Diskrétní matematika

Petr Kovář
petr.kovar@vsb.cz

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

zimní semestr 2022/2023
DiM 470-2301/01, 470-2301/03*, 470-2301/05

O tomto souboru

Tento soubor je zamýšlen především jako pomůcka pro přednášejícího. Řadu důležitých informací v souboru nenajdete, protože přednášející je říká, ukazuje, případně maluje na tabuli. Přednášky jsou na webu k dispozici, aby studenti mohli snadno dohledat probíraná témata z přednášek, které zameškali.

Pro samostatné studium doporučuji skripta:

- M. Kubesa: Základy diskrétní matematiky, výukový text
- P. Kovář: Úvod do teorie grafů, výukový text

Pro přípravu ke zkoušce a písemkám doporučuji cvičebnici:

- P. Kovář: Cvičení z diskrétní matematiky, sbírka příkladů

Vše na http://homel.vsb.cz/~kov16/predmety_dm.php

Přehled přednášky

Kapitola Barevnost a kreslení grafů

- motivace
- barevnost grafů
- rovinné nakreslení grafů
- rozpoznání rovinných grafů
- barvení map a rovinných grafů

Barevnost grafů

Zmíníme dvě úlohy, které lze snadno řešit jako úlohy vrcholového barvení grafu.

Skladovací problém

Ve skladu je uloženo mnoho druhů potravin. Podle předpisů řada druhů potravin musí být umístěny v oddělených prostorách. Například ovocné saláty nesmí být skladovány společně s čerstvými syrovými vejci nebo krájené salámy nesmí být skladovány společně se syrovým masem. Jaký je nejmenší počet oddělených místností, který ve skladu potřebujeme?

Situaci modelujeme grafem, jehož vrcholy budou odpovídat ukládaným komoditám a hranou spojíme dva vrcholy, pokud odpovídající komodity nesmí být skladovány současně. Místnosti odlišíme barvami.

Otázka

Jaký je nejmenší počet různých barev potřebný k takovému obarvení vrcholů grafu, aby žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejně?

Optimalizace křižovatek

Křižovatka má různé jízdní pruhy (dopravní proudy), jak pro auta, tak pro chodce. Doprava v koridorech, které se nekříží, může probíhat současně. Naopak koridory, které se kříží, musí mít zelenou v jiných časových intervalech. Časové intervaly odlišíme barvami. Jaký je nejmenší počet časových intervalů v jednom "cyklu" semaforu, kdy každý koridor měl alespoň jedenkrát zelenou?

Úlohu budeme modelovat grafem, jehož vrcholy odpovídají dopravním koridorům a každé dva koridory, které spolu kolidují, spojíme hranou.

Otázka

Jaký je nejmenší počet barev nutný k takovému obarvení vrcholů grafu, kde koncové vrcholy každé hrany mají různou barvu.

Ukážeme některá jednodušší tvrzení a speciální případy. Nejprve zavedeme základní pojmy.

Definice

Obarvení grafu G pomocí k barev je takové zobrazení

$$c : V(G) \to \{1, 2, \dots, k\},$$

ve kterém každé dva vrcholy, které jsou spojené hranou, budou mít různou barvu, tj. $c(u) \neq c(v)$ pro každou hranu $uv \in E(G)$.

Poznámka

Uvedenému obarvení vrcholů grafu se říká také dobré vrcholové barvení grafu.

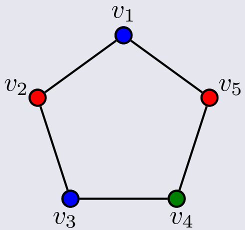
Každý graf má obarvení pomocí $|V(G)|$ barev. Nás však zajímá nejmenší možný počet barev, pro které existuje dobré vrcholové obarvení grafu G.

Definice

Barevnost grafu G je nejmenší přirozené číslo $\chi(G)$, pro které existuje obarvení grafu G pomocí $\chi(G)$ barev.
Barevnosti grafu se také říká chromatické číslo.

