Diskrétní matematika

Petr Kovář
petr.kovar@vsb.cz

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

zimní semestr 2022/2023
DiM 470-2301/01, 470-2301/03*, 470-2301/05

O tomto souboru

Tento soubor je zamýšlen především jako pomůcka pro přednášejícího. Řadu důležitých informací v souboru nenajdete, protože přednášející je říká, ukazuje, případně maluje na tabuli. Přednášky jsou na webu k dispozici, aby studenti mohli snadno dohledat probíraná témata z přednášek, které zameškali.

Pro samostatné studium doporučuji skripta:

- M. Kubesa: Základy diskrétní matematiky, výukový text
- P. Kovář: Úvod do teorie grafů, výukový text

Pro přípravu ke zkoušce a písemkám doporučuji cvičebnici:

- P. Kovář: Cvičení z diskrétní matematiky, sbírka příkladů

Vše na http://homel.vsb.cz/~kov16/predmety_dm.php

Přehled přednášky

Kapitola Souvislost grafu

- motivace
- souvislost grafu, komponenty grafu
- prohledávání grafu
- vyšší stupně souvislosti

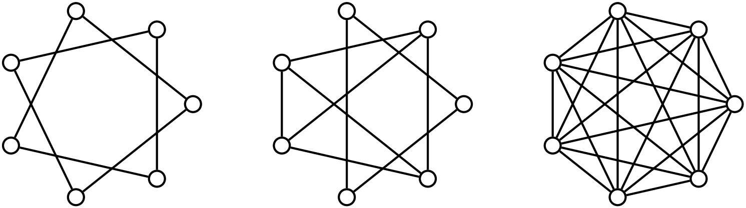
Motivace

Pokud graf reprezentuje počítačovou, nebo dopravní síť je přirozené zjistit zda a jak je možno cestovat (vyslat signál) z vrcholu u do vrcholu v. Zavedeme pojem *souvislost grafu*.

Podobně má smysl zkoumat odolnost sítě vůči lokálním výpadkům:

- redundance uzlů
- dosažitelnost cílového vrcholu i při přerušení některých hran

Dostáváme se k pojmu *stupeň vrcholové a hranové souvislosti*.



Souvislé a nesouvislé grafy.

Souvislost grafu, komponenty grafu

Neformálně: Graf je souvislý, pokud existuje „spojení“ mezi každými dvěma vrcholy (i nepřímé).

Formálně: zavedeme pojmy *sled*, *tah* a *cesta* v grafu.

Definice

Sledem $v_0 v_n$ v grafu G rozumíme takovou posloupnost vrcholů a hran

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n),$$

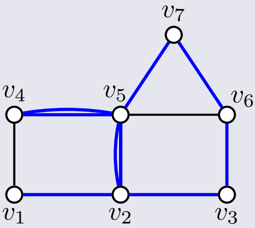
kde v_i jsou vrcholy grafu G a e_i jsou hrany grafu G, přičemž hrana e_i má koncové vrcholy v_{i-1} a v_i. Počet hran nazveme délkou sledu $v_0 v_n$. Vrchol v_0 nazýváme počáteční a vrchol v_n koncový vrchol sledu.

Pokud nejsou násobné hrany, můžeme sled zadat jako posloupnost vrcholů.

$$(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Můžeme vynechat i závorky: $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$.

Příklad

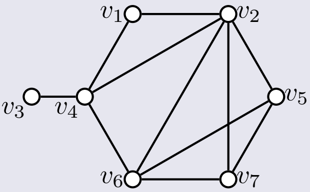


Sled $v_1, v_1v_2, v_2, v_2v_5, v_5, v_5v_7, v_7, v_7v_6, v_6, v_6v_3, v_3, v_3v_2, v_2, v_2v_5, v_5, v_5v_4, v_4, v_4v_5, v_5$ je vyznačen modře.

Stručně:

$v_1, v_2, v_5, v_7, v_6, v_3, v_2, v_5, v_4, v_5$.

Příklad



$v_1, v_2, v_6, v_7, v_2, v_1, v_2, v_3$ není sled

sled $v_1, v_2, v_6, v_7, v_2, v_1, v_2, v_4$

sled $v_1, v_2, v_7, v_5, v_6, v_4, v_3$

(triviální) sled v_4

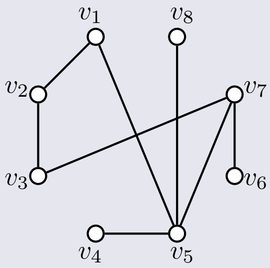
Pojem „souvislosti" je vybudován na pojmu sled.

