Diskrétní matematika

Petr Kovář
petr.kovar@vsb.cz

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

zimní semestr 2022/2023
DiM 470-2301/01, 470-2301/03*, 470-2301/05

O tomto souboru

Tento soubor je zamýšlen především jako pomůcka pro přednášejícího. Řadu důležitých informací v souboru nenajdete, protože přednášející je říká, ukazuje, případně maluje na tabuli. Přednášky jsou na webu k dispozici, aby studenti mohli snadno dohledat probíraná témata z přednášek, které zameškali.

Pro samostatné studium doporučuji skripta:

- M. Kubesa: Základy diskrétní matematiky, výukový text
- P. Kovář: Úvod do teorie grafů, výukový text

Pro přípravu ke zkoušce a písemkám doporučuji cvičebnici:

- P. Kovář: Cvičení z diskrétní matematiky, sbírka příkladů

Vše na `http://homel.vsb.cz/~kov16/predmety_dm.php`

Přehled přednášky

Kapitola 5. Rekurentně zadané posloupnosti

- motivace
- rekurentně zadané posloupnosti
- hlavní úloha
- metody řešení
- příklady

5. Rekurentně zadané posloupnosti

V minulé kapitole jsme připomněli, že ne vždy můžeme počty jistých výběrů vyjádřit pomocí jednoduchých vztahů probraných v Kapitole 2.
Dnes ukážeme několik typických situací, které se objeví při řešení úloh pomocí rekurentních algoritmů.
Ukážeme, jak můžeme složitost některých vybraných algoritmů vyčíslit.

Typické příklady rekurentních algoritmů či postupů

- merge sort
- úlohy dynamického programování
- počty uzávorkování $n+1$ činitelů pomocí n závorek
- počty „pěstovaných kořenových stromů“ v kapitole UTG 4

5.1. Motivační příklady

Velmi známý je klasický případ tzv. Fibonacciho posloupnosti.

Fibonacciho posloupnost

Na ostrově byl vysazen pár malých králíků. Králíci se rozmnožují až od věku 2 měsíců, potom však můžeme říci, že každý měsíc vychovají další pár králíků. Jaký je počet f_n párů králíků po n měsících?

Je evidentní, že $f_1 = f_2 = 1$.
Pro $n \geq 3$ je počet párů určen

- počtem v předchozím měsíci f_{n-1},
- je potřeba připočítat počet párů starých dva měsíce f_{n-2}, kteří nyní dosáhli dospělosti a mají mladé.

Celkem máme $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ párů, jestliže neuvažujeme umírání populace.

Řešení, tj. vztah pro f_n odvodíme na konci přednášky.

Hanojské věže

Hanojské věže, autorem je Édouard Lucas (1842 – 1891)

Příklad

Máme tři kolíky a sadu disků různých velikostí. Všechny disky jsou seřazeny podle velikosti na prvním kůlu. Úkolem je přemístit všechny disky na jiný kůl, přičemž

- vždy se přesunuje pouze jeden disk,
- nikdy nesmí ležet větší disk na menším.

Jaký je (nejmenší) nutný počet kroků H_n pro přemístění celé věže s n disky?

Hanojské věže

Abychom přemístili největší disk, musí být $n-1$ disků přemístěno na jiný kůl H_{n-1} tahy.

Celkový počet tahů H_n rozdělíme na tři části.

- Nejprve H_{n-1} tahy přemístíme $n-1$ menších disků na třetí kůl,
- pak jedním tahem přemístíme největší disk na krajní kůl,
- nakonec H_{n-1} tahy přemístíme $n-1$ menších disků na největší disk.

Celkový počet tahů je dán rekurentním vztahem

$$H_n = 2H_{n-1} + 1,$$

přičemž je jasné, že $H_1 = 1$.

Řešení, tj. vztah pro H_n odvodíme na konci přednášky.

Bitové řetězce bez sousedních nul

Příklad

Kolik existuje bitových řetězců délky n, které neobsahují sousední nuly? (využití u čárových kódů)

Označme a_n počet hledaných bitových řetězců s n bity.
Rozlišíme, zda řetězec n bitů končí 0 nebo 1 (předpokládejme, že $n \geq 3$).