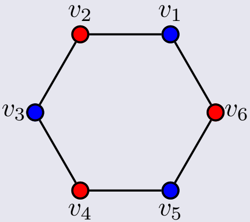
Příklad

Určete barevnost (chromatické číslo) grafu C_5.



Příklad

Určete barevnost (chromatické číslo) grafu C_6.



Horní odhady počtu barev

Lemma

Pro každý graf G na n vrcholech platí $\chi(G) \leq n$.
Rovnost nastává právě tehdy, když G je úplný graf.

Důkaz Pro každý graf G na n vrcholech stačí každý vrchol obarvit jinou barvou a máme dobré vrcholové obarvení grafu G n barvami. Dostáváme $\chi(G) \leq n$.

Je-li $G \simeq K_n$, tak žádné dva vrcholy nemohou být obarveny stejnou barvou, protože každé dva vrcholy jsou sousední. Proto $\chi(G) = \chi(K_n) = n$.

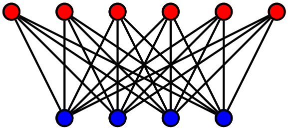
Pokud některá hrana uv v grafu G chybí, můžeme oba její koncové vrcholy obarvit stejnou barvou $c(u) = c(v) = 1$ a zbývající vrcholy obarvíme různými barvami $2, 3, \ldots, n-1$. Dostaneme tak obarvení grafu G méně než n barvami a platí $\chi(G) < n$. $\square$

Brooksova věta

Pro každý graf G na n vrcholech různý od K_n a lichých cyklů C_n platí $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Důkaz přesahuje rámec našeho kurzu, najdete jej třeba v textu „Teorie grafů“.

Ne v každém grafu musíme použít tolik barev, jaký je nejvyšší stupeň vrcholů v grafu. Například na dobré vrcholové obarvení (kompletních) bipartitních grafů stačí dvě barvy.



Algoritmy pro nalezení dobrého barvení s nejmenším počtem barev jsou komplikované a nejsou součástí tohoto textu. Pro obecný graf existuje algoritmus složitosti $O(n2^n)$, kde n je počet vrcholů.

Dolní odhady počtu barev

Brooksova věta říká kolik *nejvíce* barev může být potřeba na dobré vrcholové obarvení daného grafu. Nyní ukážeme několik jednoduchých odhadů, kolik barev je potřeba *nejméně*.

Věta

Graf G má barevnost 1 právě tehdy, když nemá žádné hrany.

Důkaz Pokud graf nemá hrany, obarvíme všechny vrcholy barvou 1. Mají-li všechny vrcholy stejnou barvu, nemůže být v grafu žádná hrana. $\square$

Bez důkazu uvedeme následující větu.

Věta

Jestliže v grafu G je kompletní podgraf na k vrcholech, tak na dobré obarvení celého grafu G je potřeba alespoň k barev.

Jeden speciální případ předchozí věty dokážeme.

Věta

Graf G má barevnost 2 právě tehdy, když neobsahuje jako podgraf žádný cyklus liché délky.

Důkaz (naznačíme „$\Leftarrow$“) Lichý cyklus nelze dobře obarvit dvěma barvami. Zvolíme libovolný vrchol v grafu G a obarvíme jej barvou 1. Vrcholy, jejichž vzdálenost od v je lichá, obarvíme 2. Vrcholy, jejichž vzdálenost od v je sudá, obarvíme 1.
Pokud bychom získali dva vrcholy x, y v sudé vzdálenosti od v spojené hranou xy, jistě by $v, \ldots x, y, \ldots v$ byl uzavřený sled liché délky. Z tohoto sledu vynecháním opakujících se částí dostaneme cyklus liché délky (proč?), což podle předpokladu nelze. Pro dva vrcholy v liché vzdálenosti je zdůvodnění podobně. Proto naše obarvení neobarví sousední vrcholy stejnou barvou, a proto dvě barvy stačí na obarvení G stačí. $\square$

Grafy, které neobsahují cykly liché délky, jsou bipartitní grafy a jejich vrcholy umíme rozdělit do dvou množin (partit).
Stačí vrcholy v každé partitě obarvit jednou barvou.

