DISKRÉTNÍ MATEMATIKA

a

ÚVOD DO TEORIE GRAFŮ

(příklady k procvičení)

Petr Kovář

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úvodem

Tento text je zatím pracovní. Původně soubor obsahoval přípravy na cvičení a poznámky k předmětu Diskrétní matematika pro zimní semestr 2006/2007. Nyní je k dispozici také celá řada příkladů k procvičení. Na začátku většiny kapitol najdete i řešené příklady.

Chtěl bych poděkovat studentům Pavle Kabelíkové a Tomáši Kupkovi, kteří pomáhali s přípravou některých příkladů a také Michalu Kubesovi, ktery pozorně prošel většinu řešených příkladů. Poděkování patří i dalším studentům a kolegům: Martinu Čermákovi, Oldřichu Vlachovi, Tereze Kovářové, Adamu Silberovi, Lukáši Rapantovi, Matěji Krbečkovi a Jirkovi Fialovi, kteří odhalili celou řadu chyb a překlepů.

K použitým symbolům

Příklady označené „*“ patří k náročnějším. Jejich řešení obvykle vyžaduje delší výpočet nebo pečlivější rozbor. Při řešení příkladů označených „**“ je třeba nějaký nápad nebo výsledek z jiné oblasti matematiky. Zdůrazněme ale, že hvězička neznamená nutně „to nikdy nevyřeším“.

Naproti tomu příklady označené „$^\heartsuit$“ jsou tak lehké, že jejich řešení je možné zpaměti jen s užitím základních pojmů.

V Paskově 19. října 2014.

Obsah

Cvičení před přednáškou

Podmínky zápočtu

Oficiální informace o předmětu v Edisonu (`http://edison.vsb.cz`)

- hodnocení v průběhu studia,
- termínech písemných testů,
- termíny zkoušky,
- možnost (závazného) přihlášení ke zkoušce.

V tomto předmětu je 100b celkem, z toho 30b během semestru:

- 10b za projekt: projekty se nevrací k dopracování (pozor na dead line)
- 20b za písemky: každý týden 0/1/2b ze zadaných příkladů

Zápočtové písemky

- Každý týden semestru se na cvičení bude psát krátká zápočtová písemka (10 písemek).
- K vyřešení bude zhruba 2–10 minut, podle obtížnosti příkladu.
- Během písemek není možno používat literaturu, ani zápisky.
- Za každou písemku můžete získat 0/1/2 body (NE/TÉMĚŘ SPRÁVNĚ/ZCELA SPRÁVNĚ).
- Každá druhá písemka bude navíc obsahovat nějakou teoretickou otázku za 1 bod. Témata budou vybírána z látky probrané na přednáškách.
- Při absenci se písemka hodnotí 0 body.
- Na konci semestru se každému vezmou body **osmi nejlepších** písemek (čtyř nejlepších dvoubodových písemek a čtyř nejlepších tříbodových písemek).

- Témata a typové příklady písemek najdete `http://am.vsb.cz/kovar`
- Alespoň týden předem budou k dispozici také zadání příkladů.
- Při neúčasti máte možnost zjistit, co bylo probráno a na jaké téma se bude psát další písemka.

Samostatný projekt

Během semestru budou zveřejněna témata samostatných písemných projektů.

- Každý student vypracuje jedno zadání podle čísla, které mu bude přiděleno.
- Pro získání zápočtu musíte mít *přijatý* referát, tj. kromě řešení musí vyhovět i formálním požadavkům.
- Referát obsahuje cca 4 příklady
- Příklady se hodnotí buď za 0, 1 nebo 2 bodů, (NE/TÉMĚŘ SPRÁVNĚ/ZCELA SPRÁVNĚ), lehčí za 0 nebo 1 bod, (NE/ZCELA SPRÁVNĚ).
- V případě, že si student zvolí variantu „Projekt pro ty, kteří se chtějí něco naučit“, tak v případě mimořádně kvalitního referátu lze udělit až 10 bodů.
- Celkem je za samostatné referáty 6 (ve výjimečných případech až 10) bodů.

Referát má pevně stanovený termín odevzdání, který musíte dodržet.

- Každý musí sepsat svůj referát sám, žádná spolupráce na výsledném textu referátu není dovolena.
- Je dovoleno o zadání referátu diskutovat se spolužáky a věnovat příkladům nějaký čas na cvičeních.
- Referát odevzdáváte e-mailem nebo na papíře příslušnému vyučujícímu (kontakt je uveden u každého zadání).
- Předepsaný formát je PDF nebo postscript.

Zkouška

- Předmět je zakončen písemnou zkouškou, až 70 bodů.
- Přihlašení ke zkouškce je možné pouze prostřednictvím Edisonu.
- Ke zkoušce mohou jít pouze studenti, kteří získali zápočet.
- Přihlášky jsou závazné a v případě nepřítomnosti na zkoušce je student hodnocen 0 body.

Podrobné informace jsou v Edisonu a také na stránkách `http://am.vsb.cz/kovar/`.

Další poznámky

- pokud má někdo uznaný zápočet z loňského roku, musí se rozhodnout, zda ho bude chtít uznat nebo zda bude chodit znovu a výsledky v Edisonu mu zrušíme
- 14 dní na přesuny mezi skupinami
- při přesunu dát vědět oběma vyučujícím

Literatura:

- M. Kubesa. Základy diskrétní matematiky, výukový text I, FEI VŠB–TUO, 2012.
- P. Kovář. Úvod do teorie grafů, výukový text II, FEI VŠB–TUO, 2012.
- P. Hliněný. Diskrétní matematika, výukový text on-line, FEI VŠB–TUO, 2004.
- J. Matoušek, J. Nešetřil. Kapitoly z diskrétní matematiky, Karolinum Praha 2000.

- přehled přednášek je na webu `http://am.vsb.cz/kovar/predmety_dm_prubeh.php`

0 Motivační příklady

0.0.1. Devět kamarádů si na Vánoce dalo dárky. Každý dal dárky třem svým kamarádům. Ukažte, že není možné, aby každý dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal. [rozborem dvojic nebo s využitím principu sudosti]

0.0.2. „Tři domy a tři studny." Podle pověsti žily v Temném hvozdu tři čarodejnice. Každá bydlela ve své vlastní sluji a každá potřebovala k provozování své živnosti vodu ze tří studánek: s živou vodou, s mrtvou vodou a s pitnou vodou. Jenomže cestou ke studánkám se čarodejnice nesmí potkat, ani zkřížit vyšlapanou cestičku jiné čarodejnice. Jak mohla vypadat mapa lesa se slujemi, studnami a cestičkami? Pokud řešení neexistuje, pečlivě zdůvodněte. [takové uspořádání nemůže existovat, pověst není pravdivá]

