Diskrétní matematika

Petr Kovář
petr.kovar@vsb.cz

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

zimní semestr 2022/2023
DiM 470-2301/01, 470-2301/03*, 470-2301/05

O tomto souboru

Tento soubor je zamýšlen především jako pomůcka pro přednášejícího. Řadu důležitých informací v souboru nenajdete, protože přednášející je říká, ukazuje, případně maluje na tabuli. Přednášky jsou na webu k dispozici, aby studenti mohli snadno dohledat probíraná témata z přednášek, které zameškali.

Pro samostatné studium doporučuji skripta:

- M. Kubesa: Základy diskrétní matematiky, výukový text
- P. Kovář: Úvod do teorie grafů, výukový text

Pro přípravu ke zkoušce a písemkám doporučuji cvičebnici:

- P. Kovář: Cvičení z diskrétní matematiky, sbírka příkladů

Vše na http://homel.vsb.cz/~kov16/predmety_dm.php

Část II Úvod do Teorie Grafů

Kapitola Pojem grafu

- motivace
- definice grafu
- orientované grafy a multigrafy
- stupeň vrcholu v grafu
- podgrafy a izomorfismus
- implementace grafů

Pojem grafu

Teorie grafů je jednou z mladších disciplin matematiky

- L. Euler: Problém mostů města Královce 1736
- První monografie 1936

Populární problémy teorie grafů

- problém čtyř barev
- nejkratší cesta v grafu
- největší tok v grafu (v síti)

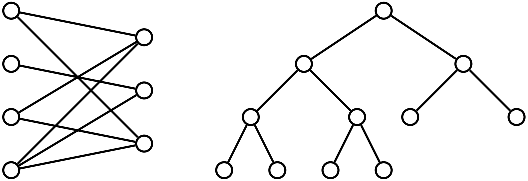
Motivace

Grafy tvoří jednu z nejdůležitějších disciplin diskrétní matematiky

- pomocí grafů můžeme dobře popsat praktické problémy
- intuitivně pochopitelné
- snadná implementace v počítači

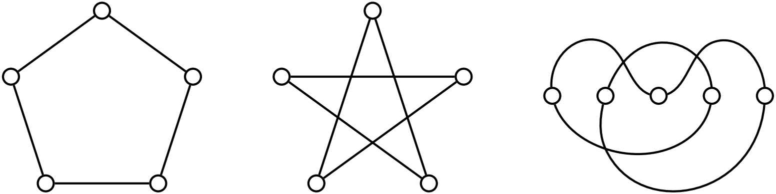
Neformálně: graf se skládá z

- vrcholů (uzlů) – „puntíky" body v obrázku
- hran – „spojnice" v obrázku



Ukázky grafů.

Různé obrázky (nakreslení grafu) mohou reprezentovat tentýž graf.



Různá nakreslení téhož grafu.

Na první nemusí být snadné poznat, zda dva různé obrázky (dvě různá nakreslení) odpovídají stejnému grafu nebo ne.

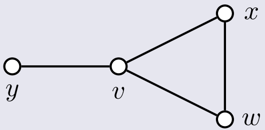
Definice grafu

Definice

Graf G (*jednoduchý* graf, *obyčejný* graf) je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je neprázdná množina *vrcholů* a E je množina *hran* – množina (některých) dvouprvkových podmnožin množiny V.

Příklad

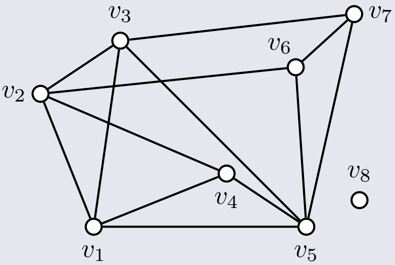
Graf $G = (V, E)$, kde
$V = \{v, w, x, y\}$ a $E = \{\{v, w\}, \{v, x\}, \{v, y\}, \{w, x\}\}$:



Prvky množiny V nazýváme vrcholy, značíme je malými písmeny u, v, ...
Prvky množiny E nazýváme hrany. Hrana mezi vrcholy u a v je dvouprvková podmnožiny $\{u, v\}$, značíme ji zkráceně uv.

