Diskrétní matematika

Petr Kovář
petr.kovar@vsb.cz

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

zimní semestr 2022/2023
DiM 470-2301/01, 470-2301/03*, 470-2301/05

O tomto souboru

Tento soubor je zamýšlen především jako pomůcka pro přednášejícího. Řadu důležitých informací v souboru nenajdete, protože přednášející je říká, ukazuje, případně maluje na tabuli. Přednášky jsou na webu k dispozici, aby studenti mohli snadno dohledat probíraná témata z přednášek, které zameškali.

Pro samostatné studium doporučuji skripta:

- M. Kubesa: Základy diskrétní matematiky, výukový text
- P. Kovář: Úvod do teorie grafů, výukový text

Pro přípravu ke zkoušce a písemkám doporučuji cvičebnici:

- P. Kovář: Cvičení z diskrétní matematiky, sbírka příkladů

Vše na http://homel.vsb.cz/~kov16/predmety_dm.php

Číslo předmětu: 470-2301/01, 470-2301/03*, 470-2301/05
Rozsah: 6 kreditů (2/2/2), *5 kreditů (2/2/1)
Garant: Petr Kovář
Přednáší: cz: Petr Kovář, Michael Kubesa, en: Tereza Kovářová

Web: am.vsb.cz/kovar
Email: petr.kovar@vsb.cz
Kancelář: EA536

Bodové hodnocení

Zápočtové písemky

- každý týden (počínaje třetím)
- 2–10 minut
- bodují se 0/1/2 (ne/téměř správně/zcela správně)
- každý druhý týden navíc teoretická otázka
- počítá se 4 nejlepší 2-bodové a 4 nejlepší 3-bodové z 10 písemek
- celkem až 20 bodů
- při absenci studenta se písemka počítá za 0 bodů

Zadání cvičebních příkladů najdete na `http://am.vsb.cz/kovar`.

Rozděleno do 14 okruhů. Cvičící určí, ze kterých okruhů se píše písemka.

Bodové hodnocení (pokračování)

Samostatný projekt

- zadávání v druhé polovině semestru
- **projekt**: dva až čtyři příklady (diskrétní matematika & teorie grafů)
- Bonusové **“Projekty, pro ty, kteří se chtějí něco naučit”**
  dva příklady (1 diskrétní matematika & 1 teorie grafů)
- celkem 10 bodů (u bonusového výjimečně i více)
- pro získání zápočtu musí být projekt přijat
  (detailní popis projektu je na webu)
- samostatné vypracování, odevzdávárna `http://odevzdej.cz`
- dodržet termín odevzdání 28. listopadu 2022

Zápočet = alespoň 10 bodů a přijatý projekt.

Bodové hodnocení (pokračování)

Zkouška

- zkouškové termíny stanoveny koncem semestru
- celkem 70 bodů
- vzorová písemka na webu (`http://am.vsb.cz/kovar`)
- můžete používat jednu stranu A4 rukou psaných poznámek
  definice, věty a vztahy, ale nesmí obsahovat řešené příklady

Literatura

- (část textu M. Kubesa: Základy diskrétní matematiky, výukový text on-line).
- P. Kovář: Algoritmizace diskrétních struktur on-line.
- P. Kovář: Úvod do teorie grafů, výukový text on-line.
- P. Kovář: Cvičení z diskrétní matematiky, sbírka příkladů on-line.
- J. Matoušek, J. Nešetřil: Kapitoly z diskrétní matematiky, Karolinum Praha 2000.
- řešené příklady formou pencastů on-line.

Můžete používat i jiná skripta/knihy, ale pozor: detaily se mohou lišit!
U zkoušky nutno pracovat s pojmy, jak byly zavedeny na přednášce.

Konzultační hodiny

(předběžně) st 9:30–10:30 na EA536.

web http://am.vsb.cz/kovar

Ochutnávka problémů

Úlohy, které se naučíme během semestru řešit:

- podávání rukou...
- systematické vygenerování všech šestic na tikety sportky ...
- devět kamarádů si dává po třech dárcích...
- tři domy a tři studny...
- sedm mostů města Královce...
- chybějící cifra rodného čísla...
- oprava UPC kódu...
- Monty Hall...

