Diskrétní matematika

Petr Kovář
petr.kovar@vsb.cz

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

zimní semestr 2022/2023
DiM 470-2301/01, 470-2301/03*, 470-2301/05

O tomto souboru

Tento soubor je zamýšlen především jako pomůcka pro přednášejícího. Řadu důležitých informací v souboru nenajdete, protože přednášející je říká, ukazuje, případně maluje na tabuli. Přednášky jsou na webu k dispozici, aby studenti mohli snadno dohledat probíraná témata z přednášek, které zameškali.

Pro samostatné studium doporučuji skripta:

- M. Kubesa: Základy diskrétní matematiky, výukový text
- P. Kovář: Úvod do teorie grafů, výukový text

Pro přípravu ke zkoušce a písemkám doporučuji cvičebnici:

- P. Kovář: Cvičení z diskrétní matematiky, sbírka příkladů

Vše na `http://homel.vsb.cz/~kov16/predmety_dm.php`

Přehled přednášky

Kapitola Eulerovské a hamiltonovské grafy

- motivace
- eulerovské grafy „jedním tahem“
- hamiltonovské grafy a obchodní cestující

Eulerovské grafy

Historicky první problém vyřešený pomocí Teorie grafů 1736:
Problém sedmi mostů města Královce – hledání tahu, který obsahuje všechny hrany daného grafu G.

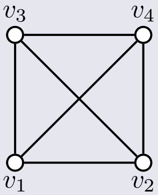
Příklad

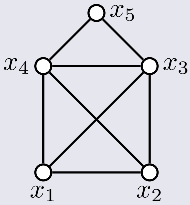
Pošťák má za úkol roznést poštu do každé ulice ve svém okrsku. Může každou ulicí procházel jen jednou – nachodí se tak co nejméně a poštu doručí dříve.

Představme si graf, který modeluje ulice okrsku tak, že hrany odpovídají ulicím a křižovatky vrcholům grafu. Pošťákova úloha tak přesně odpovídá hledání tahu, který obsahuje každou hranu právě jednou.

Podobně můžeme plánovat trasu sněžné frézy, která odklízí chodníky, popeláři, kropící vozy. . .

Příklad





Lze tento graf (resp. jeho hrany) nakreslit jedním tahem?

Definice

Tah v grafu G, který začíná a končí ve stejném vrcholu, se nazývá uzavřený tah. Jestliže navíc obsahuje všechny hrany souvislého grafu G, máme uzavřený eulerovský tah. Graf, ve kterém existuje uzavřený eulerovský tah, se nazývá eulerovský graf.

Tah v souvislém grafu G, který obsahuje všechny hrany grafu G a výchozí vrchol se liší od koncového vrcholu, se nazývá otevřený eulerovský tah.

Říkáme, že takový graf lze nakreslit jedním tahem.

Eulerova věta

Graf G lze nakreslit jedním uzavřeným tahem právě tehdy, když je G *souvislý* a všechny jeho vrcholy *jsou sudého stupně*.

Užitím elegantního triku snadno ukážeme:

Důsledek

Graf G lze nakreslit jedním otevřeným tahem právě tehdy, když je G *souvislý* a *právě dva* jeho vrcholy jsou lichého stupně.

Věta

Graf G lze nakreslit jedním uzavřeným tahem právě tehdy, když je G *souvislý* a všechny jeho vrcholy *jsou sudého stupně*.

Důkaz Indukcí vzhledem k počtu hran (jen naznačena implikace "$\Leftarrow$").

Základ indukce:

Lze použít triviální graf. Pro netriviální souvislý graf G je každý vrchol stupně alespoň 2. Nejmenší takový graf je $G = C_n$. Cyklus C_n je jistě možno nakreslit jedním uzavřeným tahem (proč?).

Indukční krok:

Předpokládejme, že každý souvislý graf G se sudými stupni a s méně než $|E(G)|$ hranami je možno nakreslit jedním uzavřeným tahem. V G najdeme cyklus C (každý vrchol je stupně alespoň 2). V grafu $G - C$ jsou vrcholy sudého stupně a nebo izolované vrcholy. Pokud $G - C$ není souvislý, lze každou jeho komponentu dle indukčního předpokladu nakreslit jedním tahem.