Příklad

Graf $G = (V, E)$, kde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ a $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_6, v_3v_5, v_3v_7, v_4v_5, v_5v_6, v_5v_7, v_6v_7\}$.



Máme-li dán graf G, rozumíme symbolem $V(G)$ množinu vrcholů grafu G a symbolem $E(G)$ množinu hran grafu G.

Poznámka

Graf $G = (V, E)$ můžeme chápat jako speciální relaci E na množině V, kde E je *ireflexivní* a *symetrická*.

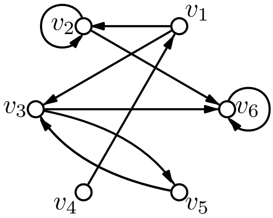
Orientované grafy a multigrafy

Pokud graf reprezentuje dopravní síť, silniční síť nebo jiný produktovod, může být užitečné použít orientaci hrany. Rozlišujeme výchozí a koncový vrchol. Orientovaná hrana *uv* není totožná s hranou *vu*.

Definice

Orientovaným grafem rozumíme uspořádanou dvojici $G = (V, E)$, kde V je neprázdná množina vrcholů a množina orientovaných hran je $E \subseteq V \times V$.

V nakreslení znázorňujeme orientované hrany šipkami.



Příklad orientovaného grafu.

Poznámka

Jednoduchý orientovaný graf $G = (V, E)$ (bez smyček) můžeme chápat jako ireflexivní relaci na množině V.

Poznámka

Orientovaný graf $G = (V, E)$, který může obsahovat smyčky, můžeme chápat jako (obecnou) relaci na množině V.

Poznámka

Ještě obecnější pojem než orientovaný graf, je multigraf. Povolíme vícenásobné hrany a smyčky.

Orientovaným grafům se budeme věnovat v poslední kapitole...

Základní třídy grafů

Grafy můžeme zadat

- množinami V a E
- obrázkem
- jménem a parametrem (parametry)

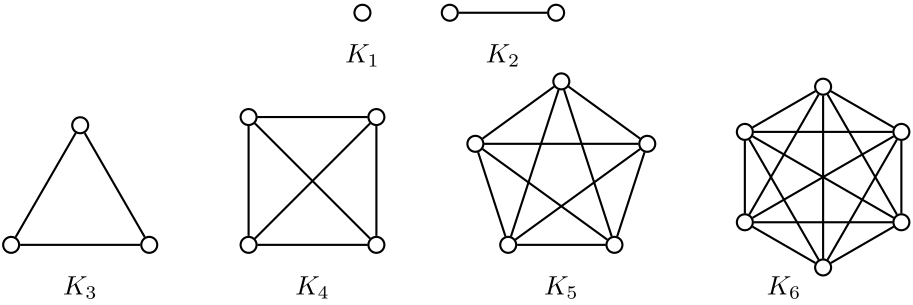
Některé typy grafů se často vyskytují a dokonce mají své jméno:

- cesty
- stromy
- housenky
- lízátka
- knihy
- ...

Úplný (kompletní) graf K_n

Graf na n vrcholech ($n \in \mathbb{N}$), který obsahuje všech $\binom{n}{2}$ hran se nazývá úplný nebo také kompletní graf a značí se K_n.

$$K_n = (V, E): \quad V = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad E = \{ij : i, j = 1, 2, \ldots n \wedge i \neq j\}$$

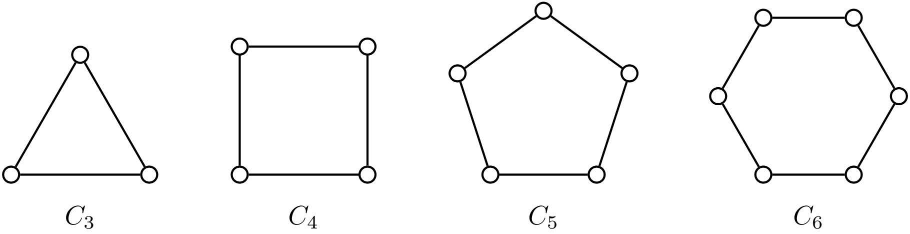


Triviální graf a kompletní grafy.