Určení barevnosti grafu

Určit barevnost (nebo chromatické číslo) znamená určit, jaký nejmenší počet barev je potřeba pro dobré obarvení grafu.

Není žádná známa věta, která by hodnotu barevnosti snadno určila.

Určení barevnosti daného grafu je algoritmicky obtížné, složitost $O(n2^n)$, kde n je počet vrcholů grafu.

Ukázali jsme

- odhady horní a dolní meze barevnosti,
- možnost využití (skladovací problém, rozvrhování)

Rovinná nakreslení grafů

Někdy je důležité, jak nakreslení grafu vypadá. Schéma elektrického obvodu můžeme chápat jako graf a při návrhu tištěného spoje jsou křížení nežádoucí (nutno přemostit).

Otázka: „Lze daný nakreslit graf tak, aby se jeho hrany nekřížily?“

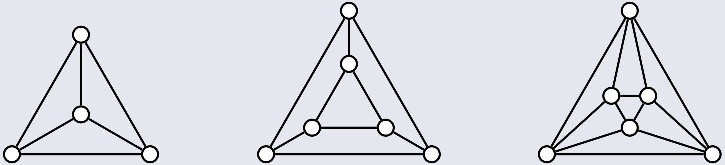
Definice

Rovinným nakreslení grafu G je takové nakreslení grafu, ve kterém jsou vrcholy znázorněny jako různé body v rovině a hrany jako křivky spojující tyto body, které odpovídají koncovým vrcholům. Přitom žádná hrana se nesmí křížit ani procházet jinými body, než které odpovídají jejím koncovým vrcholům.
Řekneme, že graf je rovinný pokud máme jeho rovinné nakreslení.

Ne každý graf má rovinné nakreslení!

Příklady

Příkladem rovinných grafů jsou grafy mnohostěnů (čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn, hranoly, ...)

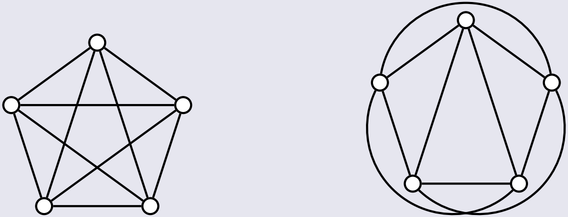


Platí, že grafy mnohostěnů jsou vždy rovinné a (alespoň) 3-souvislé.

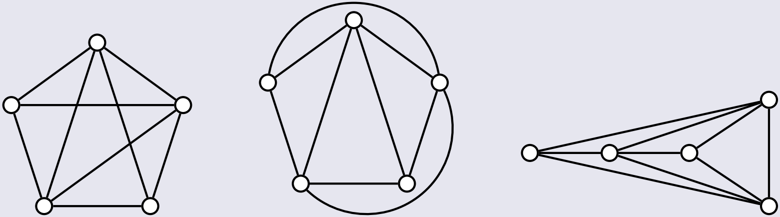
Naopak platí, že každý rovinný 3-souvislý jednoduchý graf je grafem nějakého mnohostěnu.

Příklad

Mají grafy a) K_5, b) $K_5 - e$ rovinné nakreslení?



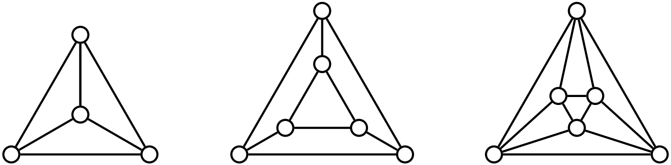
Graf K_5 a jeho nakreslení s jediným křížením hran.



Graf K_5 bez jedné hrany a dvě jeho rovinná nakreslení.

Definice

Oblastmi (stěnami) rovinného nakreslení grafu nazýváme souvislé oblasti roviny ohraničené nakreslením grafu.