Další zajímavé problémy i příklady k procvičení:
`http://am.vsb.cz/kovar`.

Kapitola 0. Opakování

- číselné obory
- množiny a množinové operace
- relace
- důkazové techniky
- matematická indukce
- horní a dolní celá část

Číselné obory a celočíselný interval

Přirozená a celá čísla

Přirozená čísla značíme $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ neobsahují číslo 0.
Přirozená čísla včetně nuly značíme $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.
Celá čísla značíme $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Interval celých čísel od *a* do *b*

je množina $\{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$.
Značíme $[a, b] = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$.

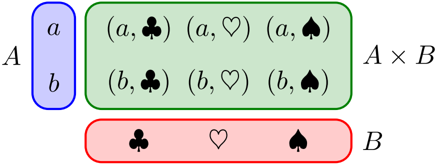
Srovnejte s intervalem reálných čísel (a, b).

Příklady

$[3, 7] = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ $[-2, -2] = \{-2\}$
$[5, 0] = \emptyset$ (prázdná množina)

Kartézský součin a kartézská mocnina

Kartézský součin množin $A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$
je množina všech uspořádaných dvojic prvků vybraných po složkách
z množin A a B v daném pořadí.
$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$
Pro $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$ dostaneme kartézskou mocninu A^n.
Definujeme $A^0 = \{\emptyset\}$, $A^1 = A$.



Kartézský součin množin $A \times B = \{a, b\} \times \{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$.

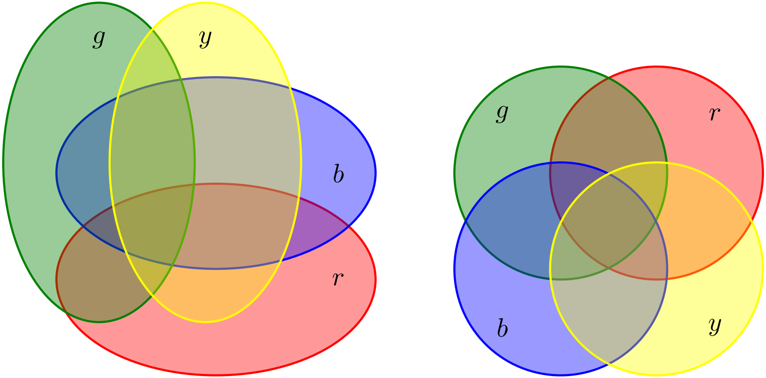
Potenční množina

je množina obsahující všechny podmnožiny množiny A

$$2^A = \{X : X \subseteq A\}.$$

Množinový systém nad A

nebo také systém množin nad A je nějaká množina $\mathcal{T} \subseteq 2^A$.
Dáváme přednost termínu „systém množin“ před „množina množin“.



Vlevo všechny možné podmnožniny množiny barev $C = \{r, g, b, y\}$.

Rozšířené sjednocení a průnik množin

Rozšířené sjednocení $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ a průnik $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$ množin.

Mějme indexovou množinu J, lze použít i $\bigcup_{j\in J} X_j$ a $\bigcap_{j\in J} X_j$.

Příklady

Pro každé $i \in \mathbb{N}$ položme $A_i = \{1, 2, \dots, i\}$.

$$\bigcup_{i=1}^{5} A_i = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad \bigcap_{i=1}^{5} A_i = \{1\}, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{1\}$$

Otázky

Jak vypadá $\bigcap_{j\in J} A_j$ pro $J = \{2, 5\}$?

Jak vypadá $\bigcup_{j\in J} A_j$ pro $J = \mathbb{N}$?

Definice

(Homogenní) binární relace R na množině A je libovolné podmnožina kartézského součinu $A \times A = A^2$, tj.

$$R \subseteq A^2.$$

Definice

(Homogenní) n-ární relace S na množině A je libovolné podmnožina kartézské mocniny $A \times A \times \cdots \times A = A^n$, tj.

$$S \subseteq A^n.$$

Příklad

- Relace mezi studenty, kteří získali stejnou známku z DiM.
- Relace mezi dvojicemi studentů, kdo má vyšší skóre z písemky.
- Relace mezi dokumenty s podobnými pojmy (plagiáty)...