Cyklus (kružnice) C_n

Graf na n vrcholech ($n \geq 3$), které jsou spojeny po řadě n hranami tak, že každý vrchol je spojen s následujícím vrcholem a poslední vrchol je navíc spojen s prvním vrcholem, se nazývá cyklus na n vrcholech a značí se C_n. Číslo n je délka cyklu C_n.

$$C_n = (V, E): \quad V = \{1, 2, \dots, n\}, \quad E = \{i(i{+}1) : i = 1, 2, \dots n{-}1\} \cup \{1n\}$$



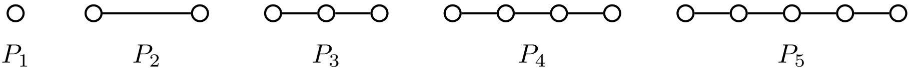
Cykly C_3, C_4, C_5 a C_6.

Cyklu délky tři říkáme trojúhelník.

Cesta P_n

Graf na n vrcholech, které jsou spojeny po řadě $n-1$ hranami se nazývá cesta a značí se P_n.

$$P_n = (V, E): \quad V = \{1, 2, \dots, n\}, \quad E = \{i(i+1) \colon i = 1, 2, \dots n-1\}$$



Cesty P_1, P_2, P_3, P_4 a P_5.

Pozor na možné jiné značení cest

někdy index = počet hran

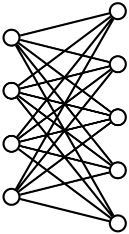
V některých knihách se používá termín had.

Úplný (kompletní) bipartitní graf $K_{m,n}$

Graf, který má vrcholovou množinu rozdělenu na dvě neprázdné disjunktní podmnožiny M a N ($|M| = m$, $|N| = n$) a který obsahuje všech $m \cdot n$ hran uv takových, že $u \in M$ a $v \in N$, nazýváme kompletní (úplný) bipartitní graf a značíme jej $K_{m,n}$.

$$K_{m,n} = (M \cup N, E): \quad M = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}, \quad N = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\},$$

$$M, N \neq \emptyset, \quad M \cap N = \emptyset, \quad E = \{u_i v_j : i = 1, 2, \ldots, m \wedge j = 1, 2, \ldots n\}.$$



Graf $K_{4,5}$.

Stupeň vrcholu v grafu

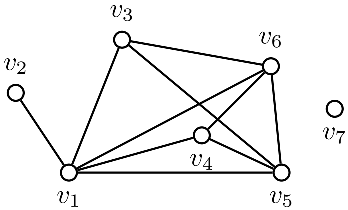
Máme-li hranu uv, pak vrcholy u a v nazýváme koncové vrcholy hrany uv.

Také říkáme, že u a v jsou incidentní s hranou uv (tedy $u \in \{u, v\}$).

Dva různé vrcholy, které jsou koncovými vrcholy téže hrany nazýváme sousední. Pokud taková hrana neexistuje, nazýváme vrcholy nesousední nebo také nezávislé.

Definice

Stupeň vrcholu v grafu G je počet hran, se kterými je daný vrchol incidentní.
Stupeň vrcholu x v grafu G značíme $\deg(x)$ (nebo také $\deg_G(x)$).



Graf se stupni vrcholů po řadě 5, 1, 3, 3, 4, 4 a 0.

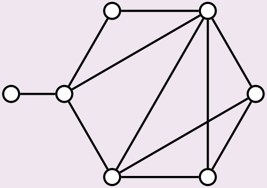
Věta (Princip sudosti)

Součet stupňů v grafu je vždy sudý a je roven dvojnásobku počtu hran.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2|E(G)|$$

Důkaz Metodou dvojího počítání všech koncových vrcholů hran. Levá strana: každý stupeň vyjadřuje, kolika hran je daný vrchol koncovým vrcholem, započítáme všechny. Naproti tomu každá hrana má právě dva koncové vrcholy, proto koncových vrcholů je $2|E|$ (pravá strana výrazu). Proto je součet stupňů vždy sudý a je roven dvojnásobku počtu hran. $\square$

Otázka



Kolik hran má graf se stupni vrcholů $5, 4, 4, 3, 3, 2, 1$?