- pokud řetězec končí 1, tak takových řetězců je právě a_{n-1}, kdy jsme na konec přidali bit 1,
- pokud řetězec končí 0, tak předposlední bit musí být 1 a takových řetězců je právě a_{n-2}, kdy jsme na konec přidali dva bity 10.

Jiná možnost není, proto celkový počet řetězců délky n, které neobsahují sousední nuly, je

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Zbývá si uvědomit, že $a_1 = 2$, $a_2 = 4 - 1 = 3$.

Na konci přednášky odvodíme vztah pro a_n.
Pozor: a_n podobné, ale jiné než Fibonacciho posloupnost.

Klíčová slova se sudým počtem nul

Příklad

Počítačový systém pracuje s kódovými slovy sestavenými z cifer 0, 1, ..., 9. Platné kódové slovo obsahuje sudý počet cifer 0. Kolik takových kódových slov délky n existuje?

Označme x_n počet hledaných kódových slov s n ciframi.
Rozlišíme, zda kódové slovo s n ciframi končí 0 nebo ne (předpokládáme, že $n \geq 2$).

- kódových slov, která nekončí 0, je právě $9x_{n-1}$, kdy jsme na konec některého z x_{n-1} kódových slov přidali cifru 1,2,..., 9,
- kódové slov, která končí 0, je právě tolik, kolik je chybných kódových slov x_{n-1}.

Jiná možnost není, proto celkový počet kódových slov délky n, které obsahují sudý počet nul, je

$$x_n = 9x_{n-1} + (10^{n-1} - x_{n-1}) = 8x_{n-1} + 10^{n-1}.$$

Zbývá si uvědomit, že $x_1 = 9$. Hledáme vztah x_n pro n-tý člen.

Počty uzávorkování $n+1$ činitelů pomocí n závorek

Příklad

Máme výraz složený z $n+1$ činitelů, uzávorkujeme pomocí n párů závorek. Kolik existuje různých způsobů uzávorkování C_n?

$C_0 = 1$, neboť x_1 je jediný způsob.
$C_1 = 1$, neboť $(x_1 \oplus x_2)$ je jediný způsob.
$C_2 = 2$, neboť $((x_1 \oplus x_2) \oplus x_3)$, $(x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3))$ jsou dva způsoby.
$C_3 = 5$, neboť 5 způsobů $(((x_1 \oplus x_2) \oplus x_3) \oplus x_4)$, $((x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)) \oplus x_4)$, $((x_1 \oplus x_2) \oplus (x_3 \oplus x_4))$, $(x_1 \oplus ((x_2 \oplus x_3) \oplus x_4))$, $(x_1 \oplus (x_2 \oplus (x_3 \oplus x_4)))$.

Obecně ve vnější závorce je vždy právě jeden operátor „$\oplus$“. Všimneme si, že výraz se skládá z operace dvou menších výrazů, kterých můžeme najít n různých podle počtu členů nalevo od operátoru ve vnější závorce.

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$$

Rekurentní posloupnost $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$ se objevuje v řadě praktických problému, tzv. Catalanova čísla.

5.2. Rekurentně zadané posloupnosti

Opakování:

Posloupnost můžeme zadat

- výčtem několika prvních prvků: $1, 3, 7, 15, 31, \ldots$
- rekurentně: $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $a_0 = 1$
- vztahem pro n-tý člen: $a_n = 2^n - 1$

Nyní se zabýváme rekurentně zadanými posloupnostmi, kdy další člen se určí výpočtem na základě předcházejících členů.

Hlavní úloha

Najít vztah pro n-tý člen.

- pokud existuje,
- pokud to lze
- a pokud to umíme.

Lineární homogenní rekurentní rovnice řádu k s konstantními koeficienty

Lineární homogenní rekurentní rovnice řádu k s konstantními koeficienty je rekurentně zadaná posloupnost tvaru

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ jsou reálná čísla, $c_k \neq 0$.

Rozeberme definici rekurentní rovnice

- je lineární, protože se jedná o lineární kombinaci předchozích členů,
- je homogenní, protože **nemá** člen, který by nebyl násobkem a_i,
- je řádu k, protože a_n je vyjádřen pomocí nejvýše k předchozích členů,
- je s konstantními koeficienty, neboť každý koeficient u a_i je konstanta, nikoli funkcí n.

Pro jednoznačné určení posloupnosti dané rekurencí řádu k musíme *zadat k prvních členů*.