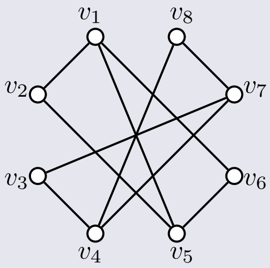
Definice

Řekneme, že vrchol v je dosažitelný z vrcholu u, jestliže v grafu existuje sled z vrcholu u do vrcholu v.
Graf nazveme souvislý, jestliže pro každé dva vrcholy u, v je vrchol v dosažitelný z vrcholu u. V opačném případě je graf nesouvislý.

Příklad

Jsou grafy na obrázku souvislé?





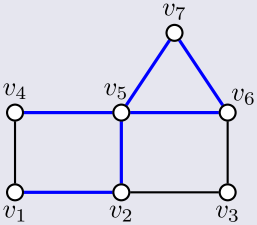
Někdy však *není* žádoucí při popisu dosažitelnosti, aby se opakovaly hrany či vrcholy (potrubí, dopravní sítě, elektrické sítě, robotické svařování, ...).

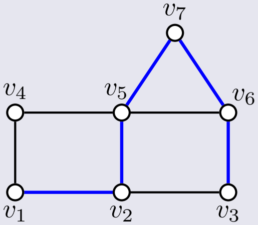
Definice

Tah je sled, ve kterém se neopakují žádné hrany.
Cesta je sled, ve kterém se neopakují žádné vrcholy, tedy ani hrany.

Terminologie: kreslíme „jedním tahem".
Vrcholy a hrany cesty v grafu tvoří podgraf, který je cestou.

Příklad





Tah $v_1, v_2, v_5, v_7, v_6, v_5, v_4$ *a cesta* $v_1, v_2, v_5, v_7, v_6, v_3$.

Věta

Pokud mezi dvěma vrcholy grafu G existuje sled, pak mezi nimi existuje cesta.

Důkaz Nechť S $u = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n = v$ je sled délky n mezi vrcholy u a v v G. Hledáme sled P z vrcholu u do vrcholu v, který bude cestou (žádný vrchol se nebude opakovat). Pokud se v S žádný vrchol neopakuje, je $P = S$ hledanou cestou.
Pokud se některé vrcholy opakují vezmeme první takový vrchol v_i.
Vynecháme celý úsek sledu mezi prvním výskytem v_i a jeho *posledním* opakováním v_k. Získáme sled S', ve kterém se v_i již neopakuje.
Pokud se v S' žádný vrchol neopakuje, je $P = S'$. Jinak postup zopakujeme pro další vrchol.
Postup je jistě konečný, neboť v G je konečně mnoho vrcholů. □

Jestliže v G existuje sled uv, tak můžeme postupem z důkazu vyrobit ze sledu uv cestu uv a říkáme, že vrcholy u a v jsou v G spojeny cestou.

Zavedeme relaci $\sim$ na množině vrcholů grafu G tak, že dva vrcholy $u, v \in V(G)$ jsou v relaci $\sim$ (píšeme $u \sim v$) právě tehdy, když v grafu G existuje sled uv.

Relaci $\sim$ říkáme „relace dosažitelnosti."

Lemma

Relace dosažitelnosti $\sim$ je relací ekvivalence.

Důkaz

- Reflexivita plyne ihned z existence triviálního sledu uu délky 0. Pro každý vrchol $u \in V(G)$ proto platí $u \sim u$.
- Symetrie je zřejmá, neboť ke každému sledu uv v G sestavíme sled vu v G „obrácením" posloupnosti vrcholů a hran (neorientovaný graf). $\forall u, v \in V(G)$ platí $u \sim v \Leftrightarrow v \sim u$.
- Tranzitivita plyne z faktu, že spojením sledu $u, \dots, v$ a $v, \dots, w$ dostaneme opět sled – sled $u, \dots, w$. $\forall u, v, w \in V(G)$ platí $u \sim v \wedge v \sim w \Rightarrow u \sim w$. $\square$

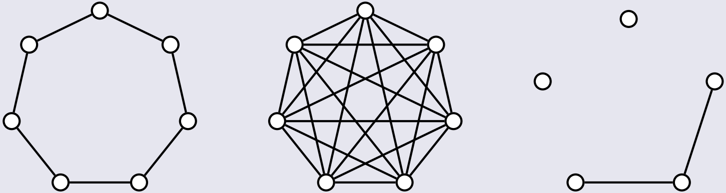
Relace $\sim$ z Lemmatu definuje rozklad na množině $V(G)$.