Nyní přidáme do cyklu C uzavřený tah pro každý vrchol další v_i, který leží v některé komponentě. Získáme uzavřený tah grafem G.

Podle principu (silné) matematické indukce je důkaz "$\Leftarrow$" hotov. $\square$

Důsledek

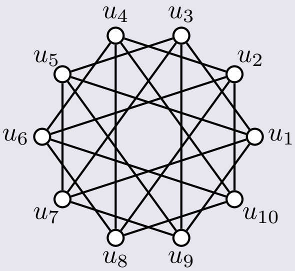
Graf G lze nakreslit jedním otevřeným tahem právě tehdy, když je G *souvislý* a *právě dva* jeho vrcholy jsou lichého stupně.

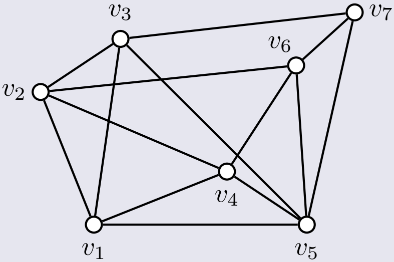
Důkaz

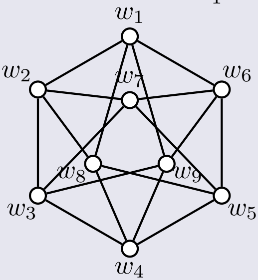
"$\Rightarrow$" Můžeme-li graf G nakreslit jedním otevřeným tahem, tak G je souvislý a všechny vrcholy jsou sudého stupně s výjimkou prvního a posledního vrcholu otevřeného tahu.

"$\Leftarrow$" Mám-li souvislý graf G s právě dvěma vrcholy u, v lichého stupně, můžeme do grafu G přidat nový vrchol x, který spojíme (novými) hranami s vrcholy u, v a dostaneme souvislý graf G', ve kterém jsou všechny vrcholy (i vrcholy u, v, x) sudého stupně. Podle Eulerovy věty v grafu G' existuje *uzavřený* eulerovský tah T'. Vynecháním vrcholu x a obou přidaných hran dostaneme otevřený eulerovský tah T mezi vrcholy u a v v grafu G. $\square$

Příklady







Které z uvedených grafů lze nakreslit jedním tahem?

Eulerovské tahy lze použít i pro řešení jiných problémů, než putování v mapě. Pěkné využití eulerovských grafů:

Příklad

Vrcholy stavového grafu nějakého systému odpovídají možným stavům, které mohou nastat, a hrany spojují stavy, mezi kterými existuje legální přechod – například konečné automaty.

Při testu systému bychom rádi prověřili všechny možné stavy a přechody mezi nimi. Optimální test můžeme naplánovat podle eulerovského tahu grafem.

Hamiltonovské grafy

Definice

Hamiltonovský cyklus v grafu je takový cyklus, který prochází všemi vrcholy.
Graf, ve kterém existuje hamiltonovský cyklus, se nazývá hamiltonovský graf.

Hamiltonovský cyklus prochází každým vrcholem právě jedenkrát.

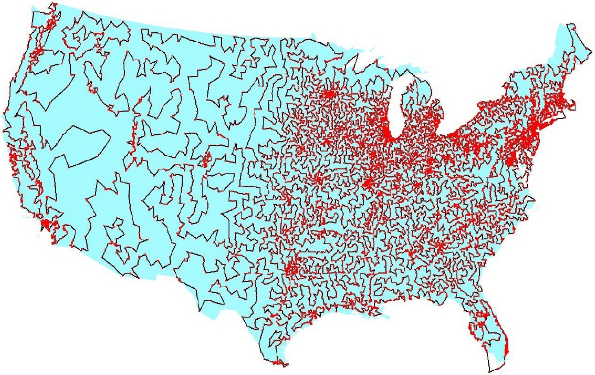
Na první pohled se zdá, že hledání hamiltonovského cyklu je velmi podobné hledání eulerovskému tahu. Není tomu tak!
Zatímco pro rozhodnutí o existenci eulerovského tahu v souvislém grafu je nutnou i dostatečnou podmínkou sudost všech stupňů, pro existenci hamiltonovského cyklu žádná taková podmínka není známa (asi neexistuje).