0.0.3. „Sedm mostů města Královce" Městem Královec (nyní Kaliningrad na území Ruska) teče řeka Pregola, která vytváří dva ostrovy. V 18. století byly ostrovy spojeny s oběma břehy i navzájem celkem sedmi mosty. Otázka zní, zda je možné všechny mosty přejít tak, aby ten, kdo se o to pokouší, vstoupil na každý most pouze jednou. [řešení nemůže neexistovat; příslušný graf není eulerovský]

0.0.4. „Dokonalý kompresní algoritmus" Najděte alespoň jeden příklad dokonalého bezztrátového kompresního a dekompresního algoritmu, (máte najít dva algoritmy):

1. postup, jak z libovolné posloupnosti bajtů $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sestavit kratší posloupnost $c_1, c_2, \ldots, c_m$, kde $m < n$, a současně
2. postup, jak z posloupnosti $c_1, c_2, \ldots, c_m$ sestavit zpět posloupnost $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Pokud takový algoritmus neexistuje, pečlivě zdůvodněte. [algoritmus nemůže existovat; neexistuje bijektivní zobrazení mezi konečnými množinami různé velikosti]

0.0.5. „Lámání čokolády" Tabulka čokolády se skládá z $m \times n$ čtverečků. Chceme ji nalámat na jednotlivé čtverečky. Najděte (a dokažte) jaký je *nejmenší* počet zlomů, abychom čokoládu $m \times n$ rozdělili na jednotlivé čtverečky? [nejmenší možný počet lámání je $mn - 1$]

0.0.6. „Handshaking problem" Máme skupinu n lidí ($n \geq 2$) z nichž někteří si podali ruce. Ukažte, že ve skupině jsou alespoň dva lidé, kteří podali ruku stejnému počtu lidí ve skupině. [rozborem dvou případů a užitím Dirichletova principu]

Část I
Základy diskrétní matematiky

1 Množiny, součty a součiny

Nejprve připomeneme, že známý vztah pro součet prvních n kladných celých čísel je

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1). \tag{1}$$

Podrobněji si o základních kombinatorických pojmech přečtete v úvodní kapitole skript [ZDM].

Řešené příklady

1.0.1. Vypočtěte $\sum_{i=-3}^{4} \frac{3+i}{2}$.
Pro přehlednost si sumu rozepíšeme, což zkušenější počtář dělat nemusí.

$$\sum_{i=-3}^{4} \frac{3+i}{2} = 0+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\frac{5}{2}+\frac{6}{2}+\frac{7}{2}$$

Dále postupujeme substitucí $j=i+3$.

$$\sum_{i=-3}^{4} \frac{3+i}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=-3}^{4}(3+i) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{7} j$$

S využitím vztahu (1) dostaneme

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{7} j = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}(1+7) = 14.$$

1.0.2. Upravte na celočíselný zlomek $31,2\overline{71}$.
Označíme si $a = 31,2\overline{71}$. Protože se za desetinou čárkou opakují číslice 71, vynásobíme číslo a číslem 100, dostaneme $100a = 3127,1\overline{71}$. Nyní odečteme čísla tak, aby se periodický rozvoj odečetl. Dostaneme

$$\begin{aligned} 100a - a &= 3127,1\overline{71} - 31,2\overline{71} \\ 99a &= 3095,9 \\ 990a &= 30959 \\ a &= \frac{30959}{990}. \end{aligned}$$

Proto $31,2\overline{71} = \frac{30959}{990}$.

1.0.3. Určete doplněk množiny všech sudých čísel $\mathbb{S}$

a) v množině $\mathbb{N}$,
Doplněk $\overline{S} = \mathbb{N} \setminus \mathbb{S}$ jsou všechna lichá čísla, tj. $\overline{S} = \{2k+1 \colon k \in \mathbb{N}\}$.

b) v množině $\mathbb{R}$. Doplněk $\overline{S} = \mathbb{N} \setminus \mathbb{S}$ jsou všechna reálná čísla, která nejsou sudá čísla, tj. $\overline{S} = \{x \colon x \in \mathbb{R},\ \text{přičemž } x \neq 2k, \text{ kde } k \in \mathbb{N}\}$.

1.1 Čísla, operace, množiny

1.1.1. Vypočítejte následující sumy nebo produkty.

a) Vypočtěte $\sum_{i=2}^{5} \frac{1}{2j}$. $\left[\frac{2}{j}\right]$

b) Vypočtěte $\sum_{j=2}^{5} \frac{1}{2j}$. $\left[\frac{77}{120}\right]$

c) Vypočtěte $\sum_{i=1}^{4} i^3$. $[100]$

d) Vypočtěte $\prod_{i=0}^{n} \frac{i}{i+1}$. $[0]$

e) Vypočtěte $\prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}$. $\left[\frac{1}{n+1}\right]$

1.1.2. Najděte obecný vztah pro součet prvních k lichých čísel. $\left[k^2\right]$

1.1.3. Najděte obecný vztah pro součet prvních k sudých kladných čísel. $[k(k+1)]$

1.1.4. Ukažte, že aritmetický průměr libovolného sudého počtu po sobě jdoucích čísel není celé číslo. $\left[a - 1 + k + \frac{1}{2}\right]$

1.1.5.$^\heartsuit$ Zapište funkci součet prvků množiny $A = \{18, 25, 31, 67, 202, 301, 356\}$ pomocí sumy. $\left[\sum_{i\in A} i = \sum_{i\in\{18,25,31,67,202,301,356\}} i\right]$

1.1.6.$^\heartsuit$ Vypočítejte

a) $\lfloor 2.7 \rfloor$. $[2]$

b) $\lfloor -2.7 \rfloor$. $[-3]$

c) $\lfloor \frac{22}{10} \rfloor$. $[2]$

d) $\lfloor -\frac{22}{10} \rfloor$. $[-3]$

e) $\lfloor -\pi \rfloor$. $[-4]$

f) $\lfloor -e \rfloor$. $[-3]$

g) $P = \lfloor \frac{n+1}{n} \rfloor$, pro $n \in \mathbb{N}$ [pro $n = 0$ nemá smysl, pro $n = 1$ vyjde $P = 2$, jinak $P = 1$]

1.1.7.* Zapište funkci $\lfloor\rfloor$ pomocí $\lceil\rceil$. $[\lfloor x \rfloor = -\lceil -x \rceil]$

1.1.8.* Zapište funkci $\lceil\rceil$ pomocí $\lfloor\rfloor$. $[\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor]$

1.1.9. Upravte na celočíselný zlomek $1,\overline{23}$. $\left[\frac{122}{99}\right]$

1.1.10.* Ukažte, že $\lfloor 1.\overline{9} \rfloor = 2$ [úpravou na celočíselný zlomek]

1.1.11.* Ukažte, že $\lceil 1.\overline{9} \rceil = 2$ [úpravou na celočíselný zlomek]

1.1.12. Ukažte, že $\lceil \lceil x \rceil \rceil = \lceil x \rceil$ [$\lceil x \rceil$ je celé číslo]

1.1.13. Jak vyjádříte klasické zaokrouhlení pomocí $\lfloor\rfloor$? $[\lfloor x + 0.5 \rfloor]$

1.1.14.* Jak vyjádříte klasické zaokrouhlení pomocí $\lceil\rceil$? $[-\lceil -0.5 - x \rceil]$