Binární relace je speciální případ n-ární relace. (unární, ternární, ...).
(Homogenní) relace na dané množině je speciální případ (heterogenní) relace mezi množinami. Více v předměty UTI.

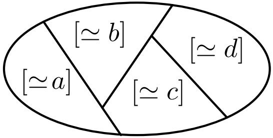
Relace ekvivalence

Definice

Ekvivalence na množině A je *reflexivní, symetrická a tranzitivní* binární relace na množině A. Značíme $\simeq$.

Definice

Mějme relaci ekvivalence $\simeq$ na množině A. Třídou ekvivalence prvku x (značíme $[\simeq x]$) rozumíme podmnožinu $[\simeq x] = \{z \in A : z \simeq x\}$.



Relace ekvivalence vyjadřuje vztah „mít stejnou vlastnost“.

Příklady

- relace kongruence (mít stejný zbytek po dělení číslem n); značí se $\equiv$
- relace vyjadřující vztah mezi studenty „mít stejnou známku z DIM“
- relace „synonyma v jazyce“ je (většinou) ekvivalence

Relace částečného uspořádání

Uspořádání a ekvivalence jsou nejběžnější typy relací.

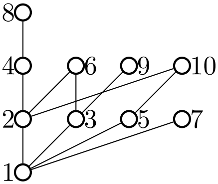
Definice

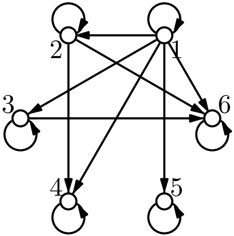
Částečné uspořádání $\preceq$ je *reflexivní, antisymetrická a tranzitivní* binární relace na množině A. Množina s relací $\preceq$ se nazývá poset.

Slovo *částečné* zdůrazňuje, že se nemusí jednat o *úplnou* relaci na A, tj. ne každá dvojice prvků musí být v relaci xRy nebo yRx.

Částečné uspořádání můžeme znázornit pomocí hasseovského diagramu

- je-li $x \preceq y$, bude prvek y zakreslen výš než prvek x,
- prvky x a y spojíme čárkou, jestliže $x \preceq y$; vynecháme všechny spojnice, které vyplynou z tranzitivity.





Pojem matematického důkazu

Struktura věty (tvrzení) v matematice: $P \Rightarrow D$

Přesně formulované předpoklady P, za kterých platí tvrzení věty D.

Podrobný postup, jak z předpokladů odvodit tvrzení věty nazýváme důkaz.

Matematický důkaz

nějakého tvrzení D je konečná posloupnost kroků/výroků, kde každý krok je:

- axiom – obecně platný či předpokládaný fakt (volba axiomů závisí na matematické teorii*),
- předpoklad P je podmínka, na kterou se omezíme,
- výrok odvozený z předchozích kroků užitém některého z platných odvozovacích pravidel (závisí na použité logice).

Poslední krok obsahuje jako výrok *tvrzení* D.

*Různá odvětví matematiky vychází z různých axiomů. Zatímco diskrétní matematika vychází z Peanových axiomů, například geometrie (nejstarší exaktně budovaná matematická disciplína) vychází z pěti Euklidových axiomů.

Peanovy axiomy

Slovní formulace

- Existuje přirozené číslo (zpravidla označované 0), které není následníkem žádného čísla.
- Ke každému přirozenému číslu n existuje jeho následovník $S(n)$.
- Různá přirozená čísla mají různé následovníky.
- Pokud pro nějakou vlastnost X přirozených čísel platí
  - číslo 0 má vlastnost X a
  - pokud z toho, že vlastnost X má přirozené číslo n plyne, že vlastnost X má i jeho následovník $S(n)$,

  pak vlastnost X již mají všechna přirozená čísla včetně 0.

K čemu to budu jako absolvent potřebovat?

„K čemu je novorozeně?“

- správné pochopení omezení použitých metod
- argumentace pro a proti navrženému řešení
- srovnání kvality různých řešení
- 100% korektnost metody/algoritmu je někdy vyžadována (autopilot, jednotka intenzivní péče, řízení satelitů)

Princip matematické indukce

Princip matematické indukce je jedna z nejčastěji používaných důkazových technik pro tvrzení (výrokové formy) závislé na přirozeném parametru n (označujeme $P(n)$).

