Diskrétní matematika

Petr Kovář
petr.kovar@vsb.cz

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

zimní semestr 2022/2023
DiM 470-2301/01, 470-2301/03*, 470-2301/05

O tomto souboru

Tento soubor je zamýšlen především jako pomůcka pro přednášejícího. Řadu důležitých informací v souboru nenajdete, protože přednášející je říká, ukazuje, případně maluje na tabuli. Přednášky jsou na webu k dispozici, aby studenti mohli snadno dohledat probíraná témata z přednášek, které zameškali.

Pro samostatné studium doporučuji skripta:

- M. Kubesa: Základy diskrétní matematiky, výukový text
- P. Kovář: Úvod do teorie grafů, výukový text

Pro přípravu ke zkoušce a písemkám doporučuji cvičebnici:

- P. Kovář: Cvičení z diskrétní matematiky, sbírka příkladů

Všе na http://homel.vsb.cz/~kov16/predmety_dm.php

Přehled přednášky

Kapitola 3. Diskrétní pravděpodobnost

- formalizace náhody: náhodný jev, pravděpodobnostní prostor
- závislé a nezávislé jevy
- střední hodnota
- náhodné výběry

Diskrétní pravděpodobnost

Jednu z nejstarších motivací počtu pravděpodobnosti jsou hazardní hry. Otázky jako

- „Jaká je šance hodit nějakou kombinaci kostek?“
- „Jaká je šance dostat jisté karty?“

vedli k formalizaci pojmu náhoda a pravděpodobnost.

Budeme se zabývat pouze *diskrétními* případy, tj. událostmi, ve kterých může nastat pouze jedna z *konečně* mnoha možností.

Přehled:

- motivační příklady
- pravděpodobnostní prostor (intuice snadno selže)
- nezávislé jevy
- střední hodnota
- náhodné výběry

Motivační příklady

Hod mincí 2 možné výsledky: hlava / orel (1 / 0)
předpokládáme, že každá strana mince padá se stejnou četností
(říkáme „s pravděpodobností $\frac{1}{2}$“)

Hod kostkou 6 možných výsledků: 1, 2, 3, 4, 5 a 6
každý strana kostky padá se stejnou četností („pravděpodobností“) $\frac{1}{6}$

Zamíchání karet předpokládáme, že při poctivém rozmíchání není některé pořadí upřednostněno
možných výsledků je $32! \doteq 2.6 \cdot 10^{35}$

Tah sportky jeden tah je neuspořádaný výběr 6 prvků ze 49
možných výsledků: $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$

Naše „očekávání pravděpodobnosti“ vychází z předpokladu poctivosti. Často různé možnosti (události) považujeme za ekvivalentní co do četnosti výskytů náhodných událostí.

Konečný pravděpodobnostní prostor

Jak matematicky modelovat „náhodu“?

Subjektivně rozumíme očekávání, zda nastane nějaký jev. Vycházíme ze zkušenosti s předchozí relativní četností jevu, číslo mezi 0 a 1.

$$\text{pravděpodobnost} = \frac{\text{četnost jevu}}{\text{počet pokusů}}$$

Definice

Konečný pravděpodobnostní prostor je dvojice (Ω, P), kde základní prostor Ω je konečná množina elementárních jevů a P je funkce pravděpodobnosti, která každé podmnožině $A \subseteq \Omega$ přiřadí číslo $P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$, přičemž

- $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pro disjunktní $A, B \subseteq \Omega$

(Náhodný) jev je libovolná podmnožina $A \subseteq \Omega$ a pravděpodobnost náhodného jevu je $P(A)$.

Poznámka: stačí zadat pravděpodobnosti elementárních jevů (prvků Ω).
Pro $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subseteq \Omega$ z definice $P(A) = P(\{a_1\}) + \dots + P(\{a_k\})$.

Pozor, časté chyby

- Jak se liší (náhodný) *jev* a *elementární jev*?

Příklad

elementární jev: při hodu kostkou padne 1
jev: při hodu kostkou padne sudé číslo

- *Disjunktní jevy* nemohou nastat současně: $A \cap B = \emptyset$

Příklad

Při současném hodu dvěma kostkami jevy

- A: padne alespoň jedna šestka
- B: padne součet 7

nejsou disjunktní jevy $P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, avšak

- C: padne alespoň jedna šestka
- D: padne součet 3

jsou disjunktní jevy $P(C \cap D) = 0$, nemohou nastat současně.