1.1.15. Nakreslete graf funkcí $\lfloor \sin x \rfloor$, $\lceil \cos x \rceil$ a $\lfloor \tan x \rfloor$.

1.1.16. Kolik prvků má $2^{\{1,2,3,4\}}$? Rozepište. [16 prvků, $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$]

1.1.17. Rozepište potenční množinu množiny $B = \{1, 2, 3\}$. $\left[2^B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}\right]$

1.1.18.$^\heartsuit$ Máme dány množiny $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\circ, \star\}$.

a) Kolik prvků má sjednocení $A \cup B$? $[5]$

b) Kolik prvků má průnik $A \cap B$? $[0]$

c) Kolik prvků má rozdíl $A \setminus B$? $[3]$

d) Kolik prvků má kartézský součin $A \times B$? $[6]$

e) Kolik prvků má součin $A \times 2^B$? $[12]$

f) Rozepište kartézský součin $A \times B$. $[A \times B = \{(1,\circ),(2,\circ),(3,\circ),(1,\star),(2,\star),(3,\star)\}]$

g) Rozepište kartézský součin $B \times A$. $[B \times A = \{(\circ,1),(\circ,2),(\circ,3),(\star,1),(\star,2),(\star,3)\}]$

h) Rozepište rozdíl $A \setminus B$. $[A \setminus B = A]$

i) Rozepište rozdíl $B \setminus A$. $[B \setminus A = B]$

j) Rozepište součin $A \times 2^B$. $\big[A \times 2^B = \{(1,\emptyset),(1,\{\circ\}),(1,\{\star\}),(1,\{\circ,\star\}),(2,\emptyset),(2,\{\circ\}),$ $(2,\{\star\}),(2,\{\circ,\star\}),(3,\emptyset),(3,\{\circ\}),(3,\{\star\}),(3,\{\circ,\star\})\}\big]$

1.1.19. Určete doplněk množiny B v množině A, kde $A = \mathbb{R}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 2\}$. $\big[\overline{B} = (-2,2) = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| < 0\}\big]$

1.1.20. Určete průnik a sjednocení množin $A = \mathbb{N}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \geq 3\}$. $[A \cap B = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 3\} = \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$, $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq -3 \vee x \geq 0\} = \mathbb{Z} \setminus \{-2,-1\}]$

1.1.21. Určete rozdíly $A \setminus B$, $B \setminus A$, kde $A = \mathbb{N}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \geq -7\}$. $[A \setminus B = [0,6]$, $B \setminus A = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq -7\} = \{-7-x : x \in \mathbb{N}\}]$

1.1.22.$^\heartsuit$ Kdy platí

a) $A \cap B = A$? [je-li $A \subseteq B$]

b) $A \cup B = A$? [je-li $B \subseteq A$]

c) $A \cup B = A \cap B$? [pro $A = B$]

1.1.23.* Dokažte matematickou indukcí, že $|2^A| = 2^{|A|}$. [Indukcí vzhledem k $|A|$.]

1.2 Příklady k procvičení

1.2.1. Existuje taková posloupnost $(a_i)_{i=1}^n$, že $\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{i=1}^n (-a_i)$? Pokud ano, uveďte příklad! [ano, například $(a_i)_{i=1}^n = (-1)_{i=1}^n$ pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$]

1.2.2. Existuje taková posloupnost $(a_i)_{i=1}^n$, že $\sum_{i=1}^n a_i > 0$ a $\prod_{i=1}^n a_i < 0$? Pokud ano, uveďte příklad! [ano, například $(a_1,a_2) = (-1,3)$]

1.2.3. Existuje taková posloupnost *kladných* čísel $(a_i)_{i=1}^n$, že $\sum_{i=1}^n a_i > \prod_{i=1}^n a_i$? Pokud ano, uveďte příklad! [ano, například $(a_1,a_2) = (0.1,0.2)$]

1.2.4.$^\heartsuit$ Je některá množina podmnožinou každé množiny? Pokud ano, uveďte příklad. [ano, prázdná množina]

1.2.5. Upravte, čemu se rovná

a) $A \cap (B \cup C) = ?$ $[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

b) $A \cup (B \cap C) = ?$ $[(A \cup B) \cap (A \cup C)]$

c) $\overline{A \cap B} = ?$ ($\overline{X}$ značí doplněk množiny X) $[\overline{A} \cup \overline{B}]$

1.2.6. Kdy je potenční množina 2^A

a) jednoprvková? [pouze pro $A = \emptyset$]

b) dvouprvková [pouze pro $|A| = 1$]

c) tříprvková [nikdy]

d) prázdná [nikdy]

1.2.7. Kdy je kartézský součin dvou množin $A \times B$ prázdný? [pouze když $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$]

1.2.8. Je možno najít dvě takové množiny A, B, aby současně platilo $A \subset B$ i $A \in B$? [ano, například pro $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$]

1.2.9. Je možno najít dvě takové neprázdné množiny A, B, aby současně platilo $A \subset B$ i $A \in B$? [ano, například $A = \{a\}$, $B = \{a, \{a\}\}$]

1.2.10. Dělové koule si dělostřelci stavěli do pyramid.

a) Pyramida buď měla čtvercovou základnu např. 4×4 koule, na ní dali vrstvu 3×3 koule, pak 2×2 koule a na vrchol 1 kouli. Tato pyramida měla celkem 30 koulí. Kolik celkem koulí by měla pyramida o základně $n \times n$ koulí? $\left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]$

b) Pyramida mohla mít založenou podstavu ve tvaru rovnoramenného trojúhelníku z 15 koulí, na ní byla další vrstva 10 koulí, další vrstva měla 6 koulí, pak 3 koule a na vrcholu byla 1 koule. Celkem měla taková pyramida 35 koulí. Kolik celkem koulí by měla pyramida o základně s hranou z n koulí? $\left[\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\right]$

2 Výběry prvků s opakováním i bez opakování prvků

Podrobněji si o základních o kombinatorických výběrech přečtete ve skriptech [ZDM].

Řešené příklady

2.0.1. Vypočítejte, kolika způsoby lze na klasické šachovnici (8×8 polí) vybrat

a) trojici libovolných políček,

Jedná se o neuspořádaný výběr (nezáleží na pořadí, v jakém políčka vybereme) tří políček z 64. $C(64,3) = \binom{64}{3} = \frac{64\cdot 63\cdot 62}{6} = 32 \cdot 21 \cdot 62 = 41\ 664$.

b) trojici políček tak, že žádné dvě neleží v témže sloupci,

Nejprve vybereme tři sloupce z osmi. Jedná se o neuspořádaný výběr $C(8,3)$, protože nezáleží který sloupec vybereme nejdřív a který později.

