA] K.H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications – 6th ed., McGraw-Hill, New York (2007).

[W] D. B. West, Introduction to graph theory – 2nd ed., *Prentice-Hall*, Upper Saddle River NJ, (2001).