Diskrétní matematika

Petr Kovář
petr.kovar@vsb.cz

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

zimní semestr 2022/2023
DiM 470-2301/01, 470-2301/03*, 470-2301/05

O tomto souboru

Tento soubor je zamýšlen především jako pomůcka pro přednášejícího. Řadu důležitých informací v souboru nenajdete, protože přednášející je říká, ukazuje, případně maluje na tabuli. Přednášky jsou na webu k dispozici, aby studenti mohli snadno dohledat probíraná témata z přednášek, které zameškali.

Pro samostatné studium doporučuji skripta:

- M. Kubesa: Základy diskrétní matematiky, výukový text
- P. Kovář: Úvod do teorie grafů, výukový text

Pro přípravu ke zkoušce a písemkám doporučuji cvičebnici:

- P. Kovář: Cvičení z diskrétní matematiky, sbírka příkladů

Vše na http://homel.vsb.cz/~kov16/predmety_dm.php

Přehled přednášky

Kapitola 4. Další početní postupy

- princip inkluze a exkluze
- kombinatorické identity
- binomická věta
- několik důkazů „počítáním“

Opakování

Zavedli jsme pojmy a symboly

- permutace $P(n)$
- kombinace bez opakování $C(n, k)$ i s opakováním $C^*(n, k)$
- variace (bez opakování) $V(n, k)$ i s opakováním $V^*(n, k)$

Odvodili jsme vztahy pro počet všech výběrů zvoleného typu.

Avšak ne všechny výběry můžeme vyjádřit pomocí uvedených jednoduchých výběrů. Například

- počet prvků ve sjednocení množin
- počet bijekcí bez pevného bodu
- počet rozkladů n prvkové množiny na právě k disjunktních podmnožin
- počet rozkladů čísla n na právě k sčítanců, přičemž pořadí sčítanců nehraje roli

4.1. Princip inkluze a exkluze

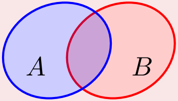
Bývá nazýván také „princip zapojení a vypojení“, nebo „zahrnutí a vyloučení“.

Pro malá n jej často intuitivně používáme:

Věta

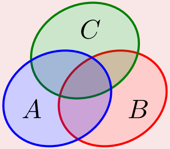
Počet prvků ve sjednocení dvou množin je:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$



Počet prvků ve sjednocení tří je:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$



Obecný tvar principu inkluze a exkluze

Počet prvků ve sjednocení n množin je:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\substack{J\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ J\neq\emptyset}} (-1)^{|J|-1} \cdot \left|\bigcap_{i\in J} A_i\right|.$$

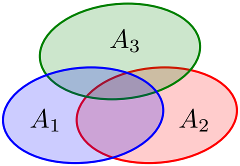
Abychom zjistili, kolik prvků má sjednocení

- sečteme velikosti jednotlivých množin,
- odečteme velikosti průniků všech dvojic,
- přičteme velikosti průniků všech trojic,
- odečteme velikosti průniků všech čtveřic,
- ...

Velikost sjednocení tří množin

Například pro $n = 3$ dostáváme

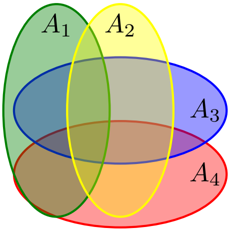
$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right| &= \sum_{\substack{J \subseteq \{1,2,3\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \cdot \left|\bigcap_{i \in J} A_i\right| = \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| - \\
&\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + \\
&\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.
\end{aligned}$$



Velikost sjednocení čtyř množin

pro $n = 4$ dostáváme

$$
\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right| &= \sum_{\substack{J \subseteq \{1,2,3,4\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \cdot \left|\bigcap_{i \in J} A_i\right| = \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - \\
&- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| + \\
&+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - \\
&- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.
\end{aligned}
$$



Speciální tvar principu inkluze a exkluze

Jednodušší tvar (s méně sčítanci), mají-li množiny a průniky i množin stejné velikosti:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \binom{n}{k} \cdot \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right|.$$

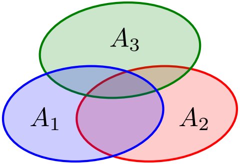
Abychom zjistili, kolik prvků má sjednocení

- počet jednoprvkových průniků, tj. množin samotných $\times |A_i|$,
- odečteme počet dvouprvkových průniků $\times$ velikost průniků dvojic,
- přičteme počet tříprvkových průniků $\times$ velikost průniků trojic,
- odečteme počet čtyřprvkových průniků $\times$ velikost průniků čtveřic,
- ...