Oblasti rovinného nakreslení grafů.

Ukážeme si důležitý kvantitativní vztah pro rovinná nakreslení grafů: Eulerův vzorec.

Věta — Eulerův vzorec

Mějme jednoduchý souvislý rovinný graf s f oblastmi, v vrcholy a h hranami. Potom platí
$$v + f - h = 2.$$

Důkaz Důkaz povedeme indukcí vzhledem k počtu hran.

Základ indukce: Nejmenší souvislý graf pro pevně zvolený počet vrcholů v je strom. Je-li G strom, neobsahuje cyklus a má v nakreslení jedinou oblast. Dále má strom $h = v - 1$ hran a platí $v + f - h = v + 1 - (v - 1) = 2$.

Indukční krok: Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny grafy, které mají $h - 1$ hran. Pokud G obsahuje cyklus C, tak vynecháním jedné hrany e cyklu C se počet hran sníží o 1. Zároveň se o 1 sníží počet oblastí, protože hrana e cyklu C oddělovala dvě oblasti (sousedily hranou e) a vynecháním hrany e tyto oblasti splynou. Počet vrcholů se nezmění.

Podle předpokladu platí $v + (f - 1) - (h - 1) = 2$, proto platí také $v + f - h = 2$. □

Poznámka

Eulerův vztah nezávisí na zvoleném nakreslení grafu, pouze na struktuře grafu.

Eulerův vzorec je sice jednoduchý, ale má mnoho aplikací a důsledků.

Důsledek

Jednoduchý rovinný graf na $v \geq 3$ vrcholech má nejvýše $3v - 6$ hran.

Důkaz Můžeme předpokládat, že graf je souvislý, jinak bychom mohli přidat další hrany. V daném grafu G označíme počet oblastí f a počet hran h.

Jelikož graf neobsahuje smyčky ani násobné hrany, je každá oblast (v libovolném nakreslení grafu G) ohraničena alespoň 3 hranami. Každou hranu na hranici oblasti započítáme nejvýše dvakrát (ve dvou přilehlých oblastech). Platí tedy $2h \geq 3f$. Dosazením $\frac{2}{3}h \geq f$ do Eulerova vztahu dostaneme

$$2 = v + f - h \leq v + \frac{2}{3}h - h = v - \frac{1}{3}h$$
$$h \leq 3(v - 2) = 3v - 6.$$

Nejsou-li v rovinném grafu G žádné oblasti ohraničené cyklem C_3, je počet hran grafu ještě menší.

Důsledek

Jednoduchý rovinný graf bez trojúhelníků na $v \geq 3$ vrcholech má nejvýše $2v - 4$ hran.

Důkaz Dokážeme obdobně. Tentokrát víme, že graf nemá ani trojúhelníky, a proto je každá oblast v libovolném nakreslení grafu ohraničena alespoň 4 hranami. Platí tedy $2h \geq 4f$. Dosazením $\frac{2}{4}h \geq f$ do Eulerova vztahu dostaneme

$$2 = v + f - h \leq v + \frac{2}{4}h - h = v - \frac{1}{2}h$$

$$h \leq 2(v - 2) = 2v - 4.$$

□

Můžeme dokonce ohraničit nejnižší stupeň rovinného grafu!

Důsledek

V každém rovinném grafu existuje vrchol stupně nejvýše 5.
V každém rovinném grafu bez trojúhelníků existuje vrchol stupně nejvýše 3.

Důkaz Postupujeme sporem. Pokud by všechny vrcholy byly stupně alespoň 6, celý graf by měl aspoň $\frac{1}{2} \cdot 6v = 3v$ hran, což je ve sporu s předchozím důsledkem. Proto musí mít některý vrchol stupeň menší než 6.

Podobně pokud by všechny vrcholy v grafu bez trojúhelníků byly stupně alespoň 4, celý graf by měl aspoň $\frac{1}{2} \cdot 4v = 2v$ hran, což je ve sporu s předchozím důsledkem. Proto musí mít některý vrchol stupeň menší než 4. $\square$

Všimněte si, že rovinný graf sice může obsahovat vrcholy vysokých stupňů, avšak současně musí vždy obsahovat nějaký vrchol (nebo vrcholy) malého stupně.

