Diskrétní matematika

Petr Kovář
petr.kovar@vsb.cz

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

zimní semestr 2022/2023
DiM 470-2301/01, 470-2301/03*, 470-2301/05

O tomto souboru

Tento soubor je zamýšlen především jako pomůcka pro přednášejícího. Řadu důležitých informací v souboru nenajdete, protože přednášející je říká, ukazuje, případně maluje na tabuli. Přednášky jsou na webu k dispozici, aby studenti mohli snadno dohledat probíraná témata z přednášek, které zameškali.

Pro samostatné studium doporučuji skripta:

- M. Kubesa: Základy diskrétní matematiky, výukový text
- P. Kovář: Úvod do teorie grafů, výukový text

Pro přípravu ke zkoušce a písemkám doporučuji cvičebnici:

- P. Kovář: Cvičení z diskrétní matematiky, sbírka příkladů

Vše na http://homel.vsb.cz/~kov16/predmety_dm.php

Kapitola 2. Základní kombinatorické výběry

- permutace, kombinace a variance bez opakování
- složené výběry
- kombinatorické pravidlo součtu a kombinatorické pravidlo součinu
- permutace, kombinace a variance s opakováním

Základní kombinatorické výběry

Budeme se zabývat výběry prvků nějaké množiny

- uspořádané / neuspořádané výběry,
- bez opakování / s opakováním prvků.

Dnes:

- permutace (bez opakování)
- kombinace (bez opakování)
- variace (bez opakování)
- + úlohy, které řešíme počítáním takových výběrů
- závislé a nezávislé výběry
- permutace (s opakováním)
- kombinace (s opakováním)
- variace (s opakováním)
- + úlohy, které řešíme počítáním takových výběrů

Pozor! Při řešení praktických úloh máme obvykle složený výběr, musíme rozpoznat společné/rozdílné vlastnosti.

- složené výběry především na cvičení

Definice

Mějme libovolné přirozené číslo n.
Permutace bez opakování na n-prvkové množině X je libovolné uspořádání všech prvků množiny X do nějaké posloupnosti. Jejich počet značíme $P(n)$.

Počet všech permutací n-prvkové množiny

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

- první prvek vybíráme z n možností
- druhý prvek vybíráme z $n-1$ možností
- třetí prvek vybíráme z $n-2$ možností...

Úlohy, které vedou na permutace (bez opakování)

- počet uspořádání nějaké množiny
- počet bijektivních zobrazení n prvkové do n-prvkové množiny
- počet různých rozmíchání karet
- přidělení startovních čísel na maratonu
- počet různých obsazení hotelových pokojů

Definice

k-prvková kombinace bez opakování na *n*-prvkové množině X je libovolný neuspořádaný výběr k prvků této množiny. Jejich počet značíme $C(n,k)$.

Všimněte si, že výběr je k-prvková podmnožina X.

Počet k-prvkových kombinací na n-prvkové množině

$$C(n,k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

- $n!$ možností jak seřadit prvky X
- vybereme prvních k prvků (nezajímá nás počet pořadí $k!$)
- zahodíme posledních $n-k$ prvků (nezajímá nás počet pořadí $(n-k)!$)

Úlohy, které vedou na kombinace bez opakování

- počet podmnožin s předepsaným počtem prvků (konečné) množiny
- binomické koeficienty: koeficient u členu x^k ve vztahu $(x+1)^n$

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Definice

k-prvková variace bez opakování na n-prvkové množině X je libovolný uspořádaný výběr k prvků množiny X, přičemž žádný prvek se ve výběru neopakuje. Počet všech variací značíme $V(n,k)$.

Počet k-prvkových variací na n-prvkové množině

$$V(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- první prvek vybíráme z n možností
- druhý prvek vybíráme z $n-1$ možností
- ...
- k-tý prvek vybíráme z $n-k+1$ možností

nebo

- $n!$ možností jak seřadit prvky X
- zajímá nás prvních k prvků
- zahodíme posledních $n-k$ prvků (nezajímá nás počet pořadí $(n-k)!$)

Úlohy, které vedou na variace bez opakování

- výběr k-prvkové posloupnosti (různých prvků) z n prvků
- počet injektivních (prostých) zobrazení k prvkové do n-prvkové množiny
- pořadí prvních tří vítězů závodu
- počet různých ubytování hostů v poloprázdném hotelu

Příklady

- čtyřčlenný tým z deseti zaměstnanců
  jedná se o *kombinace* (nezávisí na pořadí vybraných zaměstnanců)

$$C(10,4) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 7}{1} = 210$$

- počet zápasů tenisového turnaje sedmi hráčů
  jedná se o *kombinace* (dvouprvkové podmnožiny sedmi prvkové množiny)

$$C(7,2) = \binom{7}{2} = 21$$

Příklady

- počet výsledných pořadí tenisového turnaje sedmi hráčů
  jedná se o *permutace*

$$P(7) = 7! = 5040$$

- počet trojic na stupni vítězů tenisového turnaje sedmi hráčů
  jedná se o 3-prvkové *variace*, neboť „závisí na pořadí“

$$V(7,3) = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Složené výběry

Někdy počty dvou různých výběrů sčítáme, někdy násobíme, jak poznáme, co je správně?