Příklad

Kolik hran má graf G, který má třicet vrcholů stupně 5 a pět vrcholů stupně 4?

Podle principu sudosti víme, že dvojnásobek počtu hran je roven součtu stupňů.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 30 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 150 + 20 = 170$$

Je zřejmé, že graf G má $170/2 = 85$ hran. Existuje? Ukážeme později.

Příklad

Kolik hran má graf G, který má pět vrcholů stupně 5 a třicet vrcholů stupně 4?

Postupujeme stejně...

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 5 \cdot 5 + 30 \cdot 4 = 145$$

Takový graf podle principu sudosti neexistuje!

Příklad

Devět kamarádů si na Vánoce dalo dárky. Každý dal dárky třem svým kamarádům. Ukažte, že není možné, aby každý dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal. Návod: ukažte, že neexistuje graf, který by danou situaci modeloval.

Sestavíme graf: vrcholy=kamarádi, hrany=vyměněné dárky.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 9 \cdot 3 = 27$$

Protože neexistuje graf, který by danou situaci modeloval, tak úloha nemá řešení.

Neexistuje taková výměna dárků, aby každý z devíti kamarádů dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal.

Definice

Mějme graf G s vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Posloupnost stupňů vrcholů $(\deg(v_1), \deg(v_2), \ldots, \deg(v_n))$ nazýváme stupňovou posloupností grafu G.

Ne každá posloupnost je stupňovou posloupností nějakého grafu. Jak poznáme?

Věta Havlova–Hakimiho

Nechť $(d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n)$ je posloupnost nezáporných celých čísel. Pak existuje netriviální graf s n vrcholy se stupňovou posloupností

$$D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

$\Leftrightarrow$ existuje graf s $n-1$ vrcholy se stupňovou posloupností

$$D' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \ldots, d_n).$$

Protože se zajímáme jen o konečné grafy, umíme rekurzivně o každé posloupnosti v konečném čase rozhodnout, zda je stupňovou posloupností nějakého grafu. Navíc budeme umět příklad takového grafu sestrojit (nemusí být jediný!).

Příklad

Existuje graf se stupňovou posloupností $(3, 3, 3, 1, 1)$?
Neexistuje dle Principu sudosti.

Příklad

Existuje graf se stupňovou posloupností $(3, 3, 3, 1)$?
Ne, což ukážeme užitím Věty Havla-Hakimiho.
Ze stupňové posloupnosti $(3, 3, 3, 1)$ dostaneme

$$(3, 3, 3, 1) \overset{HH}{\sim} (2, 2, 0) \overset{HH}{\sim} (1, -1)$$

což evidentně není stupňová posloupnost.

Příklad

Existuje graf se stupňovou posloupností $(6, 4, 4, 1, 1)$?
Takový graf neexistuje, což je zřejmé.
Pokud nevíte proč, ověřte užitím Věty Havla-Hakimiho.

Příklad

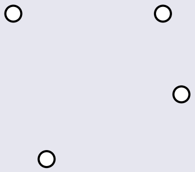
Existuje graf se stupňovou posloupností $(6,5,4,3,3,2,1)$?

Ano, ukážeme užitím Věty H-H a navíc graf zkonstruujeme.

Ze stupňové posloupnosti $(6,5,4,3,3,2,1)$ dostaneme

$$(6,5,4,3,3,2,1) \overset{HH}{\sim} (4,3,2,2,1,0) \overset{HH}{\sim} (2,1,1,0,0) \overset{HH}{\sim} (0,0,0,0).$$

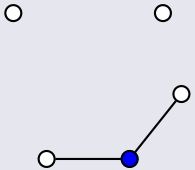
Konstrukce grafu: přidáváním vrcholů.



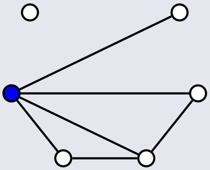
Nejprve nakreslíme graf se stupňovou posloupností $(0,0,0,0)$.

pokračování ...

Dále přidáme vrchol stupně 2 a spojíme jej se dvěma vrcholy stupně 0 (vzniknou vrcholy stupně 1).