Rozpoznání rovinných grafů

„Být rovinný“, respektive „nebýt rovinný“ je důležitou vlastností grafu, která má řadu aplikací. Mezi nejdůležitější patří například

- výroba tištěných spojů (obvody jsou grafy, půjde vyrobit tištěný spoj bez přidaných drátů?)
- přehledné nakreslení (aby se hrany nekřížily)

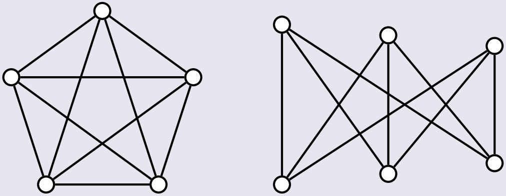
Ukážeme, že dobrým vodítkem při určování rovinnosti grafu je Eulerův vzorec a jeho důsledky.

Na rozdíl od hledání hamiltonovských cyklů nebo barevnosti grafu se jedná problém relativně rychle algoritmicky řešitelný.
My se zaměříme pouze na případy malých grafů, protože zmíněné algoritmy přesahují rámec kurzu.

Ukážeme si dva důležité grafy, které nejsou rovinné.

Příklad

Grafy K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné.



Grafy K_5 a $K_{3,3}$.

Důkaz Využijeme předchozího důsledku pro rovinné grafy: $h \leq 3v - 6$. Všimněme si, že graf K_5 má 5 vrcholů a 10 hran. Ale podle uvedeného důsledku má rovinný graf nejvýše $3 \cdot 5 - 6 = 9$ hran, proto není K_5 rovinný.

Podobně graf $K_{3,3}$ má 6 vrcholů a 9 hran. Navíc neobsahuje žádné trojúhelníky. Ale podle dalšího důsledku má rovinný graf bez trojúhelníků nejvýše $2v - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8$ hran, a proto ani graf $K_{3,3}$ není rovinný. $\square$

Důsledek

Grafy K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné.

Ukazuje se, že oba grafy K_5 a $K_{3,3}$ mají klíčové postavení. Jejich struktura neumožňuje rovinné nakreslení.

Naproti tomu žádná další taková struktura neexistuje.

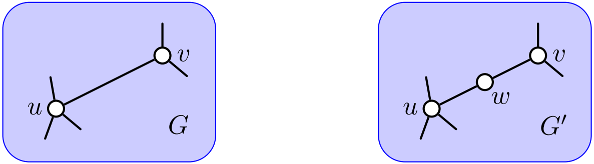
Zavedeme pojem rozdělení grafu, tj. grafu, který má stejnou strukturu, případně nějaké vrcholy stupně 2 navíc.

Definice

Rozdělením (subdivizí) grafu G rozumíme graf, který vznikne z G (případným) nahrazením některých hran cestami (přidáním nových vrcholů stupně 2).

Vezmeme například hranu uv grafu G a nahradíme ji dvojicí hran uw a wv. Dostaneme nový graf G', který je *rozdělením* původního grafu G.

$$G' = (V(G) \cup \{w\}, (E(G) \setminus \{uv\}) \cup \{uw, wv\})$$

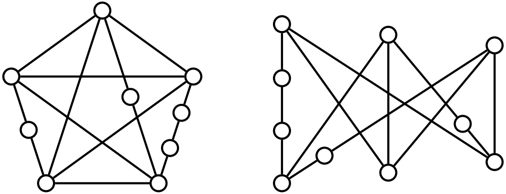


Graf G s vyznačenou hranou uv a rozdělení G' grafu G.

V roce 1930 dokázal K. Kuratowski následující jednoduché tvrzení.

Věta

Graf G je rovinný právě tehdy, když neobsahuje jako podgrafy rozdělení grafů K_5 ani $K_{3,3}$.