Fibonacciho posloupnost

Fibonacciho posloupnost $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ je lineární homogenní rekurentní rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty.
První členy jsou $f_1 = 1$, $f_2 = 1$.

Bitové řetězce bez sousedních nul

Posloupnost počtu bitových řetězců délky n, které neobsahují sousední nuly $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, je lineární homogenní rekurentní rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty.
První členy jsou $a_1 = 2$, $a_2 = 3$.

Hanojské věže

Posloupnost nutného počtu kroků H_n *pro přemístění celé hanojské věže s n disky* $H_n = 2H_{n-1} + 1$, je lineární rekurentní rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty, která není homogenní.
První člen je $H_1 = 1$.

Kódová slova se sudým počtem nul

Počet kódových slov sestavených z cifer 0, 1, ..., 9, kde navíc každé kódové slovo obsahuje sudý počet cifer 0, je lineární rekurentní rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty $x_n = 8x_{n-1} + 10^{n-1}$. První člen je $x_1 = 9$.
Tato rovnice není homogenní, neboť člen 10^{n-1} *není* násobkem a_i.

Catalanova čísla

Posloupnost Catalanových čísel $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$ je určena rekurentní homogenní rovnicí. První členy jsou $C_1 = 1$, $C_2 = 2$.
Tato rekurentní rovnice není lineární, protože členy C_k, C_{n-k} násobíme a není pevného řádu, neboť počet sčítanců roste s n.

Příklad

Rekurentně zadaná posloupnost $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$ je rekurentní homogenní rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. První členy $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.
Tato rekurentní rovnice není lineární, protože členy a_{n-1}, a_{n-2} násobíme.

5.3. Metody řešení rekurentně zadaných posloupností

Hlavní úloha řešení rekurentních rovnic

Je-li lineární rekurentní rovnice (malého) řádu k s konstantními koeficienty dána rekurentním vztahem a dostatkem prvních členů, můžeme tuto rovnici „vyřešit“. To znamená, že budeme hledat vztah pro n-tý člen, pomocí kterého lze vyjádřit a_n *bez znalosti předchozích členů*.

Ukážeme si, jak je možno obecně postupovat:

- nejprve sestavíme tzv. charakteristickou rovnici,
- potom najdeme kořeny charakteristické rovnice,
- v závislosti na počtu kořenů charakteristické rovnice zvolíme tvar obecného řešení,
- v závislosti na hodnotě prvních členů posloupnosti dopočítáme neznámé koeficienty.

Začneme jednoduchými případy.

Charakteristická rovnice a její kořeny

Je možno ukázat (například postupem s pomocí tzv. vytvořujících funkcí), že řešení lineárních homogenních rekurentních rovnic s konstantními koeficienty bude tvaru $a_n = r^n$, kde r je vhodná konstanta.
Dosazením do rekurentního předpisu dostaneme

$$\begin{aligned}
a_n &= c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \\
r^n &= c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k} \\
r^k &= c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k r^{k-k} \\
0 &= r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k
\end{aligned}$$

Poslední rovnice se nazývá charakteristická rovnice rekurentní rovnice.
Je zřejmé, že řešení této rovnice v proměnné r jsou hledaná čísla r_i.
Říkáme jim kořeny charakteristické rovnice.

Postupné zobecnění řešení

Pro názornost rozdělíme řešení lineárních homogenních rekurentních rovnic s konstantními koeficienty do několika kroků.
Každý další krok zahrne větší množinu rekurentních rovnic:

- nejprve ukážeme, jak vypadá obecné řešení lineární homogenní rekurentní rovnice řádu 2 s konstantními koeficienty,
  - jestliže máme dva různé reálné kořeny,
  - a jestliže máme dva stejné reálné kořeny,
- dále ukážeme, jak vypadá obecné řešení lineární homogenní rekurentní rovnice řádu k s konstantními koeficienty, jsou-li kořeny charakteristické rovnice různé.
- Potom ukážeme, jak vypadá obecné řešení lineární homogenní rekurentní rovnice řádu k s konstantními koeficienty,
- a nakonec ukážeme, jak vypadá obecné řešení lineární nehomogenní rekurentní rovnice řádu k s konstantními koeficienty.
- Další zobecnění jen zmíníme.