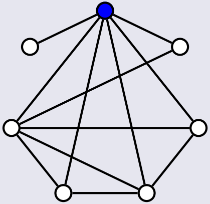
Dostaneme graf se stupňovou posloupností $(2, 1, 1, 0, 0)$.



Abychom dostali graf se stupňovou posloupností $(4, 3, 2, 2, 1, 0)$, přidáme vrchol stupně 4 a spojíme jej s vrcholy stupňů 2, 1, 1 a 0.

pokračování . . .

Nakonec přidáme vrchol stupně 6 a spojíme jej hranami se všemi zbývajícími vrcholy.



Dostaneme graf se stupňovou posloupností $(6, 5, 4, 3, 3, 2, 1)$.

Shrnutí: pomocí věty Havla-Hakimiho umíme

- rozhodnout, zda daná konečná posloupnost přirozených čísel je stupňovou posloupností,
- pokud ano, najít příklad takového grafu.

Definice

Největší stupeň vrcholů v grafu G označujeme $\Delta(G)$.
Nejmenší stupeň označujeme $\delta(G)$.

Otázky

- Je každá nerostoucí posloupnost přirozených čísel grafová?
- Jak poznáme, zda posloupnost je stupňovou posloupností nějakého grafu?
- Je graf určen stupňovou posloupností jednoznačně?
- Kolik existuje grafů s danou stupňovou posloupností?

Podgrafy

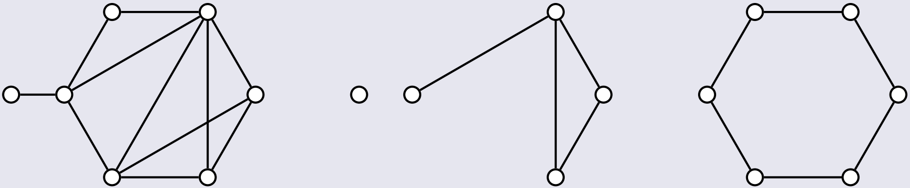
Často uvažujeme případy, kdy z daného grafu vynecháme některé vrcholy (a hrany s nimi incidentní), nebo vynecháme hrany, případně obojí.

Definice

Graf H nazveme podgrafem grafu G, jestliže $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$. Píšeme $H \subseteq G$.

Všimněte si: vynecháme-li z G některý vrchol, musíme současně vynechat i všechny hrany s ním incidentní. Definice je v tomto smyslu korektní, neboť pokud bychom vynechali jen vrcholy a nikoli hrany, H by nebyl graf.

Příklad

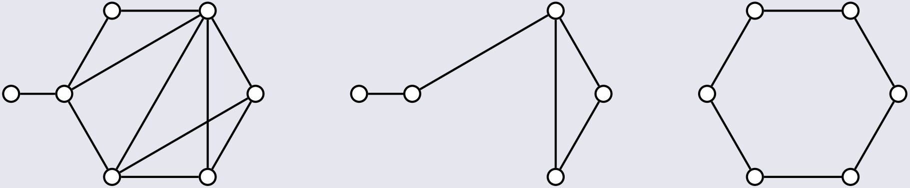


Graf G a jeho podgrafy H_1 a H_2.

Indukovaný podgraf

Podgraf I grafu G nazveme indukovaným podgrafem grafu G, jestliže $E(I)$ obsahuje všechny hrany grafu G, které jsou incidentní s vrcholy z $V(I)$. (Vynecháme pouze hrany, které byli incidentní s vynechanými vrcholy.)

Příklad



Graf G a podgrafy H_1 (indukovaný) a H_2 (není indukovaný).

Faktor grafu

Podgraf F grafu G nazveme faktorem grafu G, jestliže $V(F) = V(G)$.

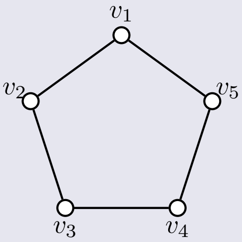
Isomorfismus grafů

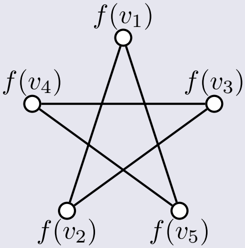
Definice

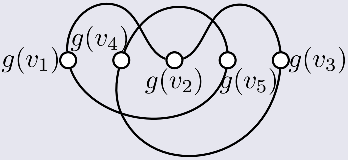
Isomorfismus grafů G a H je bijektivní zobrazení $f : V(G) \to V(H)$, pro které platí, že každé dva vrcholy u, v v grafu G jsou sousední právě tehdy, když jsou sousední jejich obrazy $f(u), f(v)$ v grafu H.