Důsledek: obecně není lehké rozhodnout, zda daný graf je hamiltonovský.

Příklad

Problém obchodního cestujícího, který má navštívit všechna města svého regionu, vrátit se do výchozího města a přitom nacestovat co nejkratší vzdálenost.

Zjednodušená verze: může navštívit každé město s alespoň 500 obyvateli právě jednou a vrátit se zpět?



Optimální řešení úlohy obchodního cestujícího pro 13 509 měst v USA.

Příklad

Pošťák na vesnici roznáší obvykle jen málo poštovních zásilek. Spíš než projít každou ulici, musí pošťák navštívit všechny adresy (domy), do kterých má doručit nějakou zásilku.

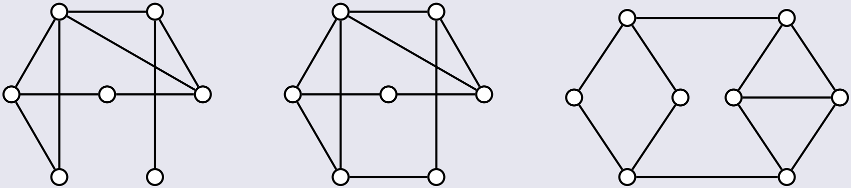
Příklad

Ve velkoskladu se při navážení nebo předávání zboží rozváží paleta, nebo třeba několik palet s různým zbožím na určitá místa ve skladu. Vozík má opět za úkol navštívit všechna vybraná místa a přitom urazit co nejkratší vzdálenost.

Všechny uvedené úlohy odpovídají nalezení hamiltonovského cyklu, případně nejkratšího hamiltonovského cyklu v grafu.

Příklady

Které následující grafy jsou a které nejsou hamiltonovské?



Hamiltonovské a nehamiltonovské grafy.

Příklady

Další úlohy vedoucí na hledání hamiltonovského cyklu

- rodinný výlet po turistických zajímavostech
- divadelní nebo cirkusové turné po republice
- Hamiltonova hra

Diracova věta

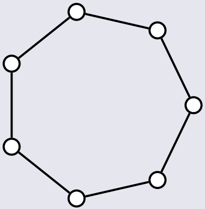
Mějme graf G na n vrcholech, kde $n \geq 3$. Je-li nejmenší stupeň vrcholů v grafu alespoň $n/2$, tak je graf G hamiltonovský.

Důkaz V předmětu Teorie Grafů I.

Všimněte si: věta má tvar implikace, nikoli ekvivalence. Proto graf, který splňuje podmínky věty je hamiltonovský, ale ne každý hamiltonovský graf musí podmínky věty splňovat.

Příklad

Jednoduchý příklad grafu, který je hamiltonovský, ale nemá „mnoho“ hran.



Cyklus C_7.

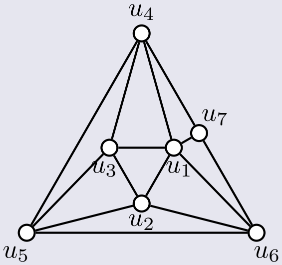
Oreho věta

Mějme graf G na n vrcholech, kde $n \geq 3$.
Jestliže pro každé dva nesousední vrcholy u a v v grafu G platí $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, tak je graf G hamiltonovský.

Diracova věta je speciálním případem Oreho věty.

Příklad

Je následující graf hamiltonovský?



Příště

Kapitola Vzdálenost a metrika

- motivace
- vzdálenost v grafu
- výpočet metriky
- vzdálenost v ohodnocených grafech
- hledání nejkratší cesty