Kombinatorické pravidlo součtu

Jestliže existuje n_1 výběrů daného typu provedených jedním způsobem a n_2 výběrů provedených druhým způsobem, přičemž žádný z těchto výběrů nelze provést oběma způsoby, pak existuje právě $n_1 + n_2$ výběrů daného typu.
„BUĎ n_1 způsobů NEBO n_2 způsobů."

Kombinatorické pravidlo součinu (též Princip nezávislých výběrů)

Mějme výběr, který se sestává ze dvou podvýběrů. Jestliže první podvýběr můžeme provést n_1 způsoby a druhý výběr n_2 způsoby, přičemž počet způsobu jednoho podvýběru nezávisí na volbě druhého podvýběru, pak existuje $n_1 \cdot n_2$ výběrů daného typu.
„Nejprve n_1 způsobů A potom n_2 dalších způsobů."

Jestliže výběr rozdělíme na dvě disjunktní množiny možností, tak počty možností sčítáme.

Příklad

Ve hře „člověče nezlob se“ házíme kostkou a postupujeme figurkou o příslušný počet políček. Jestliže při prvním hodu padne šestka, házíme ještě jednou. O kolik políček se může figurka posunout?

Rozlišíme dvě možnosti:

- pokud nepadne šestka, posuneme se o 1 až 5 políček,
- pokud padne 6, posuneme se o $6 + 1$ až $6 + 6$ políček (dalších 6 možností).

Celkem máme 11 možností: 1, 2, 3, 4, 5, (6 ne!) 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Jestliže jeden výběr rozdělíme do dvou úrovní (podvýběrů), tak počty výběrů násobíme.

Příklad

Hokejový trenér sestavuje formaci (tři útočníky, dva obránce a jednoho brankáře). K dispozici má 12 útočníků, 8 obránců a dva brankáře. Kolik různých formací lze sestavit?

Protože mezi výběrem útočníků, výběrem obránců ani výběrem brankářů není žádná vazba, můžeme počítat

$$\binom{12}{3} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{2}{1} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 2 = 220 \cdot 28 \cdot 2 = 12320.$$

Celkem existuje 12 320 různých formací.

Když jsou výběry závislé...

nemůžeme násobit počty jednotlivých výběrů.

Příklad

Hokejový trenér sestavuje tým (tři útočníky, dva obránce a jednoho brankáře). K dispozici má 11 útočníků, 8 obránců, 1 univerzálního hráče (buď v obraně nebo v útoku) a dva brankáře. Kolik různým týmů lze sestavit?

- vybrat 3 útočníky: $\binom{12}{3}$
- vybrat 2 obránce: $\binom{8}{2}$ nebo $\binom{9}{2}$?

Přijde na to, zda univerzálního hráče vybral do útoku nebo ne.
Nelze použít kombinatorické pravidlo součinu! ... řešení na cvičení

Otázka

Házíme třikrát kostkou. Kolik existuje takových možností, kdy v každém dalším hodu padají větší a vetší čísla?

Metoda dvojího počítaní

Nechť každý případ nějakého (složeného) výběru lze dále rozlišit (*zjemnit*) na stejný počet ℓ možností. Dále nechť získaný (zjemněný) výběr má celkem m různých možností (které umíme spočítat).
Potom počet všech možností původního výběru *je dán podílem* m/ℓ.

Příklad

Šest spolužáků šlo do kina. Kolika způsoby si mohou sednout do jedné řady tak, aby Adam seděl více vpravo, než Bedřich?
Máme šest spolužáků, označme Adama A, Bedřicha B.

Pokud rozlišíme všechna rozsazení, máme $P(6) = 6! = 720$ možností.
Adam buď více vlevo, nebo více vpravo než Bedřich, vždy dvě možnosti:

$$XXAXBX = XXBXAX.$$

V celkovém počtu $m = 720$ možností je každá možnost započítanou dvakrát $\ell = 2$. Jen jedna je příznivá. Hledaný počet různých rozsazení je

$$\frac{m}{\ell} = \frac{720}{2} = 360.$$

Výběry s opakováním

Doposud nebylo opakování prvků výběru žádoucí (osoby, podmnožiny, ...)
Avšak někdy je možnost opakování prvků při výběrech užitečná (opakování písmen, vlastností, ...)

Příklad

Kolik existuje anagramů slova MISSISSIPPI?
(*anagram* je slovo sestavené z písmen daného slova)

Pokud by se ve slově MISSISSIPPI neopakovalo žádné písmeno, jednalo by se o permutace. Avšak opakují se: S 4krát, I 4krát, P 2krát.