Velikost sjednocení tří množin mají-li množiny i průniky množin stejné velikosti

Pro $n = 3$ dostáváme

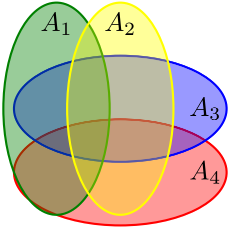
$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right| &= \sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}\cdot\binom{3}{k}\cdot\left|\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right| = \\ &= \binom{3}{1}\cdot|A_1| - \binom{3}{2}\cdot|A_1\cap A_2| + \binom{3}{3}\cdot|A_1\cap A_2\cap A_3|.\end{aligned}$$



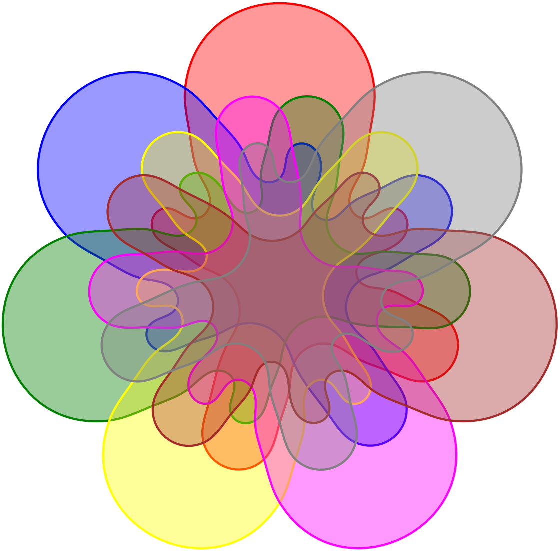
Velikost sjednocení čtyř množin mají-li množiny i průniky množin stejné velikosti

Pro $n = 4$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right| &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \binom{n}{k} \cdot \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right| = \\
&= \binom{4}{1} \cdot |A_1| - \binom{4}{2} \cdot |A_1 \cap A_2| + \\
&+ \binom{4}{3} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - \binom{4}{4} |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.
\end{aligned}$$



Vennův diagram pro sedm množin – Adelaide



Příklad

Ve třídě je 25 žáků. 17 z nich se učí anglicky a 10 německy. 4 se učí anglicky a německy, 4 anglicky a francouzsky, 2 německy a francouzsky a jeden studuje všechny tři jazyky. Kolik studentů se učí jen francouzsky?

Množiny označíme A, N a F. Zapíšeme si

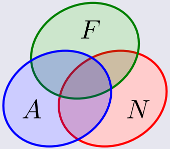
$$|A| = 17,\ |N| = 10,\ |A \cap N| = |A \cap F| = 4,\ |N \cap F| = 2,\ |A \cap N \cap F| = 1$$

Z rovnice

$$|A \cup N \cup F| = |A| + |N| + |F| - |A \cap N| - |N \cap F| - |A \cap F| + |A \cap N \cap F|$$

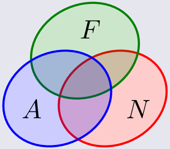
dostaneme

$$|F| = |A \cup N \cup F| - |A| - |N| + |A \cap N| + |N \cap F| + |A \cap F| - |A \cap N \cap F|$$
$$|F| = 25 - 17 - 10 + 4 + 4 + 2 - 1 = 7.$$



Příklad (pokračování)

Ale někteří z těchto 7 studentů se učí i jiné jazyky!



Jen francouzsky

$$x = |F| - |A \cap F| - |N \cap F| + |A \cap N \cap F|$$
$$x = 7 - 4 - 2 + 1 = 2 \text{ žáci.}$$

Jen francouzsky se učí 2 žáci.

Kombinatorické identity

Pro kombinační čísla platí celá řada zajímavých vztahů. Zabývá se jimi dokonce celá samostatná část diskrétní matematiky.

Lemma

Pro všechna $n \geq 0$ platí

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Tvrzení, jejichž důkaz spočívá v dosazení do definice považujeme za „zřejmá“ tvrzení a důkaz se neuvádí. Se správným zdůvodněním je důkaz tvrzení zřejmý:

Podívejme se na počty příslušných podmnožin.

Další kombinatorické identity

Lemma

Pro všechna $n \geq k \geq 0$ platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Pokud důkaz vyžaduje nějaký „trik“, nebo neobvyklé úpravy (byť jen jednu jedinou úpravu), je zvykem stručně vysvětlit.