Potom, podle principu nezávislých výběrů, v každém sloupci vybereme jedno políčko. Bude se jednat o upořádaný výběr s opakováním tří políček z osmi, protože v každém sloupci můžeme vybrat libovolné z osmi políček. $C(8,3) \cdot V^*(8,3) = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{6} \cdot 8^3 = 28\ 672$.

Stejný výsledek bychom dostali, pokud bychom nejprve vybrali tři řady.

c) trojici políček tak, že žádné dvě neleží v témže sloupci ani v téže řadě,

Opět nejprve vybereme tři sloupce z osmi, což je celkem $C(8,3)$ možností.

Potom, opět podle principu nezávislých výběrů, v každém sloupci vybereme jedno políčko. Bude se jedna o upořádaný výběr bez opakování tří políček z osmi, protože v každé řadě můžeme vybrat nejvýše jedno políčko. $C(8,3) \cdot V(8,3) = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{6} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 56^2 \cdot 6 = 18\ 816$.

Stejný výsledek bychom dostali, pokud bychom nejprve vybrali tři řady.

d) trojici políček, která jsou všechna téže barvy.

Máme dvě možnosti, jaké barvy budou políčka. Podle principu nezávislých výběrů můžeme pro každou barvu vybrat tři libovolná políčka z množiny 32 políček stejné barvy. proto počet možností je dán součinem $C(2,1) \cdot C(32,3) = 2 \cdot \binom{32}{3} = 2 \cdot \frac{32\cdot 31\cdot 30}{6} = 32 \cdot 31 \cdot 10 = 9\ 920$.

2.0.2. Kolika způsoby je možné napsat k jako součet n sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.
Hledáme počet přirozených řešení rovnice

$$k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Představíme si k je součet jedniček. Nyní každé z těchto k jedniček přiřadíme jednu z n přihrádek. Výběr přihrádek (sčítanců) je neuspořádaný s možností opakování:

$$C^*(n,k) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Dostaneme různé způsoby, jak sestavit číslo k jako součet n sčítanců, přičemž pořadí sčítanců hraje roli, protože jsme rozlišovali přihrádky (sčítance) při výběru.

2.0.3. Kolika způsoby je možné napsat číslo k jako součet n sčítanců 1 a 2? (počet sčítanců n je pěvně dán) Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.
Ze zadání plyne, že $\lceil \frac{k}{2} \rceil \le n \le k$ (neboli $n \le k \le 2n$), jinak by úloha neměla řešení. Hledáme počet celočíselných řešení rovnice

$$k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

kde $1 \le x_i \le 2$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Představíme si číslo k je součet jedniček. do každé z n proměnných $x_1, \ldots, x_n$ přiřadíme jednu jedničku a zbývajících $k - n$ jedniček rozdělíme do *různých* proměnných jako do různých přihrádek. Výběr přihrádek je neuspořádaný, bez možnosti opakování (jinak by sčítance mohly být i větší než 2. Hledaný počet možností pak je

$$C(n, k-n) = \binom{n}{k-n}.$$

2.0.4. Kolika způsoby můžeme na šachovnici rozestavit všech 32 figur? Započítáme i ty možnosti, které nemohou nastat během regulérní hry (pěšec v první řadě, dva králové na sousedních polích, dva bílí střelci na černých polích, …).

Protože se jedná o rozmístění *všech* figur na šachovnici, úlohu snadno vyřešíme pomocí permutací s opakováním (uspořádaný výběr, kde počet opakování každé figury je přesně dán). Na šachovnici je

- 1 bílý a 1 černý král,
- 1 bílá 1 černá královna,
- 2 bílé a 2 černé věže,
- 2 bílí a 2 černí střelci,
- 2 bílí a 2 černí jezdci,
- 8 bílých a 8 černých pěšců

a 32 neobsazených polí. Šachovnici si můžeme představit jako posloupnost 64 polí (pole rozlišujeme podle toho, kde se na šachovnici nebo v posloupnosti nachází). Sestavíme všchna možná pořadí z 32 figur a 32 neobsazených polí. Nerozlišíme pořadí dvojice věží, jezdců ani střelců, nerozlišíme pořadí pěšců stejné barvy ani pořadí neobsazených polí. Pro pořet různých rozestavení dostaneme vztah

$$P^*(1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,8,8,32) = \frac{64!}{(1!)^4(2!)^6(8!)^2 32!} = \frac{64!}{2^6(40320)^2 32!} = \frac{64 \cdot 63 \cdots 33}{2^6 40320^2} =$$

$$= 4634726695587809641192045982323285670400000 \doteq 4.6347 \cdot 10^{42}.$$

2.0.5. Kolik sčítanců dostaneme po umocnění trojčlenu $(a+b+c)^7$? Úlohu řešte kombinatorickou úvahou, nikoliv rozepisováním binomického rozvoje.

Pokud roznásobíme všech 7 závorek a sečteme odpovídající členy, bude každý člen obsahovat sedm součinitelů, každý se může opakovat v libovolném počtu kopií (0 až 7). Nebude však hrát roli pořadí, v jakém bylo sedm součinitelů ze tří možností vybráno, proto počet členů je roven počtu kombinací tříprvkové množiny $\{a, b, c\}$ s možností opakování. Existuje celkem $C^*(3,7) = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = \frac{9\cdot 8}{2} = 36$ různých členů.

Poznámka:

Obdobně pro druhou mocninu dostaneme známý vztah $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$ se šesti členy, neboť $C^*(3,2) = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$.

Poznámka:

Pokud rozlišujeme i všechny sčítance se stejnými členy, například členy $a^4b^2c^1$ a $a^3b^2ac^1$ považujeme za různé, tak se jedná o výběr, kdy ze tří součinitelů vybíráme sedmkrát s možností opakování, přičemž rozlišujeme pořadí součinitelů. Takových sčítanců je $V^*(3,7) = 3^7 = 2187$.

2.1 Výběry bez opakování

2.1.1. Máme prázdnou množinu $\emptyset$.

a) Kolika způsoby můžeme seřadit prvky $\emptyset$ do posloupnosti? [1]

b) Kolika způsoby můžeme vybrat $\emptyset$ z nějaké množiny? [1]

c) Jak by se tyto počty změnily, kdyby $0! \neq 1$? [počet výběru stejný, nebylo by však možno použít vztahy pro kombinační čísla a faktoriál]

2.1.2.$^{\heartsuit}$ Pro jaké hodnoty n a k je více k-prvkových podmnožin z n prvkové množiny než $(n-k)$-prvkových podmnožin? [stejně pro všechny hodnoty n a k]

2.1.3. Pro jaké hodnoty n a k je více k-prvkových variací z n prvkové množiny než $(n-k)$-prvkových variací? $\left[\text{pro } k > \frac{n}{2}\right]$

2.1.4. Vyjádřete bez kombinačních čísel $\binom{3n}{3}$ $\left[\frac{1}{2}n(3n-1)(3n-2)\right]$

2.1.5. Tenisový turnaj se hraje systémem každý s každým. Kolik se bude hrát zápasů, jestliže

a) se turnaje zúčastní 8 hráčů? [28]

b) se turnaje zúčastní 21 hráčů? [210]