Nyní můžeme vyslovit následující definici.

Definice

Komponentou (souvislosti) grafu G nazveme každý maximální souvislý podgraf grafu G. (Maximální vzhledem k dosažitelnosti.)

Příklad



Příklad grafů s jednou a více komponentami souvislosti.

Následují alternativní definice souvislosti grafu.

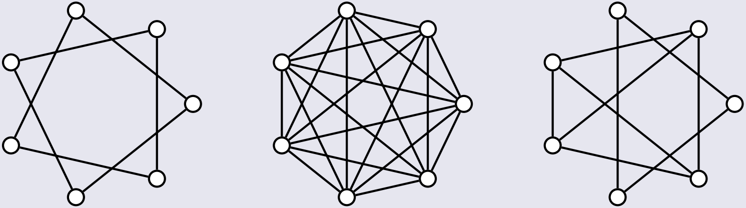
Definice

Řekneme, že graf G je souvislý, pokud je graf G tvořený jedinou komponentou souvislosti.

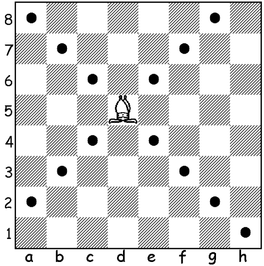
Ekvivalentní definice

Řekneme, že graf G je souvislý, jestliže relace $\sim$ na množině $V(G)$ je úplná.

Příklad



Příklad souvislých grafů a nesouvislého grafu.



Tahy střelce.

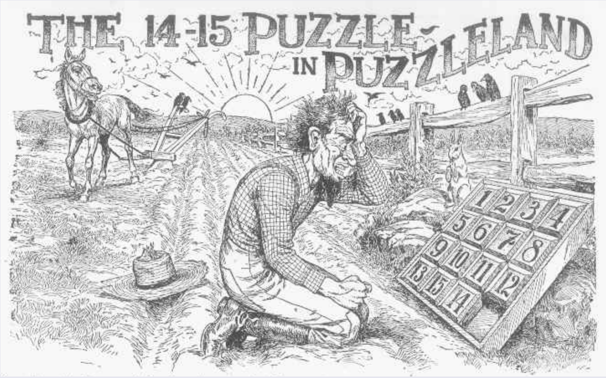
Příklad

Mějme graf S, který bude popisovat možné tahy střelce na šachovnici. (Připomeňme, že střelec se pohybuje diagonálně o libovolný počet polí.) Vrcholy grafu budou políčka šachovnice a hranou spojíme dvě políčka, pokud mezi nimi bude možno táhnout střelcem.

Graf S má 64 vrcholů, mnoho hran a není souvislý.

Příklad

Loydova patnáctka je známý hlavolam. Úkolem je přesouváním čtverečků s čísly 1 až 15 zajistit, aby čísla čtena po řádcích tvořila aritmetickou posloupnost 1, 2 až 15.



Sestavíme stavový graf dané úlohy: vrcholy jsou možná rozmístění čtverečků, hrany spojí vrcholy, jestliže existuje přípustný tah mezi nimi. Dá se ukázat, že takový graf není souvislý, úloha nemá řešení!

Úloha hanojských věží

Hanojské věže a Édouard Lucas (1842 – 1891)

Je dána tři kolíky a sadu osmi disků různých velikostí. Všechny disky jsou seřazeny podle velikosti na prvním kůlu. Úkolem je přemístit všechny disky na jiný kůl, přičemž

- vždy se přesunuje pouze jeden disk,
- nikdy nesmí ležet větší disk na menším.

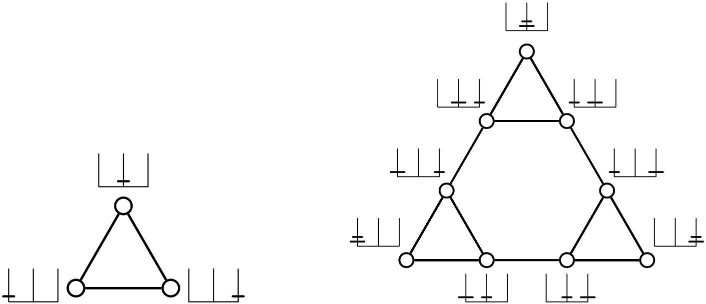
Je to možné? Jaký je nejmenší nutný počet kroků pro přemístění celé věže.