Podívejme se opět na počty příslušných podmnožin.

Lemma

Pro všechna $n \geq k \geq 0$ platí

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Přímý (dosazením a úpravou)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n! \cdot (k+1) + n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot ((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

□

Kombinatorický důkaz je názornější:
Rozeberme počty $(k+1)$-prvkových podmnožin nějaké $(n+1)$-prvkové množiny.

□

Význam binomického koeficientu

Uvedené tři vztahy mohou sloužit jako *alternativní definice kombinačních čísel*.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Číselné hodnoty binomických koeficientů jsou určeny těmito rovnostmi

- není potřeba počítat faktoriály,
- hodnoty lze (rekurentně) dopočítat.

Pascalův trojúhelník

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

. . . .

Pascalův trojúhelník

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} \qquad \binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} \qquad \binom{3}{2} \qquad \binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{4}{0} = 1 \quad \binom{4}{1} \qquad \binom{4}{2} \qquad \binom{4}{3} \qquad \binom{4}{4} = 1$$

$$\binom{5}{0} = 1 \quad \binom{5}{1} \qquad \binom{5}{2} \qquad \binom{5}{3} \qquad \binom{5}{4} \qquad \binom{5}{5} = 1$$

. . . .

Krajní členy mají hodnoty 1.

Pascalův trojúhelník

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{4}{0} = 1 \quad \binom{4}{1} = 4 \quad \binom{4}{2} = 6 \quad \binom{4}{3} = 4 \quad \binom{4}{4} = 1$$

$$\binom{5}{0} = 1 \quad \binom{5}{1} = 5 \quad \binom{5}{2} = 10 \quad \binom{5}{3} = 10 \quad \binom{5}{4} = 5 \quad \binom{5}{5} = 1$$

Krajní členy mají hodnoty 1.

Každý vnitřní člen je součtem dvou členů bezprostředně nad ním.

Další rovnosti

„Hokejková“ rovnost

Pro všechna přirozená čísla r, n, kde $n \geq r$, platí $\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}$.

Elegantní zdůvodnění pomocí Pascalova trojúhelníka.

Další rovnost

Pro všechna přirozená čísla n platí $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Elegantní kombinatorické zdůvodnění.

Obecnější je

Vandermondova rovnost

Pro všechna přirozená čísla r, m, n, kde $r \leq \min\{m, n\}$, platí $\sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i} = \binom{m+n}{r}$.

Elegantní kombinatorické zdůvodnění.

Binomická věta

Binomická věta

Pro všechna $n > 0$ platí

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n.$$

Důkaz Tvrzení je možno dokázat indukcí (skripta). Avšak možný je i důkaz jednoduchou úvahou (s využitím lemmatu):
Algebraickém rozvoji součinu používáme pravidlo „vynásobit každý člen s každým“. Proto se v rozvoji vztahu $\underbrace{(1+x)(1+x)\dots(1+x)}_{n}$ člen x^k objeví tolikrát, kolik je možností (neuspořádaně) vybrat k z n činitelů – závorek. To je právě $\binom{n}{k}$ krát = počet k prvkových podmnožin z n prvků. □

Kombinatorické identity odvozené z binomické věty

Binomická věta

Pro všechna $n > 0$ platí

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n.$$

Z binomické věty pro přirozená $n \geq 0$ ihned plyne

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n\,.$$

Říká také: všech podmnožin n-prvkové množiny je 2^n.

Z binomické věty pro přirozená $n > 0$ také plyne

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots - (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n} = 0\,.$$

n-prvková množina má stejný počet podmnožin sudé a liché velikosti.

Důkazy „metodou počítání možností“

Někdy máme ukázat existenci nějakého objektu nebo vlastnosti, aniž jsme schopni objekt zkonstruovat nebo jinak specifikovat. Takovým důkazům říkáme nekonstruktivní, někdy také existenční.

Místo abychom řešení „zkonstruovali“, tak se nám podaří „spočítat“, že řešení musí existovat.

Dirichletův princip (the pigeon-hole principle)

Rozmístíme-li $\ell + 1$ (nebo více) objektů do ℓ přihrádek, v některé přihrádce musí být alespoň dva objekty.

Důkazy počítáním možností

Existenci konkrétní možnosti (ze známé množiny) ukážeme, pokud počet možností, které nemohou nastat je menší než celkový počet možností.