Rozdělení grafů K_5 a $K_{3,3}$.

Dá se ukázat, že rovinné grafy je vždy možno „pěkně“ nakreslit:

Věta

Každý rovinný graf lze nakreslit v rovině bez křížení hran tak, že hrany jsou úsečky.

Barvení map a rovinných grafů

Jeden z nejznámějších problémů teorie grafů je problém (věta) čtyř barev. Jeho formulace je sice jednoduchá, ale řešení si vyžádalo více než 100 let.

Problém čtyř barev

Kolik nejméně barev je potřeba k obarvení politické mapy tak, aby sousední státy nebyly obarveny stejnou barvou?

Dva státy považujeme za sousední, jestliže mají společný úsek hranice, nikoli pouze bod.

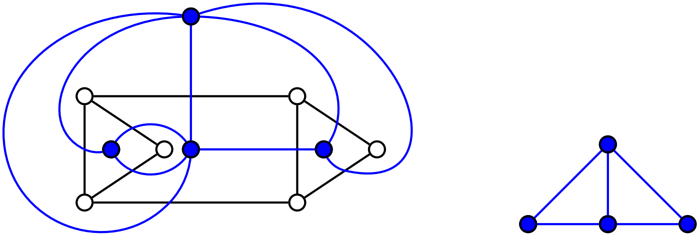
Řešení si vyžádalo, kromě celé řady důkazů teoretických tvrzení, také vyšetření velkého množství případů na počítači.

Příklad

Obarvení politické mapy snadno převedeme na barvení grafu.
Každou oblast nahradíme vrcholem (hlavním/krajským městem).
Dva vrcholy spojíme hranou, jestliže jsou odpovídající státy sousední.

Definice

Duální (multi)graf rovinného nakreslení grafu G získáme, když každou oblast nahradíme vrcholem. Dva vrcholy nového grafu spojíme hranou, jestliže odpovídající dvojice oblastí sousedí hranou grafu G.



Graf G s modře vyznačeným duálním multigrafem a překreslený duální graf.

Dá se ukázat, že duální graf k rovinnému grafu je opět rovinný graf.

Při transformaci mapy na graf se jedná o vytvoření duálního grafu k mapě.

V roce 1976 Appel a Haken, a později v roce 1993 znovu Robertson, Seymour, Sanders a Thomas, dokázali větu, která rozřešila problém čtyř barev. Jedná se o jeden z nejslavnějších výsledků diskrétní matematiky:

Věta o čtyřech barvách

Každý rovinný graf bez smyček lze obarvit čtyřmi barvami.

Důkaz . . . by se sem určitě nevešel. . . $\square$

Snadno si však ukážeme jednodušší tvrzení pro 6 barev.

Věta

Každý rovinný graf lze obarvit nejvýše šesti barvami.
Každý rovinný graf bez trojúhelníků lze obarvit nejvýše čtyřmi barvami.

Důkaz Dokážeme pouze druhou část, první je dokázána ve skriptech.

Postupujeme indukcí dle počtu vrcholů grafu G.

Základ indukce: Graf s 1 vrcholem je jistě rovinný a na dobré barvení stačí jedna barva.

Indukční krok: Mějme rovinný graf s alespoň dvěma vrcholy. Předpokládejme, že všechny menší rovinné grafy lze obarvit nejvýše 4 barvami. Podle předchozího důsledku najdeme v G vrchol v stupně nejvýše 3. Graf $G - v$ je opět rovinný bez smyček i trojúhelníků. Podle indukčního předpokladu lze tento menší graf obarvit 4 barvami. Z nich jen nejvýše 3 budou použity na obarvení sousedů vrcholu v a tak čtvrtou barvou můžeme *vždy* použít na obarvení vrcholu v. $\square$

Všimněte si, že důkaz je konstruktivní – umíme takové barvení najít.

Příště

Kapitola Toky v sítích

- motivace
- definice sítě
- hledání největšího toku
- zobecnění sítí
- další aplikace