Tvar řešení

Nejprve ukážeme, jak vypadá tvar obecného řešení homogenní rovnice.

Věta

Mějme dvě reálná čísla c_1, c_2. Pokud má charakteristická rovnice $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ dva různé (reálné) kořeny r_1, r_2, tak řešení rekurentní rovnice $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ má tvar $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, pro $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Důkaz neuvádíme.

Platí dokonce silnější tvrzení, kořeny nemusí být reálné.

Příklad

Najděte řešení rekurentní rovnice $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, kde $a_0 = 2$, $a_1 = 7$.

Postupujeme podle návodu uvedeného dříve:
Předpokládáme řešení tvaru $a_n = r^n$. Dosazením do rekurentní rovnice dostaneme charakteristickou rovnici

$$\begin{aligned} r^2 - r - 2 &= 0 \\ (r+1)(r-2) &= 0. \end{aligned}$$

Charakteristické kořeny jsou $r_1 = 2$, $r_2 = -1$. Obecné řešení je tvaru

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n.$$

Dosazením a_0, a_1 dostaneme dvě rovnice o neznámých α_1, α_2.

$$\begin{aligned} a_0 = 2 &= \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 \\ a_1 = 7 &= \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-1) \end{aligned}$$

Řešením soustavy dostaneme $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -1$, proto obecné řešení je

$$a_n = 3 \cdot 2^n - 1 \cdot (-1)^n.$$

Vskutku,

- vztah $a_n = 3 \cdot 2^n - 1(-1)^n$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$
- rekurentní rovnice $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, kde $a_0 = 2$, $a_1 = 7$

popisují stejnou posloupnost:

$$2, 7, 11, 25, 47, 97, 191, 385, 767, 1\,537, 3\,071, \ldots$$

Nyní se podíváme na případ s násobnými kořeny.

Věta

Mějme dvě reálná čísla c_1, c_2, kde $c_2 \neq 0$. Pokud má charakteristická rovnice $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ jeden dvojnásobný (reálný) kořen r_0, tak řešení rekurentní rovnice $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ má tvar $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$, pro $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Všimněte si, že druhý člen obecného řešení je vynásoben n.

Příklad

Najděte řešení rekurentní rovnice $a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2}$, kde $a_0 = 3$, $a_1 = 5$.

Opět postupujeme stejně:
Předpokládáme řešení tvaru $a_n = r^n$. Dosazením do rekurentní rovnice dostaneme charakteristickou rovnici

$$\begin{aligned} r^2 - 10r + 25 &= 0 \\ (r-5)(r-5) &= 0. \end{aligned}$$

Charakteristické kořeny jsou $r_1 = r_2 = 5$, označme $r_0 = 5$. Obecné řešení je tvaru

$$a_n = \alpha_1 5^n + \alpha_2 n 5^n.$$

Dosazením a_0, a_1 dostaneme dvě rovnice o neznámých α_1, α_2.

$$\begin{aligned} a_0 = 3 &= \alpha_1 \cdot 1 + 0 \\ a_1 = 5 &= \alpha_1 \cdot 5 + \alpha_2 \cdot 5 \end{aligned}$$

Řešením soustavy dostaneme $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -2$, proto řešení je

$$a_n = 3 \cdot 5^n - 2n5^n.$$

Našli jme vztah pro n-tý člen

- $a_n = 3 \cdot 5^n - 2n5^n$, popisuje stejnou posloupnost jako
- rekurentní rovnice $a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2}$, kde $a_0 = 3$, $a_1 = 5$.

Posloupnost je

$$3, 5, -25, -375, -3\,125, -21\,875, -140\,625, \ldots$$

Řešení lineárních rekurentních rovnic je možné dále zobecnit pro vyšší řády.

Věta

Mějme reálná čísla $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Pokud má charakteristická rovnice $r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0$ různých k kořenů $r_1, r_2, \ldots, r_k$, tak řešení rekurentní rovnice $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ má tvar $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n$, pro $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Příklad

Najděte řešení rekurentní rovnice $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} - 6a_{n-3}$, kde $a_0 = 6$ $a_1 = 5$, $a_2 = 13$.