Příklad

Vidíme, jak do tunelu vjedou tři auta a jen dvě vidíme vyjet ven. To znamená, že jedno auto v tunelu zůstalo (přestože ho nyní nevidíme).

Příklad

8 kamarádů jelo na 9 dní dovolené. Každý den některá (jedna) trojice z nich šla na výlet. Dokažte, že někteří dva z nich ani jednou nebyli spolu na výletě.

Důkaz rozebírání možností by asi k ničemu nevedlo...

Důkaz počítáním je však snadný: Jedna trojice má celkem 3 dvojice, proto po 9 dnech se mohlo vystřídat *nejvýše různých* $9 \cdot 3$ *dvojic*, ale $9 \cdot 3 = 27 < \binom{8}{2} = 28$, jedna dvojice nám zde schází.

Otázka

Žijí na Zemi dva lidé, kteří mají stejný počet vlasů?

Příklad

V šuplíku je (poházeno) 30 párů černých ponožek, 10 párů hnědých ponožek a 3 páry bílých ponožek. Kolik musíme potmě vytáhnout ponožek, abychom měli jistotu, že máme alespoň jeden pár stejné barvy?

„Přihrádky“ Dirichletova principu budou odpovídat třem různým barvám. Vytáhneme-li čtyři ponožky (nerozlišujeme pravou a levou ponožku), musí být alespoň dvě ponožky stejné barvy.

Otázka

Máme 4 přirozená čísla. Ukažte, že mezi nimi vždy najdete dvě čísla tak, aby jejich rozdíl dělitelný číslem 3.

Otázka

Máme 3 přirozená čísla. Ukažte, že mezi nimi vždy najdete dvě čísla tak, aby jejich součet byl dělitelný nějakým prvočíslem.

Handshaking problem

V místnosti je n lidí, někteří si podali ruce. Ukažte, že alespoň dva lidé podali ruku stejnému počtu lidí.

Příklad

Máme 5 přirozených čísel. Ukažte, že mezi nimi vždy najdeme dvě čísla tak, že jejich součet je dělitelný 9.

Důkaz (chybný!) Celkem máme 9 různých zbytkových tříd po dělení číslem 9. Z pěti čísel můžeme získat 10 různých součtů. Jistě bude v každé zbytkové třídě alespoň jeden součet, v některé budou dokonce dva součty. Proto dvojice čísel, jejichž součet odpovídá zbytkové třídě 0, má součet čísel dělitelný devíti. □

Otázka

Co je špatně v uvedeném důkazu předchozího tvrzení?

Nápověda: zkuste úlohu rozebrat pro množinu pěti čísel $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Zobecněný Dirichletův princip

Není obtížné si rozmyslet, že platí ještě obecnější tvrzení.

Zobecněný Dirichletův princip

Rozmístíme-li $k\ell + 1$ (nebo více) objektů do ℓ přihrádek, v některé přihrádce musí být alespoň $k + 1$ objektů.

Příklad

V krabici je dostatečné množství kuliček čtyř různých barev. Kolik nejméně kuliček musíme vytáhnout, abychom měli jistotu, že máme alespoň 7 kuliček stejné barvy?

Přihrádky odpovídají barvám, $\ell = 4$.
Kuličky odpovídají objektům, $k = 6$.
Vytáhneme-li alespoň $k\ell + 1 = 6 \cdot 4 + 1 = 25$ kuliček, tak alespoň 7 má stejnou barvu.

Další početní postupy

Ne všechno lze spočítat pomocí jednoduchých výběrů a principu inkluze a exkluze.

- Rozdělení k různých objektů do n nerozlišitelných přihrádek tak, aby žádná nezůstala prázdná (Stirlingova čísla prvního druhu),
- rozdělení k různých objektů do n různých přihrádek tak, aby žádná nezůstala prázdná (Stirlingova čísla druhého druhu),
- rozdělení k nerozlišitelných objektů do n nerozlišitelných přihrádek tak, aby žádná nezůstala prázdná.
- rozdělení k nerozlišitelných objektů do n různých přihrádek tak, aby žádná nezůstala prázdná.

Pro uvedené výběry obecně neexistuje uzavřená formule. Můžeme

- počítat hodnoty rekurzivně,
- využít sumy s proměnnými parametry,
- budete-li potřebovat, můžete známá řešení najít a použít.

Tyto početní postupy jsou nad rámec základního kurzu.

Příště

Kapitola 5. Rekurentní vztahy

- motivace
- rekurentně zadané posloupnosti
- metody řešení lineárních rekurencí