Matematická indukce

Mějme tvrzení $P(n)$ s celočíselným parametrem n. Nechť platí:

- *Základ indukce:*
  Tvrzení $P(n_0)$ je pravdivé, kde $n_0 = 0$ nebo 1, nebo obecné celé n_0.
- *Indukční krok:*
  Vyslovíme indukční předpoklad: Pro nějaké n tvrzení $P(n)$ platí.
  Ukážeme, že pro každé $n > n_0$ z platnosti $P(n)$ plyne platnost $P(n+1)$.

Pak $P(n)$ platí pro všechna přirozená $n \geq n_0$.

Matematickou indukci lze úspěšně využívat při dokazování správnosti algoritmů.

Ukážeme několik příkladů...

Počkat!

Ale. . .

- ukážeme základ indukce,
- ukážeme platnost indukčního kroku (s využitím indukčního předpokladu),

. . . nicméně tvrzení má platit pro nekonečně mnoho hodnot!?!

Příklad

Jak vysoko lze vystoupat na žebřík?

Předpokládejme, že umíme

- vstoupit na první příčku,
- z každé příčky n vystoupit na příčku $n + 1$.

. . . tak umíme vystoupat libovolně vysoko!

Věta

Součet prvních n sudých čísel je $n(n+1)$.

$2+4+6=12=3\cdot 4$

$2+4+6+8+10+12+14+16+18+20=110=10\cdot 11$

Důkaz matematickou indukcí vzhledem k n:

Dokazujeme, že $\forall n\in\mathbb{N}$ platí $\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$.

- *Základ indukce:* Pro $n=1$ tvrzení P(1) zní „$2=1\cdot 2$“.
- *Indukční krok:* Plyne z platnosti $P(n)$ platnost $P(n+1)$?

  Tj. pokud $\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$, tak $\sum_{i=1}^{n+1} 2i = (n+1)(n+2)$?

  Vyslovíme *indukční předpoklad* P(n):
  Předpokládejme, že $\exists n\in\mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$.
  Nyní
  $\sum_{i=1}^{n+1} 2i = \sum_{i=1}^{n} 2i + 2(n+1) \overset{IP}{=} n(n+1)+2(n+1) = (n+1)(n+2)$.
  Ukázali jsme že s využitím znalosti vztahu pro součet prvních n sudých čísel lze obdržet odpovídající vztah pro součet prvních $n+1$ sudých čísel.

Podle principu matematické indukce tvrzení platí $\forall n\in\mathbb{N}$. $\square$

Silná matematická indukce (ve srovnání s matematickou indukcí)

Matematická indukce

Mějme tvrzení $P(n)$ s celočíselným parametrem n. Nechť platí:

- *Základ indukce:*
  Tvrzení $P(n_0)$ je pravdivé, kde $n_0 = 0$ nebo 1, nebo obecné celé n_0.
- *Indukční krok:*
  Vyslovíme indukční předpoklad: Pro nějaké n tvrzení $P(n)$ platí.
  Ukážeme, že pro každé $n > n_0$ z platnosti $P(n)$ plyne platnost $P(n+1)$.

Pak $P(n)$ platí pro všechna přirozená $n \geq n_0$.

Silná matematická indukce

- *Základ indukce:* Tvrzení $P(n_0)$ je pravdivé.
- *Indukční krok:*
  Indukční předpoklad: Tvrzení $P(k)$ platí pro všechna $n_0 \leq k < n$.
  Ukážeme, že pak platí také $P(n)$.

Pak $P(n)$ platí pro všechna přirozená $n \geq n_0$.

Příklad

Pro nalámání čokolády rozměru $p \times r$ dílků je vždy potřeba $pr - 1$ zlomů.

Důkaz silnou matematickou indukcí podle $n = pr$:

- *Základ indukce:*
  Pro $n_0 = 1$ máme jeden dílek a je třeba $pr - 1 = 0$ zlomů.
- *Indukční krok:*
  Nechť nyní tvrzení platí pro všechny čokolády o méně než n dílcích. Mějme libovolnou tabulku o n dílcích. Tabulku rozlomíme a dostaneme dvě menší tabulky o s, t dílcích, kde $1 \leq s, t < n$ a $s + t = n$. Každou z nich umíme podle předpokladu nalámat pomocí $s - 1$ resp. $t - 1$ zlomů. Celkem je třeba $(s - 1) + (t - 1) + 1 = s + t - 1 = n - 1$ zlomů.