Motivační příklady ve smyslu definice pravděpodobnostního prostoru

Hod mincí

$\Omega = \{0, 1\}$ a $P(\{0\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{2}$.

Hod kostkou

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $P(\{1\}) = \ldots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$
Jev „padne sudé číslo" je tvořen podmnožinou $\{2, 4, 6\}$.

Zamíchání karet

Ω je tvořena všemi 32! permutacemi z 32 karet, každá permutace má stejnou pravděpodobnost $\frac{1}{32!}$.
Jev „Full House" je tvořen podmnožinou všech těch permutací, které na prvních pěti kartách obsahují trojici karet stejné hodnoty a dvojici karet jiné hodnoty.

Tah sportky

jeden tah je neuspořádaný výběr 6 prvků ze 49
Ω je tvořena všemi 6-prvkovými kombinacemi z 49 čísel, každá kombinace má pravděpodobnost $1/\binom{49}{6}$.

Všimněte si: ve všech příkladech mají elementární jevy stejnou pravděpodobnost.

Definice

Uniformní pravděpodobnost je prostoru Ω přiřazena funkcí

$$P(A) = |A| \,/\, |\Omega|.$$

Takový prostor je uniformní.

- Každý elementární jev je stejně pravděpodobný,
- pravděpodobnost jevu A je relativní velikost A vzhledem k Ω.

Stačí určit pravděpodobnosti elementárních jevů:
Pro každý elementární jev $e \in \Omega$ položíme

$$P(\{e\}) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Uniformní a neuniformní pravděpodobnostní prostor

Hod mincí

Nosná množina je stejná $\Omega = \{0, 1\}$.

Pokud $P(\{0\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{2}$, tak pravděpodobnostní prostor je uniformní.

Pokud $P(\{0\}) = \frac{1}{3}$, ale $P(\{1\}) = \frac{2}{3}$, tak pravděpodobnostní prostor není uniformní.

Losování z klobouku

V osudí je deset stodolarových bankovek a sto desetidolarových bankovek. Jednu bankovku náhodně vytáhneme. Nosná množina je $\Omega = \{10, 100\}$.

Platí $P(\{100\}) = \frac{10}{110} = \frac{1}{11}$, ale $P(\{10\}) = \frac{100}{110} = \frac{10}{11}$.
Pravděpodobnostní prostor není uniformní.

Příklad

Náhodný proces, kdy zjišťujeme součet ok při hodu dvěma kostkami.

Množina všech možných součtů dvou kostek je $\Omega = \{2, 3, \dots, 12\}$. Pravděpodobnosti elementárních jevů jsou různé! Součet 2 lze získat jediným způsobem $1 + 1$, součet 7 lze získat šesti způsoby, bude častější.

Celkem je $6 \cdot 6 = 36$ možností hodů dvou kostek. Z toho, jak jsme si všimli, součet 7 padne šesti způsoby, součet 6 pěti způsoby, atd. Užitím úvahy o poměrném počtu způsobů získáme funkci pravděpodobnosti:

$$P(2) = P(12) = \tfrac{1}{36},$$
$$P(3) = P(11) = \tfrac{2}{36} = \tfrac{1}{18},$$
$$P(4) = P(10) = \tfrac{3}{36} = \tfrac{1}{12},$$
$$P(5) = P(9) = \tfrac{4}{36} = \tfrac{1}{9},$$
$$P(6) = P(8) = \tfrac{5}{36},$$
$$P(7) = \tfrac{6}{36} = \tfrac{1}{6}.$$

Příklad

Náhodný proces, kdy zjišťujeme součet ok při hodu dvěma kostkami (modelováno prostorem s uniformní pravděpodobností).

Množina elementárních jevů je $\Omega' = [1, 6]^2$ (druhá kartézská mocnina množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

Pravděpodobnosti každého elementárního jevu je $P(A) = \frac{1}{36}$.

Jevy jednotlivých součtů jsou následující podmnožiny Ω'

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \emptyset, \\
S_2 &= \{(1,1)\}, \\
S_3 &= \{(1,2),(2,1)\}, \\
&\vdots \\
S_7 &= \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}, \\
S_8 &= \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}, \\
&\vdots \\
S_{12} &= \{(6,6)\}.
\end{aligned}
$$

Pravděpodobnosti jevů $S_1, \ldots, S_{12}$ jsou stejné jako u předchozího modelu.

Upřednostňujeme užití prostorů s uniformní pravděpodobností.