Stručně $\forall u, v \in V(G) : uv \in E(G) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(H)$.

Příklad







Isomorfní grafy.

Fakt

Isomorfní grafy G a H mají

- stejný počet vrcholů
- stejný počet hran
- stejný nejvyšší stupeň $\Delta(G) = \Delta(H)$
- stejný nejnižší stupeň $\delta(G) = \delta(H)$
- stejnou stupňovou posloupnost
- každý podgraf grafu G musí být isomorfní s podgrafem grafu H a naopak
- ...

Pokud je bijekce f isomorfismem, musí zobrazit na sebe vrcholy stejných stupňů, tj.

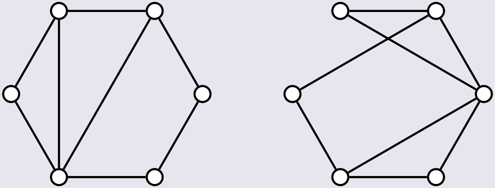
$$\deg_G(v) = \deg_H(f(v)).$$

Pozor! Opačná implikace neplatí!

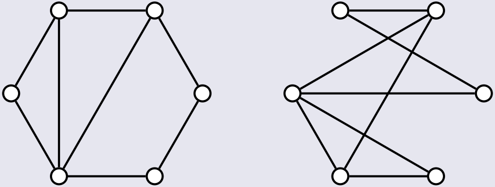
Nestačí porovnat stupňové posloupnosti!

Příklad

Jsou následující dva grafy se stupňovou posloupností $(4, 3, 3, 2, 2, 2)$ isomorfní?

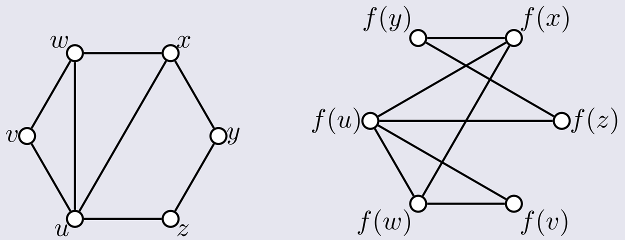


Jsou tyto dva grafy isomorfní?



Jsou tyto dva grafy isomorfní?

pokračování. . .



Isomorfismus f mezi danými dvěma grafy.

Poznámka

Na příkladech jsme si ukázali některé postupy, jak poznat zda grafy jsou nebo nejsou isomorfní.

Žádný „rozumný" univerzální postup pro nalezení isomorfismu není znám!

Jediný (známý) univerzální postup pro nalezení či vyvrácení isomorfismu mezi dvěma grafy je typu *vyzkoušejte všechny* bijekce mezi vrcholy těchto grafů (takových bijekcí může být až n!).

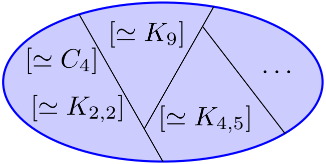
Věta

Relace „být isomorfní“ $\simeq$ je relací ekvivalence na třídě všech grafů.

Důkaz Relace $\simeq$ je

- reflexivní, protože graf je isomorfní sám sobě identickým zobrazením,
- symetrická, neboť k isomorfismu (bijekci) f existuje (jednoznačně) inverzní zobrazení f^{-1},
- tranzitivní, neboť skládáním isomorfismů (zobrazení) dostaneme opět isomorfismus (zobrazení). $\square$

Pokud mluvíme o nějakém *grafu*, myslíme tím obvykle jeho celou třídu isomorfismu, nezáleží na konkrétní reprezentaci, nakreslení či pojmenování grafu.



Třídy grafů.