Podle principu silné matematické indukce tvrzení platí $\forall p, r \in \mathbb{N}$. $\square$

Horní a dolní celá část reálného čísla

Celá část reálného čísla

$\lfloor x \rfloor$ (dolní) celá část reálného čísla x

$\lceil x \rceil$ horní celou část reálného čísla x

Příklady

$\lfloor 3.14 \rfloor = 3 \qquad \lfloor -3.14 \rfloor = -4$

$\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{Z}$

Otázka

Udává výraz $\lceil \log n \rceil$ počet číslic n v desítkové soustavě?

Pokud ne, umíte najít „správnou“ formuli?

Otázka

$\left\lceil \frac{n}{n+1} \right\rceil =?$, kde $n \in \mathbb{N}$ (a pro $n \in \mathbb{N}_0$?)

Kapitola 1. Posloupnosti

- posloupnosti
- sumy a produkty
- aritmetická posloupnost
- geometrická posloupnost

Posloupnost

Posloupnost je seřazením několika prvků.
Konečnou posloupnost značíme $(a_i)_{i=1}^{n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Nekonečnou posloupnost značíme $(a_i)_{i=1}^{\infty} = (a_i) = (a_1, a_2, \ldots)$.

- v matematické analýze definovány jako zobrazení $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
- umíme určit první, druhý, třetí, ... prvek posloupnosti
- indexy jsou přirozená čísla, obvykle od 1
- prvky posloupnosti se mohou opakovat (na rozdíl od množin)
- posloupnost může být i prázdná

Příklady

(x, v, z, v, y)
$(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29)$
$(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots)$
$(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$

Zadáváme: výčtem prvků, rekurentně nebo vztahem pro n-tý člen.

Suma

Suma je součet prvků posloupnosti, značíme

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$\sum_{i \in J} a_i = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n}, \text{ kde } J = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}.$$

Otázka

$$\sum_{i \in \{1,3,5,7\}} i^2 = ?$$

Příklad

$$\sum_{i=1}^{n} i = ?$$

Součin

Součin prvků posloupnosti, značíme

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

$$\prod_{i\in J} a_i = a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \ \cdots \ \cdot a_{i_n}, \text{ kde } J = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$$

Příklady

$$\sum_{i=2}^{5} \ln(i) = \ln\left(\prod_{i=2}^{5} i\right) = \ln(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = \ln 120$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i \cdot j) = \sum_{i=1}^{n}\left(i \cdot \sum_{j=1}^{n} j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$$

prázdný součet $\sum_{i=3}^{2} i = 0$ prázdný produkt $\prod_{i=3}^{2} i = 1$

Příklady

$$\sum_{i=1}^{n}(i+j) = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} j = \frac{n}{2}(n+1) + nj$$

$$J = \{2, 8, 12, 21\}, \qquad \sum_{j \in J} j = 2 + 8 + 12 + 21 = 43$$

Otázky

$$\sum_{i=1}^{5} \ln(i) = ? \qquad \sum_{i=1}^{100} i = ?$$

$$\prod_{i=1}^{6} i = ? \qquad \prod_{i=1}^{n} i = ?$$

$$\prod_{i=1}^{n} (n-i) = ? \qquad \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) = ?$$

Otázka

Existuje taková posloupnost $(a_i)_{i=1}^n$, že $\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{i=1}^n (-a_i)$?

Otázka

Najdete takovou posloupnost $(a_i)_{i=1}^n$, že $\sum_{i=1}^n a_i > 0$ a $\prod_{i=1}^n a_i < 0$?

Otázka

Existuje taková posloupnost *kladných* čísel $(a_i)_{i=1}^n$, že $\sum_{i=1}^n a_i > \prod_{i=1}^n a_i$?

Aritmetická posloupnost

Některé posloupnosti jsou speciální a umíme o nich mnoho říci.