2.1.6. Tenisového turnaje se účastní 8 hráčů. Kolik je různých pořadí na stupních vítězů? [336]

2.1.7. Upravte a porovnejte $\binom{6n}{3}$ a $\binom{3n}{6}$. $\left[\text{pro } n = 2, 3, 4 \text{ je větší } \binom{6n}{3} \text{ a pro } n \geq 5 \text{ je větší } \binom{3n}{6}\right]$

2.1.8.$^{\heartsuit}$ Kolik způsoby se může postavit pět artistů na sebe? $[P(5) = 5! = 120]$

2.1.9. Kolika způsoby můžeme postavit šest artistů do pyramidy $3+2+1$, přičemž rozlišujeme pouze kdo stojí na zemi, kdo v první vrstvě a kdo nahoře? $\left[P^*(3,2,1) = \frac{720}{6\cdot 2} = 60\right]$

2.1.10. Máme šest karet.

a) Kolika způsoby můžeme vybrat dvě karty? [15]

b) Kolika způsoby můžeme vybrat dvě karty, jestliže rozlišuje pořadí? [30]

2.1.11. Házíme dvakrát kostkou a výsledky zapisujeme.

a) Kolik různých výsledků můžeme dostat, jestliže rozlišujeme pořadí hodů? [36]

b) Kolik různých výsledků můžeme dostat, jestliže nerozlišujeme pořadí hodů? [21]

2.1.12. Máme n lidí. Jak velké skupinky vybírat, aby byl počet možností co největší? $\left[k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right]$

2.1.13. Ukažte několika způsoby, že $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ [úpravou faktoriálů nebo kombinatoricky jako počet k-prvkových podmnožin]

2.1.14. Ukažte několika způsoby, že $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ [úpravou faktoriálů nebo kombinatoricky jako počet $k+1$-prvkových podmnožin s jedním významným prvkem]

2.1.15.* Hokejový trenér má k dispozici 13 útočníků a 9 obránců. Kolika způsoby vybereme pětku (2 obránce + 3 útočníci), jestliže jeden konkrétní útočník může hrát i v obraně? [12276]

2.1.16. Vlajka má být sestavena ze tří různobarevných vodorovných pruhů. K dispozici jsou látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté.

a) Kolik různých vlajek můžeme sestavit? [60]

b) Kolik z nich má modrý pruh? [36]

c) Kolik jich má modrý pruh uprostřed? [12]

d) Kolik jich nemá uprostřed červený pruh? [48]

2.1.17. Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá z deseti číslic vyskytuje nejvýše jednou. Kolik z nich je menších než 50 000? [27 216, 12 096]

2.1.18. Na konferenci vystoupí šest přednášejících: A, B, C, D, E, F. Určete počet

a) všech možných pořadí jejich vystoupení; [720]

b) všech pořadí, v nichž vystoupí A po E; [360]

c) všech pořadí, v nichž vystoupí A ihned po E. [120]

2.1.19. Kolika způsoby můžeme n lidí posadit

a) do řady [$n!$]

b) do řady, v níž je člověk A na kraji; [$2(n-1)!$]

c) do řady tak, aby lidé A a B neseděli vedle sebe; [$(n-2)\cdot(n-1)!$]

d) kolem kulatého stolu (dvě rozesazení považujeme za různá, pokud se alespoň jednomu člověku změní soused po pravé či levé ruce). [$(n-1)!$]

2.1.20. Kolika způsoby můžeme ze sedmi mužů a čtyř žen vybrat šestičlennou skupinu, tak aby v ní byly

a) právě dvě ženy; [210]

b) alespoň dvě ženy; [371]

c) nejvýše dvě ženy; [301]

2.2 Výběry s opakováním

2.2.1. Kolik existuje anagramů slova MISSISSIPPI? [34650]

2.2.2. Kolik existuje anagramů slova MISSISSIPPI, které neobsahují IIII? [33810]

2.2.3. Kolik existuje anagramů slova MISSISSIPPI, které neobsahují II? [7350]

2.2.4. Kolik existuje anagramů slova ABRAKADABRA,

a) všech? [83160]

b) které začínají a končí písmenem B? [1512]

c) které začínají nebo končí písmenem B? [28728]

d) které začínají a končí písmenem A? [15120]

e) které neobsahují BB? [68 040]

f) které neobsahují AA? [3780]

g) ve kterých písmeno K předchází písmeno D? [41580]

2.2.5. Na patnáct stožárů v řadě budou pověšeny vlajky pěti zemí, každá třikrát. Kolik existuje možností? [168168000]

2.2.6. Kolik je trojciferných čísel dělitelných

a) dvěma? [450]

b) pěti? [180]

c) třemi? [300]

d) sedmi? [128]

2.3 Příklady k procvičení

2.3.1. Kolika způsoby je možné napsat číslo 7 jako součet právě čtyř přirozených sčítanců? (dovolíme i nulové sčítance!) Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců. [120]

2.3.2. Kolika způsoby je možné napsat číslo 7 jako součet právě čtyř kladných přirozených sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců. [20]

2.3.3. Kolika způsoby je možné napsat k jako součet n kladných sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců. $\left[\binom{k-1}{n-1}\right]$

2.3.4. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit? [286]

2.3.5. Máme 7 *různých* figurek a tři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit? [2187]

2.3.6. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak některé figurky obarvit? [1001]

2.3.7. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit, přičemž od každé barvy by měla být alespoň jedna figurka? [84]

2.3.8. Kolika způsoby můžeme posadit n lidí kolem kulatého stolu? Ve dvou rozdílných rozesazeních má některý člověk jiného souseda po levé nebo po pravé ruce. $[(n-1)!]$

2.3.9. Kolika způsoby můžeme posadit n manželských párů kolem kulatého stolu tak, aby manželé seděli vždy vedle sebe? Ve dvou rozdílných rozesazeních má některý člověk jiného souseda po levé nebo po pravé ruce. $[2^n(n-1)!]$

2.3.10. Dříve byly státní poznávací značky osobních automobilů tvořeny uspořádanou sedmicí, jejíž první tři členy byly písmena a další čtyři číslice. Kolik poznávacích značek bylo možno sestavit, jestliže pro první část značky bylo možno použít každé z 26 písmen (každá možnost povolena nebyla). [175760000]

2.3.11. Určete počet všech *nejvýše* k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny. $\left[\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\right]$

2.3.12. Kolik je všech pěticiferných přirozených čísel? Kolik z nich je menších než 50 000? [90000, 40000]

2.3.13. Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel dělitelných 9, v jejichž dekadickém zápisu mohou být pouze číslice 0, 1, 2, 5, 7. [54]

2.3.14. V sáčku jsou červené, modré a zelené kuličky (kuličky téže barvy jsou nerozlišitelné). Určete, kolika způsoby lze vybrat pět kuliček, jestliže v sáčku je

a) aspoň pět kuliček od každé barvy; [21]

b) pět červených, čtyři modré a čtyři zelené kuličky. [19]