V kapitole o rekurentních rovnicích jsme našli počet tahů pro n disků.

Grafová formulace – stavový graf

Při řešení sestavíme stavový graf:

- vrcholy – každé rozmístění disků na kůly,
- hrany – existuje regulérní tah mezi vrcholy.

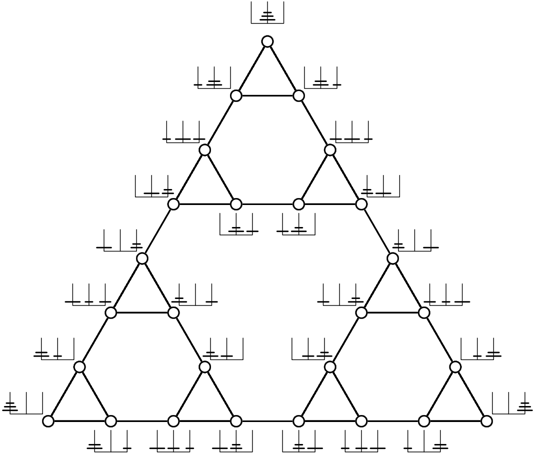


Úloha s jediným diskem a úloha se dvěma disky.

Pro dva disky rozlišíme tři možnosti, kde leží největší disk.

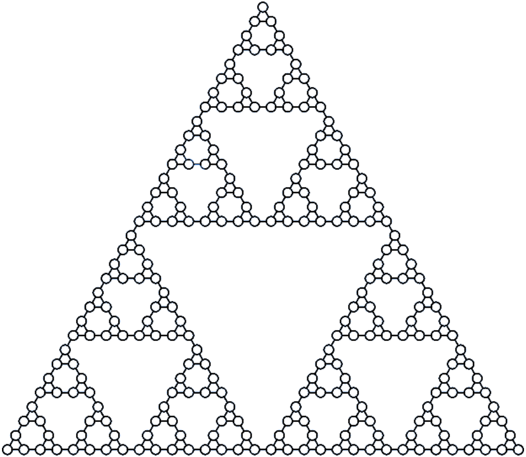
Pro každou z nich zkopírujeme stavový graf pro jeden disk.
Přidáme hrany, pokud můžeme přesunout největší disk.

Grafová formulace úlohy



Podobně pro tři disky. . .

Grafová formulace úlohy



. . . a pro pět disků.

Interpretace výsledků

Máme-li n disků, tak:

- existuje 3^n možných stavů = graf má 3^n možných vrcholů,
- všechny disky na jednom kůlu = "rohové" vrcholy grafu,
- každý legální stav lze dosáhnout,
- přemístění všech disků – vždy nejméně $2^n - 1$ tahů,
- nejrychlejší řešení = nejkratší cesta (další kapitola).

Prohledávání grafu

Pro vytvoření obecného schématu algoritmu pro „procházení“ grafu vystačíme s několika málo datovými stavy a jednou pomocnou strukturou:

Vrchol má stavy ...

- iniciační – na začátku,
- nalezený – jakmile jej přes některou hranu najdeme,
- zpracovaný – jakmile prozkoumáme všechny hrany z něj vycházející.

Hrana má stavy ...

- iniciační – na začátku,
- zpracovaná – jakmile je prozkoumána z jednoho koncového vrcholu.

Úschovna je pomocná datová struktura (posloupnost/množina),

- ukládáme nalezené a zatím nezpracované vrcholy.

Způsob, jak vybíráme vrcholy z úschovny, určuje variantu algoritmu procházení grafu (do hloubky/do šířky). Pro vrcholy a hrany se pak provádí konkrétní programové akce – prohledání a zpracování grafu.

Na začátku:

- vybereme libovolný vrchol,
- vrcholům i hranám přiřadíme iniciační stav.

Algoritmus procházení souvislých komponent (iniciace)

Procházení souvislých komponent grafu – zpracujeme všechny hrany a vrcholy.

```
// na vstupu je graf G
vstup < graf G;
stav(všechny vrcholy a hrany G) = iniciační;
uschovna U = { libovolný vrchol u grafu G };
stav(u) = nalezený;
```

Dále prozkoumáme celý graf. . .