Aritmetická posloupnost

Posloupnost (a_i) se nazývá aritmetická, jestliže má tvar

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad a+3d, \ldots$$

Reálné číslo a je počáteční člen a reálné číslo d je diference posloupnosti.

Všimněte si, že posloupnost (a_i) je aritmetická, jestliže existuje takové reálné číslo d, že pro každé $i > 1$ platí $a_i - a_{i-1} = d$.

Každý další člen vznikne z předchozího přičtením (stejné!) diference d.

Lze pracovat i s konečnou aritmetickou posloupností.
Máme n členů

$$a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d.$$

Příklady

$-2, 3, 8, 13, 18, \dots$ první člen -2, diference 5

$-3, 2, 7, 12, 17, \dots$ první člen -3, diference 5

$20, 9, -2, -13, -24, \dots$ první člen 20, diference -11

$\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots$ první člen $\sqrt{2}$, diference 0

Příklad

Sestavte vztahy pro n-tý člen posloupnosti a_n z předchozího příkladu

$-2, 3, 8, 13, 18, \dots$ $a_n = -2 + (n-1)5$

$-3, 2, 7, 12, 17, \dots$ $a_n = -3 + (n-1)5$

$20, 9, -2, -13, -24, \dots$ $a_n = 20 - (n-1)11$

$\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots$ $a_n = \sqrt{2}$

Příklad

Jakou posloupnost určuje vztah pro n-tý člen $a_n = -8 + 5n$?

Druhou posloupnost $-3, 2, 7, 12, 17, \dots$

Součet n členů aritmetické posloupnosti

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

V našem případě

$$a + (a + d) + \cdots + a + (n-1)d = \sum_{i=1}^{n} (a_1 + (i-1)d)$$

platí

$$\sum_{i=1}^{n} (a_1 + (i-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}.$$

Součet některých po sobě jdoucích n členů aritmetické posloupnosti

$$\sum_{i=k}^{k+n-1} a_i = \frac{n}{2}(a_k + a_{k+n-1}) = \frac{n}{2}(2a_k + (n-1)d) = na_k + \frac{n(n-1)d}{2}.$$

Několik postřehů

Součet nekonečné aritmetické posloupnosti obecně neexistuje.

Posloupnost částečných součtů

- diverguje k $+\infty$ pro $d > 0$,
- diverguje k $-\infty$ pro $d < 0$,
- pro $d = 0$ diverguje k $+\infty$ nebo k $-\infty$ nebo konverguje dle a_1.

Aritmetickou posloupnost s prvním členem a a diferencí d lze zadat rekurentně

$$a_n = a_{n-1} + d, \quad a_1 = a.$$

Příklad spoření

Příklad

Strýček Skrblík má v sejfu 4 514 centů. Každý týden ukládá do sejfu 24 centů. Sestavte vztah pro n-tý člen posloupnosti.

$$4\ 514, 4\ 538, 4\ 562, 4\ 586, \cdots = 4\ 514 + 24(n-1) = 4\ 490 + 24n.$$

Příklad

Strýček Skrblík má v sejfu 4 514 centů. Třem synovcům dá každému kapesné jeden cent a každý týden každému kapesné o cent zvýší.
a) Sestavte vztah pro celkovou výši kapesného v n-tém týdnu.
b) Sestavte vztah pro počet centů v sejfu za n týdnů.

a) kapesné $k = 3 + 3(n-1) = 3n$
b) v sejfu $s = 4\ 514 - \sum_{i=1}^{n} 3i = 4\ 514 - \frac{3}{2}n(n+1)$

Geometrická posloupnost

Geometrická posloupnost

Posloupnost (a_i) se nazývá geometrická, jestliže má tvar

$$a, \quad a \cdot q, \quad a \cdot q^2, \quad a \cdot q^3, \ldots$$

Reálné číslo a je počáteční člen a reálné číslo q je kvocient posloupnosti.

Všimněte si, že posloupnost (a_i) je geometrická, jestliže existuje takové reálné číslo q, že pro každé $i > 1$ platí $\frac{a_i}{a_{i-1}} = q$.

Každý další člen vznikne z předchozího vynásobením (stejným!) kvocientem q.