2.3.15.* Kolika způsoby je možné napsat číslo k jako součet sčítanců 1 a 2? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců. $\left[\sum_{n=\lceil \frac{k}{2}\rceil}^{k}\binom{n}{k-n}\right]$

2.3.16.* Jaký je počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a každá jejich strana má velikost vyjádřenou některým z čísel $n+1, n+2, n+3, ...2n$, kde n je přirozené číslo. $\left[\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\right]$

2.3.17. Kolik přímek lze proložit 7 body, jestliže žádné tři body neleží v přímce? [21]

2.3.18. Kolik přímek lze proložit 7 body, jestliže právě tři body leží v přímce? [19]

2.3.19. Máme dány dvě mimoběžky. Na jedné je m bodů, na druhé n bodů. Kolik lze sestrojit čtyřstěnů s vrcholy v daných bodech? $\left[\binom{m}{2}\cdot\binom{n}{2}\right]$

2.3.20. Kolika způsoby můžete seřadit v poličce pět učebnic angličtiny, čtyři učebnice matematiky a dvě učebnice českého jazyka, jestliže mají zůstat rozděleny do skupin po jednotlivých předmětech? [34560]

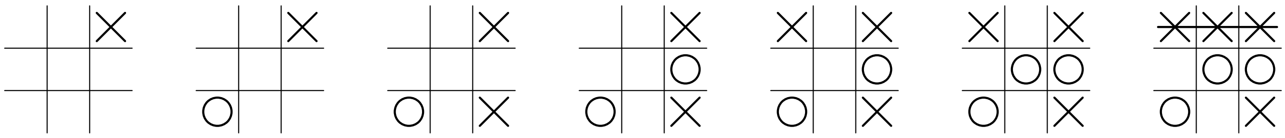
2.3.21. Na hlídku půjdou 4 vojáci z čety. Kolik vojáků má četa, jestliže výběr je možno provést 210 způsoby? [10 vojáků]

2.3.22. Palindrom je slovo, které se píše stejně jako pozpátku. Anglická abeceda má 26 písmen. Kolik existuje palindromů (i nesmyslných) délky n z písmen anglické abecedy? $\left[26^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\right]$

2.3.23. Házíme třikrát kostkou. Kolik existuje takových možností, kdy v každém dalším hodu padají větší a větší čísla? [20]

2.3.24. Byli jsme čtyři, seděli v baru a popíjeli. Trápilo nás špatné svědomí, že místo abychom v životě dělali něco pořádného, jsme závislí na alkoholu. Tu k nám přistoupil rozjařený barman a namíchal nám sedm různých drinků tak, aby každý dostal alespoň jeden. Kolika způsoby to mohl provést, jestliže rozlišujeme pořadí drinků, které jsme vypili. [100800]

2.3.25. Hra *Tic-tac-toe* je hra s tužkou a papírem pro dva hráče X a O. Hráči střídavě zapisují křížky a kolečka do čtvercové sítě políček 3×3. Obvykle začíná X, jako na Obrázku 2.1. Hráč, který jako první umístí tři své symboly v jedné řadě, sloupci nebo diagonále, vyhraje.



Obrázek 2.1: *Jedna hra Tic-tac-toe.*

a)$^\heartsuit$ Kolik existuje různých rozmístění křížků a koleček (pět křížků a čtyři kolečka) na herním plánu? $\left[\binom{9}{4}\right]$

b) Kolik existuje různých rozmístění křížků a koleček na herním plánu, jestliže rozlišujeme pořadí tahů, křížky a kolečka se střídají? [362880]

c) Kolik existuje různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje X v pátém tahu? [1440]

d) Kolik existuje různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje O v šestém tahu? [5328]

e) Kolik existuje různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje X v sedmém tahu? [47952]

f) Kolik existuje různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje O v osmém tahu? [72576]

g)* Kolik existuje různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje X v devátém tahu? [81792]

h) Kolik existuje různých her Tic-tac-toe, které končí remízou? [46080]

i) Kolik existuje všech různých her Tic-tac-toe? [255168]

2.3.26. Počítač Kecálek ve filmu Rumburak dostal za úkol najít všechny dvojice slov složené z dvanácti písmen (mezeru nepočítáme). Kolik takových slov z 26 písmen existuje? $\left[11 \cdot 26^{12}\right]$

2.3.27. Zaklínadlo pro přesun do říše pohádek ve filmu Rumburak zní HUBERO KORORO. Kolik existuje anagramů tohoto zaklínadla složených ze dvou šestipísmenných slov? [3 326 400]

2.3.28. Zaklínadlo pro změnu počasí ve filmu Rumburak zní RABERA TAREGO. Kolik existuje anagramů tohoto zaklínadla složených ze dvou šestipísmenných slov? [6 652 800]

2.3.29. Na běžných dominových kostkách se vyskytují oka v počtu $0, 1, \ldots 6$. Každá dvojice počtu ok se s sadě vyskytuje na právě jedné kostce. Všechny kostky domina je možné položit do jediné řady tak, aby navazující kostky sdílely stejný počet ok. Nyní n-dominem budeme rozumět takovou sadu kostek, která obsahuje všechny dvojice počtů ok z rozsahu $0, 1, \ldots, n$. Pro jaká přirozená čísla n lze všechny kostky n-domina položit do jediné řady? [pro sudá $n > 0$]

2.3.30. Máme čtverečkovanou síť $m \times n$ čtverečků. Kolik různých obdélníků najdeme v síti? $\left[\binom{m+1}{2} \cdot \binom{n+1}{2}\right]$

2.3.31. Keltský druid Travedik vaří lektvary ze sta různých bylin. Mezi nimi je i šalvěj třeskutá, což je druidova nejmocnější bylinka. Při vaření lektvarů může použít jednu, dvě, tři, či libovolný větší počet bylin. Kterých lektvarů je více, těch, které šalvěj třeskutou obsahují a nebo těch, které ji neobsahují? [existuje více lektvarů, které vybranou bylinu obsahují]

2.3.32. Keltský druid Travedik vaří lektvary ze sta různých bylin. Mezi nimi jsou i šalvěj třeskutá a puchejřníček smradlavý, což jsou dvě Travedikovy nejmocnější bylinky. Při vaření lektvarů může použít jednu, dvě, tři, či libovolný větší počet bylin. Kterých lektvarů je více, těch, které obsahují šalvěj třeskutou a puchejřníček smradlavý a nebo těch, které alespoň jednu z těchto bylin neobsahují? [existuje více lektvarů, které některou vybranou bylinu neobsahují]

3 Diskrétní pravděpodobnost

Pokud není řečeno jinak, tak v tomto předpokládáme, že balíček karet obsahuje 32 karet, od sedmičky po eso ve čtyřech různých barvách (srdce, piky, káry a kříže). Klasická šestistěnná kostka je vyrobena tak, že součet ok na protilehlých stěnách je vždy sedm.