Definice

Doplňkový (komplementární) náhodný jev k náhodnému jevu A značíme $\overline{A}$ a platí $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Věta

Pro doplňkový jev $\overline{A}$ náhodného jevu A platí $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Příklad

Hodíme spravedlivou kostkou.
Jevem A označíme „na kostce padla 1 nebo 2“,
potom doplňkový jev $\overline{A}$ označuje jev „na kostce nepadla 1 ani 2“, neboli „na kostce padla 3, 4, 5, nebo 6.“

Šikovné pro počítání pravděpodobnosti jevů v uniformním i neuniformním pravděpodobnostním prostoru.
Často využijeme počty kombinatorických výběrů.

Podmíněná pravděpodobnost jevu A jevem B

Jestliže pravděpodobnost jevu B není nulová, tak podmíněnou pravděpodobnost jevu A jevem B budeme značit $P(A|B)$ a vypočítáme

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Podmíněná pravděpodobnostjevu A jevem B je pravděpodobnost jevu A, pokud víme, že nastal jev B.

Příklad

Jaká je pravděpodobnost, že při současném hodu dvěma kostkami padl součet 7 víme-li, že na některé kostce padlo číslo 5.
Snadno určíme $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$ $(5 + 2$ nebo $2 + 5)$.
Při určení $P(B)$ nesmíme možnost $5 + 5$ započítat dvakrát, a určíme $P(B) = \frac{11}{36}$.
Hledaná podmíněná pravděpodobnost je $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}} = \dfrac{2}{11}$.

Pozor na „intuici“, často klame!

V předchozím příkladu jsme učili, že při hodu dvěma kostkami podmíněná pravděpodobnost jevu A „padne součet 7“ za podmínky, že nastal jev B „alespoň na jedné kostce padlo číslo 5“, je $P(A|B) = \frac{2}{11}$.

Toto ale *není* správně řešení následující úlohy:

Příklad

Krupiér hodí dvěma kostkami, podívá se na padlá čísla a řekne „Alespoň jedno z čísel je 5. Jaká je pravděpodobnost, že součet je 7?“

Pravděpodobnost $\frac{2}{11}$ je řešení podobné, ale jinak formulované úlohy:

Příklad

Krupiér hodí dvěma kostkami. Zajímá jej výskyt čísla 5. Pokud číslo 5 nepadne, hází znovu, dokud alespoň jedno číslo 5 nepadne a řekne „Alespoň jedno z čísel je 5. Jaká je pravděpodobnost, že součet je 7?“

Důvod:

Jestliže jev B nenastal (krupiér nehodí 5, ale dvě jiná čísla), tak $P(B)$ je nulová a nemůžeme pracovat s podmíněnou pravděpodobností $P(A|B)$.

Závislé a nezávislé jevy

Nezávislost pravděpodobnostních jevů intuitivně zřejmá:
Pravděpodobnost toho, že nastane jeden jev, není ovlivněna skutečným výsledkem druhého jevu, a naopak.
(principiálně podobné *nezávislým výběrům* z Kapitoly 2.)

Nezávislé jevy:

- dva hody toutéž kostkou za sebou,
- jeden hod s více kostkami,
- hod kostkou a současné zamíchání karet,
- postupná losování z osudí, jestliže vracíme vylosované objekty (dva různé tahy sportky).

Závislé jevy:

- vrchní a spodní číslo padlé při jednom hodu kostky,
- výběr první spolu s výběrem druhé karty ze zamíchaného balíčku,
- postupná losování z osudí, jestliže vylosované objekty ponecháme mimo osudí.

Definice

Nezávislé jevy A, B jsou takové, pro které platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Alternativně:

Jev A je nezávislý na B, jestliže pravděpodobnost jevu A při současném jevu B je stejná jako pravděpodobnost jevu A obecně, tedy úměrou

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(\Omega)} \qquad \text{nebo} \qquad P(A|B) = P(A).$$

Definice jsou ekvivalentní.

Otázky

Z osudí sportky vylosujeme jeden míček, potom druhý míček

- jaká je pravděpodobnost, že první míček je 1?
- jaká je pravděpodobnost, že druhý míček je 2?
- jaká je pravděpodobnost, že druhý míček je 2, když první míček byl 1?
- jak se pravděpodobnost změní, jestliže před druhým losováním první míček vrátíme?

Střední hodnota (někdy také „očekávaná hodnota)“

Podívejme na náhodné procesy, jejichž výsledkem je (přirozené) číslo. Omezíme se jen na procesy s konečně mnoha výsledky.