Lze pracovat i s konečnou geometrickou posloupností. Pro n členů

$$a, \quad a \cdot q, \quad a \cdot q^2, \ldots, \quad a \cdot q^{n-1}.$$

Otázka

Může být posloupnost současně geometrická a současně aritmetická? Pokud ano, najdete více možností? Nekonečně mnoho?

Příklady

$2, 10, 50, 250, 1250, \dots$ první člen 2, kvocient 5

$9, 6, 4, \frac{8}{3}, \frac{16}{9}, \dots$ první člen 9, kvocient $\frac{2}{3}$

$4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ první člen 4, kvocient $-\frac{1}{2}$

$\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots$ první člen $\sqrt{2}$, kvocient 1

Příklad

Sestavte vztahy pro n-tý člen a_n posloupností z předchozího příkladu.

$2, 10, 50, 250, 1250, \dots$ $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$

$9, 6, 4, \frac{8}{3}, \frac{16}{9}, \dots$ $a_n = 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{27}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$

$4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ $a_n = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$

$\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots$ $a_n = \sqrt{2}$

Příklad

Jakou posloupnost určuje vztah pro n-tý člen $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$? $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

Součet n členů geometrické posloupnosti

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

V našem případě

$$a + (a \cdot q) + \cdots + a \cdot q^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} (a_1 \cdot q^{i-1})$$

pro $q \neq 1$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} (a_1 \cdot q^{i-1}) = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Pro $q = 1$ je posloupnost současně aritmetická a její součet počítáme jinak.

Otázka

Jak vypadá součet prvních n členů geometrické posloupnosti
s kvocientem 1?

Několik postřehů

Součet nekonečné geometrické posloupnosti

- obecně neexistuje pro $|q| \geq 1$,
- pro $q = 1$ konstantní posloupnost; součet závisí na a_1,
- pro $q = -1$ oscilující posloupnost, součet nemá
- pro $|q| < 1$ konečný součet $\frac{a_1}{1-q}$

Posloupnost částečných součtů

- diverguje pro $q \geq 1$,
- osciluje (a nekonverguje) pro $q \leq -1$,
- konverguje k $\frac{a_1}{1-q}$ pro $|q| < 1$.

Geometrickou posloupnost s prvním členem a a kvocientem q lze zadat rekurentně

$$a_n = a_{n-1} \cdot q, \quad a_1 = a.$$

Příklad spoření

Příklad

Strýček Skrblík má v bance uloženo 4 514 centů. Každý rok mu úspory zúročí dvěma procenty (bez zaokrouhlení). Sestavte vztah pro částku za n let.

$$4\ 514, 4\ 604.3, 4\ 696.4, 4\ 790.3, 4\ 886.1, 4\ 983.8, \cdots = 4\ 514 \cdot 1.02^{n-1}.$$

Příklad

Strýček Skrblík má v sejfu 4 514 centů. Třem synovcům dá každému kapesné jeden cent a každý týden každému kapesné zdvojnásobí.
a) Sestavte vztah pro celkovou výši kapesného v n-tém týdnu.
b) Sestavte vztah pro počet centů v sejfu za n týdnů.

a) kapesné $k = 3 \cdot 2^{n-1} = \frac{3}{2} \cdot 2^n$
b) v sejfu $s = 4\ 514 - \sum_{i=1}^{n} 3 \cdot 2^{i-1} = 4\ 514 - 3 \cdot (2^n - 1)$

Příklad

Vychýlíme kyvadlo do výšky 5 cm. Vlivem tření se při každém kmitu sníží energie kyvadla o jednu pětinu. Sestavte posloupnost výšek, do jakých kyvadlo vystoupá po každém kmitu.

$$5 \text{ cm}, \quad 4 \text{ cm}, \quad \frac{16}{5} \text{ cm}, \quad \frac{64}{25} \text{ cm}, \quad \frac{256}{125} \text{ cm}, \ldots, \quad 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \text{ cm}$$

první člen 5 cm,
kvocient $\frac{4}{5}$.

Otázka

Po kolika kmitech se kyvadlo zastaví?

Příští přednáška

Základní kombinatorické výběry

- princip nezávislých výběrů
- kombinatorické pravidlo součtu
- kombinatorické pravidlo součinu
- metoda dvojího počítání