Všimněte si, že i v případě, kdy máme zamíchaný celý balíček karet, nemusíme někdy uvažovat šech 32! pořadí. Pokud se zajímáme o nějaký výběr, stačí pracovat s nějakým náhodným výběrem.

Podrobněji si o diskrétní pravděpodobnosti můžete přečíst ve skriptech [ZDM].

Řešené příklady

3.0.1. Hodíme současně sedmi kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že

a) padne součet 12?

Sestavíme pravděpodobnostní prostor s nosnou množinou Ω, kde každý elementární jev odpovídá jednomu hodu se sedmi kostkami (první až sedmá kostka). Tento pravděpodobnostní prostor je uniformní a má $V^*(6,7) = 6^7$ prvků.

Nejmenší možný součet při hodu sedmi kostkami je 7. Zbývá „rozdělit pět jednotek“ (ok = puntíků) mezi sedm kostek, jak se na některých stěnách při hodu se součtem 12 mohou objevit. Jedná se o neuspořádaný výběr s možností opakování. Existuje celkem $C^*(7,5) = \binom{11}{6} = \binom{11}{5} = 462$ takových možností. Jev „padne součet 12“ odpovídá podmnožině $A \subseteq \Omega$, přičemž A má 462 prvků. Protože daný pravděpodobnostní prostor je uniformní, hledaná pravděpodobnost je

$$P = \frac{\binom{11}{5}}{6^7} = \frac{462}{279936} = \frac{77}{46656}.$$

Poznámka:

Kdybychom se ptali na součet 13 nebo vyšší, úloha by byla obtížnější, protože na každé kostce je nejvýše šest ok (puntíků). Při výpočtu velikosti A bychom museli uvážit, aby sestavené možnosti odpovídaly sčítancům s nejvyšší hodnotou 6.

b) padne součet 13?

Sestavíme pravděpodobnostní prostor stejně jako v předchozí části.

Nejmenší možný součet při hodu sedmi kostkami je 7. Zbývá „rozdělit šest jednotek“ (ok = puntíků) mezi sedm kostek, nemůžeme však všechna oka umístit na jednu kostku, protože by tato kostka měla sedm ok (puntíků) na jedné stěně. Jedná se o neuspořádaný výběr s možností opakování. Odečteme počet takových možností, kdy všechny jednotky jsou přidány na jednu ze sedmi kostek. Existuje celkem $C^*(7,6) - C(7,1) = \binom{12}{6} - \binom{7}{1} = 924 - 7 = 917$ takových možností. Protože uniformní pravděpodobnostní prostor má $V(6,7) = 6^7$ prvků, hledaná pravděpodobnost je

$$P = \frac{\binom{12}{6} - \binom{7}{1}}{6^7} = \frac{917}{279936}.$$

3.0.2. Hoďme dvěma kostkami. Jsou jev *„padl součet* 6*“* a jev *„padl součin* 8*“* nezávislé?

Zavedeme pravděpodobnostní prostor

$$\Omega = \{(a,b) : 1 \leq a, b, \leq 6\}.$$

Jev A, kdy padne součet 6, je $A = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$. Jev B, kdy padne součin 8, je $B = \{(2,4),(4,2)\}$. Protože se jedná o uniformní pravděpodobnostní prostor, máme

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}, \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{36}, \quad P(A \cap B) = P(B) = \frac{2}{36}.$$

Pokud jsou jevy nezávislé, musí podle definice platit

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B).$$

Dosazením dostaneme

$$\frac{5}{36} \cdot \frac{2}{36} \neq \frac{2}{36},$$

proto jevy A a B nejsou nezávislé.

Jiné řešení:

Vyjdeme z alternativní definice nezávislosti jevů, která říká, že jevy A a B jsou nezávislé, jestliže pravděpodobnost jevu A nezávisí na tom, zda současně nastal nebo nenastal jev B:

$$\frac{P(A)}{P(\Omega)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Dosazením dostaneme

$$\frac{\frac{5}{36}}{1} \neq \frac{\frac{2}{36}}{\frac{2}{36}}$$

a proto jevy A, B nejsou nezávislé (jsou závislé).

3.0.3. V krabici je 5 koulí, 3 jsou bílé a 2 černé. Vytáhneme postupně dvě koule. Jaká je pravděpodobnost, že první je bílá a druhá černá?

3.0.4. Máme dva sáčky s kuličkami. V prvním sáčku jsou dvě kuličky s číslem 2 a tři kuličky s číslem 3. Ve druhém sáčku jsou 3 kuličky s číslem 4 a 2 kuličky s číslem 5. Taháme z obou sáčků po jedné kuličce. Jaký je průměrný součet tažených čísel?

Označíme X náhodnou veličinu udávající číslo tažené z prvního sáčku. Pro první sáček je $P(2) = \frac{2}{5}$ a $P(3) = \frac{3}{5}$, neboť losování jedné kuličky můžeme modelovat uniformním pravděpodobnostním prostorem Ω s pěti elementárními jevy – podle toho, která byla tažena kulička. Potom je

$$E(X) = 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{4+9}{5} = \frac{13}{5}.$$

Označíme Y náhodnou veličinu udávající číslo tažené z prvního sáčku. Analogicky jako v předchozím případě odvodíme, že pro druhý sáček je $P(4) = \frac{3}{5}$ a $P(5) = \frac{2}{5}$. Potom je

$$E(Y) = 4 \cdot \frac{3}{5} + 5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{12+10}{5} = \frac{22}{5}.$$

Pro součet náhodných veličin platí

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{13}{5} + \frac{22}{5} = \frac{35}{5} = 7.$$

Průměrný součet tažených čísel je 7.

3.1 Motivační příklady

3.1.1. Na jednom Americkém televizním kanálu běžela *Montyho Show*. Soutěžící měli možnost získat automobil, jestliže si vyberou ze tří dveří ty dveře, za kterými se automobil nachází. Soutěžící si jedny dveře zvolil a potom Monty šel a otevřel některé ze dvou zbývajících dveří. Vždy otevřel ty dveře, za kterými nestál automobil, ale koza. Nyní měl soutěžící možnost změnit svou volbu a vybrat si libovolné ze dvou stále zavřených dveří. Předpokládáme, že pořadatelé vyberou na začátku náhodně jedny ze tří dveří, za které zaparkují automobil a za další dvě postaví kozy. Je lepší změnit svoji volbu, nebo zůstat u původního tipu a nebo je to jedno? S jakou pravděpodobností získá soutěžící výhru jestliže změní svoji volbu? Svou odpověď vysvětlete. [je lepší volbu změnit]