Dostaneme charakteristickou rovnici

$$r^3 - 4r^2 + r + 6 = 0.$$

Charakteristické kořeny jsou $r_1 = -1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$. Obecné řešení je tvaru

$$a_n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2 2^n + \alpha_3 3^n.$$

Dosazením a_0, a_1, a_2 dostaneme tři rovnice o neznámých α_1, α_2, α_3.

$$\begin{aligned} a_0 = 6 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ a_1 = 5 &= -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ a_2 = 13 &= \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 \end{aligned}$$

Řešením soustavy dostaneme $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = -1$, proto obecné řešení je

$$a_n = 2 \cdot (-1)^n + 5 \cdot 2^n - 3^n.$$

Obecné řešení lin. homogenní rekurentní rovnice s konst. koeficienty

Věta

Mějme reálná čísla $c_1, c_2, \dots, c_k$. Pokud má charakteristická rovnice $r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_k = 0$ různých t kořenů $r_1, r_2, \dots, r_t$ s násobnostmi $m_1, m_2, \dots, m_t$, tak řešení rekurentní rovnice $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$ má pro $n = 0, 1, 2, \dots$ tvar

$$\begin{aligned} a_n &= (\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} n + \dots + \alpha_{1,m_1} n^{m_1 - 1}) r_1^n + \\ &\quad + (\alpha_{2,1} + \alpha_{2,2} n + \dots + \alpha_{2,m_2} n^{m_2 - 1}) r_2^n + \\ &\quad + \dots + (\alpha_{t,1} + \alpha_{t,2} n + \dots + \alpha_{t,m_t} n^{m_t - 1}) r_t^n \end{aligned}$$

Abychom našli řešení, tak

1. sestavíme charakteristickou rovnici,
2. určíme charakteristické kořeny (pokud to lze),
3. sestavíme řešení v předpokládaném tvaru s koeficienty $\alpha_{i,j}$,
4. dosadíme k prvních (známých) členů,
5. vyřešíme soustavu rovnic s k neznámými,
6. sestavíme obecné řešení.

Obecné řešení lineární nehomogenní rekurentní rovnice s konstantními koeficienty

Zatím umíme řešit pouze homogenní rekurentní rovnice ...

Řešení nehomogenních rekurentních rovnic má dvě části

- obecné řešení přidružené homogenní rekurentní rovnice,
- jedno partikulární řešení lineární nehomogenní rekurentní rovnice.

Věta

Mějme reálná čísla $c_1, c_2, \ldots, c_k$, mějme funkci $F(n)$ různou od konstantní nulové funkce.
Jestliže $a_n^{(p)}$ je partikulární řešení lineární nehomogenní rekurentní rovnice s konstantními koeficienty

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n),$$

tak každé řešení je tvaru $a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$, kde $a_n^{(h)}$ je řešení přidružené lineární homogenní rekurentní rovnice s konstantními koeficienty

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}.$$

Příklad

Ukažte, že $a_n^{(p)} = -n - 2$ je (partikulárním) řešením rekurentní rovnice $a_n = 2a_{n-1} + n$.

Abychom řešení ověřili, stačí dosadit a porovnat:

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + n \\ -n - 2 &= 2\left(-(n-1) - 2\right) + n \\ -n - 2 &= -n - 2. \end{aligned}$$

Všimněte si: partikulární řešení má tvar $a_n^{(p)} = cn + d$.

Příklad

Ukažte, že $a_n^{(p)} = c \cdot 7^n$ je vhodný tvar (partikulárního) řešení rekurentní rovnice $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$.

Opět dosadíme a porovnáme:

$$\begin{aligned} a_n &= 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n \\ c \cdot 7^n &= 5c \cdot 7^{n-1} - 6c \cdot 7^{n-2} + 7^n \\ c &= \frac{49}{20}. \end{aligned}$$

Věta

Mějme k reálných čísel $c_1, c_2, \ldots, c_k$, mějme funkci $F(n)$, která není konstantní a rovna nule.
Předpokládejme, že $a_n^{(p)}$ je řešení nehomogenní lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n),$$

kde $F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_1 n + b_0) s^n$.

1. Jestliže s není kořenem charakteristické rovnice přidružené lineární homogenní rekurentní rovnice, tak $a_n^{(p)}$ má tvar

$$(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n + p_0) s^n.$$

2. Jestliže s je kořenem s násobností m charakteristické rovnice přidružené lineární homogenní rekurentní rovnice, tak $a_n^{(p)}$ má tvar

$$n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n + p_0) s^n.$$

Příklad

Řešte rekurentní rovnici $a_n = 2a_{n-1} + n2^n$.