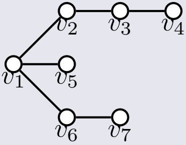
Algoritmus procházení souvislých komponent (pokračování...)

```
// zpracování vybrané komponenty G
while (U je neprázdná) {
   vyber vrchol v a odeber jej z úschovny U: U = U - {v};
   ZPRACUJ(v);
   for (hrany e vycházející z v) {    // pro všechny hrany
      if (stav(e) == iniciační)  ZPRACUJ(e);
      w = druhý vrchol hrany e = vw;  // známe sousedy?
      if (stav(w) == iniciační) {
         stav(w) = nalezený;
         přidej vrchol w do úschovny: U = U + {w};
      }
      stav(e) = zpracovaná;
   }
   stav(v) = zpracovaný;
   // případný přechod na další komponentu G
   if (U je prázdná && G má další vrcholy)
      uschovna U = {vrchol u_1 z další komponenty G};
}
```

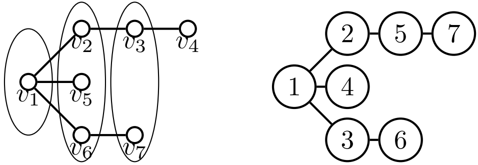
Různými implementacemi *úschovny* dostaneme různé algoritmy

- *Procházení „do hloubky"* – úschovnu `U` implementujeme jako zásobník,
  tj. dále prohledáváme od posledních nalezených vrcholů.
- *Procházení „do šířky"* – úschovna `U` implementujeme jako frontu,
  tj. dále prohledáváme od prvních nalezených vrcholů.
- *Dijkstrův algoritmus* pro nejkratší cestu – z úschovny vybíráme vždy vrchol nejbližší k počátečnímu `v_0`;
  (jako prohledávání do šířky, kdy hrany mají „stejné délky").

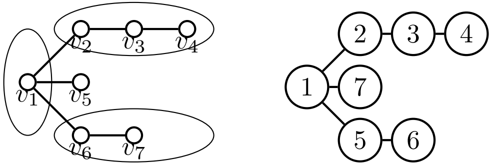
Příklad



Prozkoumejte graf postupem do hloubky i do šířky (od vrcholu v_1).



Prohledávání do šířky (od vrcholu v_1).



Prohledávání do hloubky (od vrcholu v_1).

Poznámka

Symbolem $O(g(n))$ rozumíme takovou množinu funkcí $f(n)$, pro které existují kladné konstanty c a n_0 tak, $\forall n > n_0$ platí $0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$.

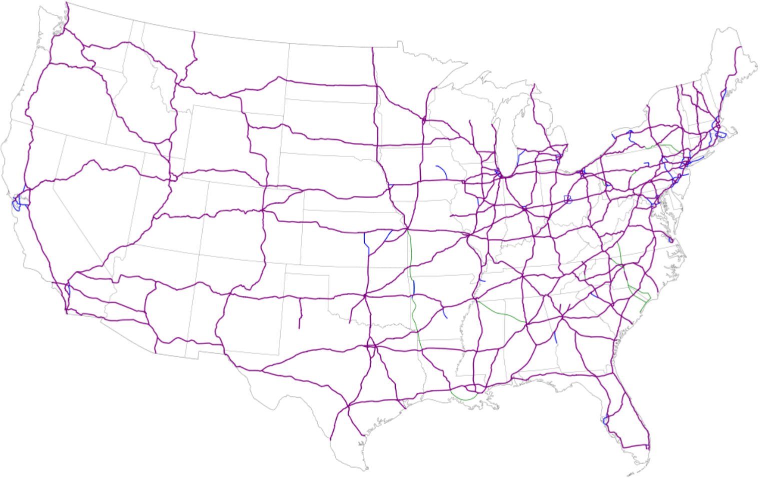
Uvedený algoritmus je přehledný a současně rychlý. Počet kroků algoritmu je úměrný počtu vrcholů a hran daného grafu, složitost algoritmu je $O(n + m)$, kde n udává počet vrcholů a m počet hran daného grafu.