Metodou dvojího počítání:

1. rozlišíme všechna písmena (barevně, pomocí indexů, apod.)
2. spočítáme všechna pořadí: $(4+4+2+1)!$
3. vydělíme počtem možností, které nechceme nerozlišovat $4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!$

$$\frac{(4+4+2+1)!}{4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 = 34650$$

Definice

Permutace s opakováním na n-prvkové množině je libovolné uspořádaní prvků této množiny, přičemž každý prvek se v takto vzniklé posloupnosti vyskytuje **předepsaný počet** krát. Počet značíme $P^*(m_1, m_2, \ldots, m_n)$.

Výběr je posloupnost (seřazení) předepsaných počtů identických kopií prvků.

Počet všech permutací s opakováním n-prvkové množiny, kde i-tý prvek se opakuje m_i-krát (pro $i = 1, 2, \ldots, n$):

$$P^*(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \frac{(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)!}{m_1! \cdot m_2! \cdots m_n!}$$

Příklady

- permutace s opakováním 2 prvků, jeden k-krát, druhý $(n-k)$-krát
$$\frac{(k+n-k)!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} = C(n,k).$$
  první prvek = „je“, druhý prvek = „není“ ve vybrané množině
- permutace multimnožin (v multimnožině se prvky mohou opakovat)

Příklad, který ilustruje pojem kombinace s opakováním

Příklad

Kolika různými způsoby můžeme vybrat 6 kuliček ze tří barev, jestliže počet kuliček stejné barvy není omezený?

Ukážeme si elegantní způsob, jak spočítat celkový počet výběrů.
Vybereme například ${\color{red}\bullet}, {\color{blue}\bullet}, {\color{red}\bullet}, {\color{red}\bullet}, {\color{green}\bullet}, {\color{blue}\bullet}$
Uvedený výběr *můžeme seřadit* podle barev

$${\color{red}\bullet\ \bullet\ \bullet}|{\color{green}\bullet}|{\color{blue}\bullet\ \bullet}$$

vidíme, že barvy nehrají roli, avšak důležité jsou „oddělovače" přihrádek

$$\bullet\ \bullet\ \bullet|\bullet|\bullet\ \bullet$$

Celkový počet výběrů je

$$C^*(3,6) = \binom{6+2}{2} = \binom{8}{2} = 28.$$

Definice

k-prvková kombinace s opakováním na n-prvkové množině X, je nějaký **neuspořádaný** výběr k prvků z X, přičemž prvky výběru se mohou opakovat **v libovolném počtu** identických kopií. Počet značíme $C^*(n,k)$.

Výběr je „multimnožina“, dovolíme opakování kopií prvků ve výběru.

Počet všech k-prvkových kombinací s opakováním z n možností je

$$C^*(n,k) = \binom{k+n-1}{n-1}.$$

- máme-li n „barev“, potřebujeme $n-1$ oddělovačů
- můžeme „vybírat oddělovače“, nebo „vybírat prvky“

$$C^*(n,k) = \binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}.$$

Úlohy, které vedou na kombinace s opakováním

- zápis čísla k pomocí n nezáporných celočíselných sčítanců
- losování množiny k prvků z n druhů, kdy po každém tahu vracíme prvky do osudí

Příklad

Kolika způsoby můžeme zapsat číslo k jako součet n nezáporných celočíselných sčítanců? Rozlišujeme pořadí sčítanců!

Máme

$$k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Budeme vybírat k jedniček a rozdělovat je do n přihrádek (s možností opakování přihrádek).

- některé přihrádky mohou zůstat prázdné ($0 \in \mathbb{N}_0$)
- můžeme dát všechny jedničky do jedné přihrádky
- opakujeme přihrádky, nikoli jedničky (jiná úloha)

Otázky

Kolika způsoby můžeme zapsat číslo k jako součet n kladných sčítanců?

Kolika způsoby můžeme zapsat číslo k jako součet alespoň n sčítanců?

Kolika způsoby můžeme zapsat číslo k jako součet nejvýše n sčítanců?

Definice

k-prvková variace s opakováním na n-prvkové množině X je nějaká k-prvková posloupnost vybraná z množiny X a každý prvek množiny X se v posloupnosti může opakovat libovolný počet krát (nejvýše k krát). Počet všech variací značíme $V^*(n,k)$.

Všimněte si, že výběr je posloupnost.

Počet všech k-prvkových variací s opakováním z n možností je

$$V^*(n,k) = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k} = n^k.$$

Úlohy, které vedou na variace s opakováním

- počet zobrazení k-prvkové množiny do n-prvkové množiny
- mohutnost kartézské mocniny $|A^k|$

Otázka

Kolik má konečná množina podmnožin liché velikosti?

Příště

Diskrétní pravděpodobnost

- motivační příklady
- pravděpodobnostní prostor
- nezávislé jevy