Nejprve určíme řešení přidružené lineární homogenní rekurentní rovnice

$$a_n = 2a_{n-1}.$$

Její charakteristická rovnice $r^n = 2r^{n-1}$ má nenulový kořen $r = 2$. Proto tvar obecného řešení je $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$.

Dále určíme partikulární řešení původní lineární nehomogenní rekurentní rovnice. Podle předchozí věty předpokládáme tvar řešení

$$a_n^{(p)} = n(cn + d)2^n,$$

neboť základ 2 je kořenem charakteristické rovnice.

Pro určení neznámých konstant dosadíme partikulární řešení $a_n^{(p)} = n(cn + d)2^n$ do rekurentní rovnice $a_n = 2a_{n-1} + n2^n$.

Příklad pokračování

Dostaneme

$$\begin{aligned}
n(cn+d)2^n &= 2\cdot(n-1)(c(n-1)+d)2^{n-1}+n2^n \\
(cn^2+dn)2^n &= 2\cdot(c(n-1)^2+d(n-1))2^{n-1}+n2^n \\
(cn^2+dn)2^n &= (cn^2-2cn+c+dn-d+n)2^n \\
dn &= (-2c+d+1)n+(c-d).
\end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů polynomů u n^1 a n^0 dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
n^1: \qquad d &= -2c+d+1 \\
n^0: \qquad 0 &= c-d.
\end{aligned}$$

Soustavu vyřešíme a dostaneme $c=\frac{1}{2}$, $d=\frac{1}{2}$ a partikulární řešení je $a_n^{(p)}=n(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2})2^n=(n^2+n)2^{n-1}$.

Řešení dané rekurentní rovnice je

$$a_n=a_n^{(h)}+a_n^{(p)}=\alpha\cdot 2^n+(n^2+n)2^{n-1}=(n^2+n+2\alpha)2^{n-1}.$$

Hodnota konstanta α závisí na počáteční hodnotě a_1.

5.4. Řešení motivačních příkladů z úvodu kapitoly

Fibonacciho posloupnost

Najděte řešení rekurentní rovnice $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, kde $f_0 = 0,\ f_1 = 1$.

Dostaneme charakteristickou rovnici $r^2 - r - 1 = 0$.
Charakteristické kořeny jsou $r_1 = (1+\sqrt{5})/2$, $r_2 = (1-\sqrt{5})/2$. Obecné řešení je tvaru

$$f_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Dosazením $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ dostaneme dvě rovnice o neznámých α_1, α_2.

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 \\ 1 &= \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

Řešením soustavy dostaneme $\alpha_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\alpha_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, proto obecné řešení je

$$f_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Hanojské věže

Najděte řešení rekurentní rovnice $H_n = 2H_{n-1} + 1$, kde $H_1 = 1$.

Jedná se o lineární nehomogenní rekurentní rovnici.
Na druhou stranu se jedná o rekurentní rovnici prvního řádu, řešení odvodíme jinak.
Všimneme si

$$\begin{aligned}
H_n &= 2H_{n-1} + 1 \\
&= 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 H_{n-2} + 2 + 1 \\
&= 2^2(2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 H_{n-2} + 2^2 + 2 + 1 \\
&\vdots \\
&= 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1 \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1 \\
&= 2^n - 1.
\end{aligned}$$

Hledané řešení lineární nehomogenní rovnice hanojských věží je

$$H_n = 2^n - 1.$$

Bitové řetězce bez sousedních nul

Najděte řešení rekurentní rovnice $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kde $a_1 = 2$, $a_2 = 3$.

Dostaneme charakteristickou rovnici $r^2 - r - 1 = 0$.
Charakteristické kořeny jsou $r_1 = (1+\sqrt{5})/2$, $r_2 = (1-\sqrt{5})/2$. Obecné řešení je tvaru

$$a_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Dosazením $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ dostaneme dvě rovnice o neznámých α_1, α_2.

$$\begin{aligned} 2 &= \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ 3 &= \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \alpha_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Řešením soustavy dostaneme $\alpha_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$, $\alpha_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$, obecné řešení je

$$a_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Klíčová slova se sudým počtem nul

Najděte řešení rekurentní rovnice $x_n = 8x_{n-1} + 10^{n-1}$, kde $x_1 = 9$.