Otázky

Jak pomocí uvedeného algoritmu vypsat všechny hrany daného grafu?
Jak pomocí uvedeného algoritmu zjistíme, zda je graf G souvislý?
Jak pomocí uvedeného algoritmu najít a označit všechny komponenty grafu G?

Vyšší stupně souvislosti

V praxi nás může zajímat nejen, jestli existuje spojení (cesta) mezi vrcholy grafu), ale také jestli bude existovat spojení v případě lokálních výpadků – odolnost a redundance (datová síť, železniční a silniční síť).



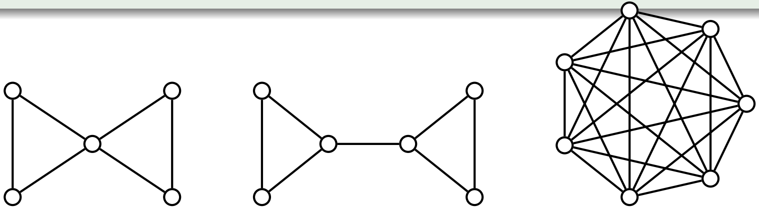
Eisenhowerův systém dálnic v USA.

Definice

Graf G je hranově k-souvislý, pokud $k \geq 1$ a po odebrání libovolných $k-1$ hran z G zůstane výsledný faktor souvislý.
Stupeň hranové souvislosti grafu G je takové největší číslo k, že graf G je hranově k-souvislý. Označujeme jej $\kappa'(G)$.

Definice

Graf G je vrcholově k-souvislý, pokud $|V(G)| > k \geq 1$ a po odebrání libovolných $k-1$ vrcholů z grafu G zůstane výsledný indukovaný podgraf souvislý.
Stupeň vrcholové souvislosti grafu G je takové největší číslo k, že graf G je vrcholově k-souvislý. Označujeme jej $\kappa(G)$.



Grafy s různými stupni souvislosti.

Řekneme, že cesty P a P' jsou:

- hranově disjunktní, jestliže nemají společnou hranu,
- interně disjunktní, jestliže nemají společný vnitřní vrchol.

Věta (Mengerovy věty)

Graf G je hranově k-souvislý právě tehdy, když mezi libovolnými dvěma vrcholy existuje alespoň k po dvou hranově disjunktních cest (vrcholy mohou být sdílené).
Graf G je vrcholově k-souvislý právě tehdy, když mezi libovolnými dvěma vrcholy existuje alespoň k po dvou interně disjunktních cest (koncové vrcholy jsou společné).

Důkaz Důkaz uvedeme v poslední kapitole. □

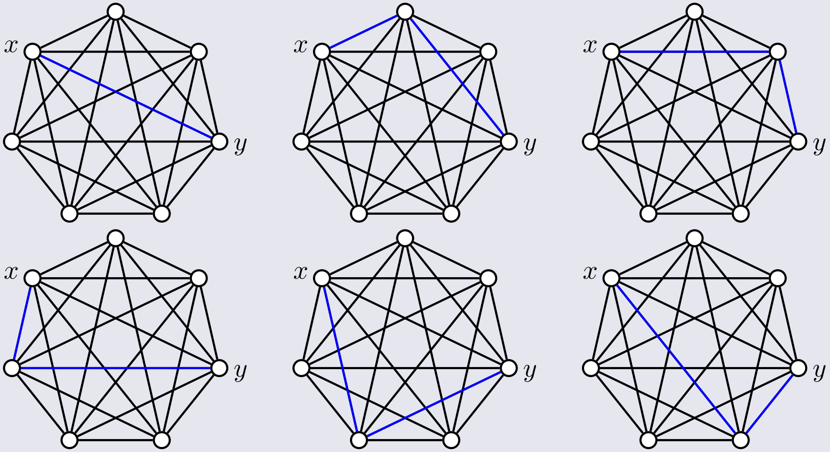
Bez důkazu zmíníme ještě jedno důležité tvrzení:

Věta

V libovolném grafu G je vrcholový stupeň souvislosti nejvýše roven hranovému stupni souvislosti a ten je nejvýše roven nejmenšímu stupni $\delta(G)$. Tj. platí $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.

Příklad

Kompletní graf K_n je hranově i vrcholově $(n-1)$-souvislý.



Různé hranově/interně disjunktní cesty mezi vrcholy x a y v grafu K_7.

Příště

Kapitola Eulerovské a hamiltonovské grafy

- motivace
- eulerovské grafy
- hamiltonovské grafy