O implementaci grafů

Vrcholy grafu G označíme nezápornými celými čísly $0, 1, \ldots, n-1$.
Nejběžnější implementace grafů v počítači jsou:

Matice sousednosti

Matice sousednosti grafu G je čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu n, ve které je prvek

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{je-li } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Lze ji uložit do dvourozměrného pole `a[][]` kde `a[i][j]=1` pokud graf obsahuje hranu ij, jinak `a[i][j]=0`.

Součet čísel v i-tém řádku/sloupci matice je roven stupni vrcholu i.

Výhody:

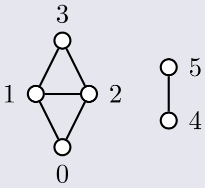
- snadno ověříme, zda se hrana ij v grafu nachází nebo ne,
- snadno také nějakou hranu ij do grafu přidáme/odebereme.

Nevýhody:

- matice sousednosti je rozsáhlá, zabírá mnoho paměti i pro řídké grafy.

Příklad

Sestavte matici sousednosti grafu na obrázku.



Matice sousednosti je

$$A = \begin{array}{c c} v\backslash v & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Incidenční matice

Incidenční matice B grafu G je obdélníková matice s n řádky a $m = |E(G)|$ sloupci. Každému vrcholu grafu G odpovídá jeden řádek matice B a každé hraně grafu G jeden sloupec matice B.

Prvek b_{ij} matice B nabývá hodnoty 1, když vrchol i je incidentní s hranou e_j, v opačném případě je $b_{ij} = 0$.

Součet čísel v každém sloupci je 2 a součet čísel v i-tém řádku je roven stupni vrcholu i.

Výhody:

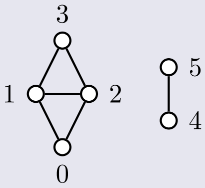
- snadno najdeme koncové vrcholy nějaké hrany,
- snadno také nějakou hranu ij v grafu „přepojíme".

Nevýhody:

- přidání/odebrání hrany z incidenční matice grafu je komplikované,
- pro velké grafy by incidenční matice byla velmi rozsáhlá a poměrně řídká.

Příklad

Sestavte incidenční matici grafu na obrázku.



Incidenční matice grafu G je

$$B = \begin{array}{c} v\backslash e \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 01 & 02 & 12 & 13 & 23 & 45 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Seznamů sousedních vrcholů

Pro každý vrchol $i = 0, 1, \dots, n-1$ grafu G vytvoříme seznam (pole) vrcholů, například `sous[i][]`, které jsou s vrcholem i sousední.

Každé pole bude mít $\deg(i)$ položek, kde $\deg(i)$ je stupeň vrcholu i, který je uložen v poli `deg[]`.

Prvky `sous[i][0]`, `sous[i][1]`, `...`, `sous[i][deg[i]-1]` obsahují vrcholy (nebo jejich indexy) sousední s vrcholem i.

Příklad

`deg[] = [2, 3, 3, 2, 1, 1]`,

$$\begin{aligned} \texttt{sous}[0][] &= [1, 2], \\ \texttt{sous}[1][] &= [0, 2, 3], \\ \texttt{sous}[2][] &= [0, 1, 3], \\ \texttt{sous}[3][] &= [1, 2], \\ \texttt{sous}[4][] &= [5], \\ \texttt{sous}[5][] &= [4]. \end{aligned}$$

Je třeba dbát na symetrii hran *ij* a *ji*!

Výhody:

- vhodné pro grafy s malým počtem hran, snadno určíme $\deg(v)$,

Nevýhody:

- náročná úprava takové struktury v průběhu algoritmu,
- časová náročnost vyhledání konkrétní hrany.

Uvedené reprezentace vhodné i pro orientované grafy.
Pro multigrafy se hodí zadání incidenční maticí, případně výčtem sousedů.

Složitější datové struktury pro ohodnocené grafy (přiřadíme ohodnocení hran/vrcholů).
Můžeme použít další pole, strukturované datové typy. . .

Příště

Kapitola 2. Souvislost grafu

- motivace
- spojení mezi vrcholy, komponenty grafu
- prohledávání grafu
- vyšší stupně souvislosti
- Eulerovské grafy „jedním tahem"