Definice náhodné proměnné X

Výsledek náhodného procesu, jejichž výsledkem je předem neurčené číslo, budeme nazývat náhodnou proměnnou X.

Definice střední hodnoty

Nechť náhodná proměnná X nabývá k možných hodnot z množiny $\{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$, kde $h_i \in \mathbb{R}$ nastává s pravděpodobností p_i, a $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$. *Střední hodnotou proměnné* X je pak číslo

$$E(X) = EX = \sum_{i=1}^{k} p_i h_i = p_1 \cdot h_1 + p_2 \cdot h_2 + \cdots + p_k \cdot h_k.$$

Příklad

Jaká je střední hodnota (průměr) čísel padlých na šestistěnné kostce?

$$E(K) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{21}{6} = 3.5.$$

Příklad

Jaká je střední hodnota čísel padlých na kostce, kde číslo 6 má dvakrát větší pravděpodobnost výskytu než ostatní?

$$E(K) = \frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{1}{7} \cdot 2 + \frac{1}{7} \cdot 3 + \frac{1}{7} \cdot 4 + \frac{1}{7} \cdot 5 + \frac{2}{7} \cdot 6 = \frac{27}{7} \doteq 3.8571.$$

Příklad

V kapse je dvacetikoruna, pětikoruna a koruna. Náhodně jednu minci vytáhneme. Větší mince má vždy dvakrát větší šanci být vytažena než menší mince. Jaká je střední hodnota vytažené mince M?

$$p_1 = \frac{1}{7},\ p_5 = \frac{2}{7},\ p_{20} = \frac{4}{7}, \quad E(M) = \frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{2}{7} \cdot 5 + \frac{4}{7} \cdot 20 = \frac{91}{7} = 13.$$

Součet středních hodnot

Pro libovolné dvě náhodné proměnné X, Y platí

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

Součin středních hodnot

Pro libovolné dvě nezávislé náhodné proměnné X, Y platí

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

Příklad

Jaká je střední hodnota součtu čísel padlých na dvou šestistěnných kostkách?

S využitím předchozího výsledku a Věty o součtu středních hodnot

$$E(K_1 + K_2) = E(K_1) + E(K_2) = 3.5 + 3.5 = 7.$$

Příklady

Jaká je střední hodnota součinu čísel padlých na dvou šestistěnných kostkách?

S využitím prvního výsledku a věty o součinu středních hodnot

$$E(K_1 \cdot K_2) = E(K_1) \cdot E(K_2) = 3.5 \cdot 3.5 = 12.25.$$

Totéž jinak $E(K_1 \cdot K_2) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{36} \cdot i \cdot j = \frac{441}{36} = \frac{49}{4} = 12.25.$

Jaký je průměrný součin čísel horní a spodní stěny stejné kostky při hodech?

Střední hodnota čísla na horní stěně je 3.5 a na dolní stěně také 3.5.
Střední hodnota jejich součinu však není $3.5 \cdot 3.5 = 12.25$, protože tyto dva jevy nejsou nezávislé.
Místo toho střední hodnotu součinu spočítáme podle definice

$$\frac{1}{6}(1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1) = \frac{56}{6} \doteq 9.3333.$$

Pozor na nezávislost jevů při násobení středních hodnot!

Náhodné výběry

Časté typy *konečných uniformních náhodných výběrů* v diskrétní matematice:

Náhodná podmnožina Z dané n-prvkové množiny vybíráme libovolnou z 2^n jejích podmnožin, každou s pravděpodobností 2^{-n}.

Náhodná permutace Ze všech $n!$ permutací dané n-prvkové množiny vybíráme libovolnou jednu s pravděpodobností $1/n!$.

Náhodná kombinace Ze všech $\binom{n}{k}$ k-prvkových kombinací dané n-prvkové množiny vybíráme libovolnou jednu s pravděpodobností $1/\binom{n}{k}$.

Náhodná posloupnost bitů Vybíráme libovolně dlouhou posloupnost z 0 a 1 tak, že každý další bit je vybírán s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ (nezávisle na všech předchozích bitech, podobně jako při hodu mincí).
Každá vybraná podposloupnost této náhodné posloupnosti musí mít stejnou šanci se objevit.

Příště

Kapitola 4. Další početní postupy

- princip inkluze a exkluze
- metoda dvojího počítání
- binomická věta
- několik důkazů „počítáním“