Nejedná se lineární o homogenní rekurentní rovnici s konstantními koeficienty.

Nejprve najdeme obecné řešení přidružené homogenní rekurentní rovnice

$$x_n = 8x_{n-1}.$$

Její charakteristická rovnice $r^n = 8r^{n-1}$ má nenulový kořen $r = 8$.
Proto tvar obecného řešení je $x_n^{(h)} = \alpha 8^n$.
Konstantu α můžeme určit až budeme znát partikulární řešení.

Dále určíme partikulární řešení původní lineární nehomogenní rekurentní rovnice. Podle věty předpokládáme tvar partikulárního řešení

$$x_n^{(p)} = c \cdot 10^n,$$

neboť základ 10 není kořenem charakteristické rovnice.

Pro určení konstanty c dosadíme partikulární řešení $x_n^{(p)} = c \cdot 10^n$ do rekurentní rovnice $x_n = 8x_{n-1} + 10^{n-1}$.

Dostaneme

$$\begin{aligned} c10^n &= 8 \cdot c10^{n-1} + 10^{n-1} \\ 10c &= 8c + 1 \\ 2c &= 1 \\ c &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nyní obecné řešení rekurentní rovnice $x_n = 8x_{n-1} + 10^{n-1}$ je

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = \alpha \cdot 8^n + \frac{1}{2} \cdot 10^n.$$

Hodnotu konstanty α určíme dosazením $x_1 = 9$ a $n = 1$ do obecného řešení $x_n = \alpha \cdot 8^n + \frac{1}{2} \cdot 10^n$. Dostaneme

$$\begin{aligned} 9 &= \alpha \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 10 \\ 9 - 5 &= 8\alpha \\ \alpha &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Řešení dané rekurentní rovnice včetně počáteční podmínky je

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot 8^n + \frac{1}{2} \cdot 10^n.$$

Merge sort

Merge sort je dobře známý algoritmus, který slouží k seřazení posloupnosti n prvků. Jedná se o rekurzivní algoritmus.
Známe-li algoritmus, tak snadno nahlédneme, že počet porovnání a počet operací M_n pro seřazení posloupnosti n prvků můžeme shora odhadnout rekurentní rovnicí $M_n = 2M_{\lceil n/2 \rceil} + n$, kde $M_1 = 1$.

Tuto lineární nehomogenní rekurentní rovnici neumíme řešit, protože nemá pevný řád.

Je možno ukázat, že řešení, tj. počet kroků Merge sort algoritmu, je funkce složitosti

$$M_n = O(n \log n).$$

Hanojské věže – jiné řešení

Najděte řešení rekurentní rovnice $H_n = 2H_{n-1} + 1$, kde $H_1 = 1$.

Jedná se o lineární nehomogenní rekurentní rovnici.
Nejprve najdeme obecné řešení přidružené homogenní rovnice $H_n = 2H_{n-1}$.
Charakteristická rovnice má tvar $r = 2$. Má jediný kořen, proto tvar obecného řešení je $H_n = \alpha \cdot 2^n$. Hodnotu konstanty α určíme nakonec.

Protože funkce $F(n) = 1$, tak partikulární řešení $H_n^{(p)}$ čekáme tvaru $c \cdot 1$.
Abychom určili hodnotu c, tak partikulární řešení dosadíme do rekurentní rovnice.

$$\begin{aligned} H_n &= 2H_{n-1} + 1 \\ c &= 2c + 1 \\ -1 &= c \end{aligned}$$

Partikulární řešení je $H_n^{(p)} = -1$ a obecné řešení nehomogenní rovnice je tvaru $H_n = \alpha \cdot 2^n - 1$.

Nyní vyčíslíme hodnotu α dosazením počáteční podmínky $H_1 = 1$.
Dostaneme $1 = \alpha \cdot 2^1 - 1$, tedy $\alpha = 1$.
Hledané řešení lineární nehomogenní rovnice počtu tahů řešení hanojských věží je $H_n = 2^n - 1$.

Příště

Kapitola 6. Kongruence a modulární aritmetika

- motivace
- dělení a dělitelnost
- lineární kongruence o jedné neznámé
- metody řešení
- příklady využití