3.2 Konečný pravděpodobnostní prostor

3.2.1. Hodíme kostkou.

a) Jaká je pravděpodobnost, že padne sudé číslo? $\left[\frac{1}{2}\right]$

b) Jaká je pravděpodobnost, že padne prvočíslo? $\left[\frac{1}{2}\right]$

c) Jaká je pravděpodobnost, že padne jednička nebo dvojka? $\left[\frac{1}{3}\right]$

d) Jaká je pravděpodobnost, že součet horní a spodní stěny je 7? $[1]$

e) Jaká je pravděpodobnost, že součet horní a spodní stěny je 3? $[0]$

3.2.2. Hodíme kostkou, která není spravedlivá, různá čísla padají s různou pravděpodobností. Čísla 1, 2 padnou s pravděpodobností $\frac{1}{5}$, čísla 4, 5 a 6 padnou s pravděpodobností $\frac{1}{7}$. Pravděpodobnost čísla 3 není udána.

a) Jsou uvedené pravděpodobnosti konzistentní? [ano]

b) S jakou pravděpodobností padne číslo 3? $\left[1 - 2 \cdot \frac{1}{5} - 3 \cdot \frac{1}{7} = \frac{6}{35}\right]$

c) Jaká je pravděpodobnost, že padne sudé číslo? $\left[\frac{17}{35}\right]$

d) Jaká je pravděpodobnost, že padne prvočíslo? $\left[\frac{18}{35}\right]$

e) Jaká je pravděpodobnost, že padne jednička nebo dvojka? $\left[\frac{2}{5}\right]$

f) Jaká je pravděpodobnost, že součet horní a spodní stěny je 7? $[1]$

g) Jaká je pravděpodobnost, že součet horní a spodní stěny je 3? $[0]$

3.2.3. Hodíme dvěma kostkami.

a) Je pravděpodobnější, a) že padne 5 a 6 nebo b) že padnou dvě 3? [pravděpodobnější je a)]

b) Jaká je pravděpodobnost, že padne součin 12? $\left[\frac{1}{9}\right]$

c) Jaká je pravděpodobnost, že padne součin 4? $\left[\frac{1}{12}\right]$

d) Jaká je pravděpodobnost, že padne součin 14? $[0]$

e) Jaká je pravděpodobnost, že padne součet 10? $\left[\frac{1}{12}\right]$

3.2.4. Sestavte funkci $P(n)$, která bude udávat pravděpodobnost, že při současném hodu $n \geq 1$ kostkami

a) padne součet n. $\left[P(n) = \frac{1}{6^n}\right]$

b) padne součet 3. $\left[P(n) = \frac{1}{6}\right.$ pro $n = 1$, $P(n) = \frac{1}{18}$ pro $n = 2$, $P(n) = \frac{1}{216}$ pro $n = 3$ a $P(n) = 0$ pro $\left.n \geq 4.\right]$

3.2.5. Hodíme n-stěnnou kostkou očíslovanou $1, 2, \ldots, n$. Jaká je pravděpodobnost, že padne liché číslo? $\left[\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n}\right]$

3.2.6. Hodíme n-stěnnou prvočíselnou kostkou (stěny jsou očíslované užitím prvních n prvočísel). Jaká je pravděpodobnost, že padne liché číslo? $\left[\frac{n-1}{n}\right]$

3.2.7. Máme zamíchaný balíček 32 hracích karet. Jaká je pravděpodobnost, že

a) první karta v balíčku je eso? $\left[\frac{1}{8}\right]$

b) třetí karta v balíčku je desítka? $\left[\frac{1}{8}\right]$

c) třetí karta v balíčku je desítka, víme-li, že první dvě karty jsou dáma a král? $\left[\frac{2}{15}\right]$

d) třetí karta v balíčku je desítka, víme-li, že první dvě karty jsou sedmička a desítka? $\left[\frac{1}{10}\right]$

3.2.8. Házíme dvěma kostkami: šestistěnnou a dvanáctistěnnou. Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne stejné číslo? $\left[\frac{1}{12}\right]$

3.2.9. Házíme třemi kostkami: čtyřstěnnou, šestistěnnou, desetistěnnou. Jaká je pravděpodobnost, že na všech padne stejné číslo? $\left[\frac{1}{60}\right]$

3.2.10. Házíme třemi šestistěnnými kostkami.

a) Je lepší vsadit si, že nepadne žádná šestka, nebo že padne alespoň jedna šestka? [je lepší si vsadit, že nepadne žádná šestka]

b) Jaká je pravděpodobnost, že padne právě jedna šestka? $\left[\frac{75}{216}\right]$

c) Jaká je pravděpodobnost, že padnou alespoň dvě šestky? $\left[\frac{2}{27}\right]$

3.2.11. Házíme desetistěnnou kostkou.

a) Hodíme jednou. Jaká je pravděpodobnost, že padne prvočíslo? $\left[\frac{2}{5}\right]$

b) Házíme dvakrát. Jaká je pravděpodobnost, že padne lichý součet? $\left[\frac{1}{2}\right]$

c) Házíme dvakrát. Jaká jsou pravděpodobnosti jednotlivých součtů? $\left[P(i) = \min\{\frac{i-1}{19}, \frac{21-i}{19}\}\right.$ pro $\left. i \in [2, 20]\right]$

3.2.12. Házíme čtyřikrát mincí. Jaká je pravděpodobnost, že

a) padne čtyřikrát za sebou hlava? $\left[\frac{1}{16}\right]$

b) padne nejprve hlava, potom orel, znovu orel a nakonec hlava? $\left[\frac{1}{16}\right]$

c) padne dvakrát hlava a dvakrát orel (v libovolném pořadí)? $\left[\frac{3}{8}\right]$

d) padne alespoň jednou hlava? $\left[\frac{15}{16}\right]$

3.2.13. Hodíme třemi stejnými kostkami.

a) Jaká je pravděpodobnost, že padne $2, 4, 6$? $\left[\frac{1}{36}\right]$

b) Jaká je pravděpodobnost, že padne $2, 4, 4$? $\left[\frac{1}{72}\right]$

3.2.14. Ve třídě je 25 žáků. Předpokládejme, že nikdo nemá narozeniny 29. února (v přestupném roce) a že každý den v roce se rodí přibližně stejně dětí. a) S jakou pravděpodobností budou alespoň dva spolužáci slavit narozeniny ve stejný den? b) Kolik nejméně musí být ve třídě žáků, aby byla pravděpodobnost společného data narozenin dvou spolužáků větší než $\frac{1}{2}$? [a) $P_{25} = 0.5687$, b) nejméně 23 žáků]

3.3 Disjunktní a nezávislé jevy

3.3.1. Dva hráči hází kostkou. Jsou jejich hody nezávislé? I když někdo hodí tři šestky za sebou? [ano]

3.3.2. Mějme dva různé elementární jevy.

a) Jsou různé elementární jevy vždy disjunktní? [ano]

b) Jsou různé elementární jevy vždy nezávislé? [ne]

3.3.3. Mějme dva disjunktní jevy.

a) Mohou být dva disjunktní jevy nezávislé? [ano]

b) Je prázdný jev nezávislý s libovolným jevem? [ano]

3.3.4. Udejte příklad dvou různých jevů, které nejsou disjunktní. [Například při hodu kostkou: jev padlo liché číslo a jev padlo prvočíslo.]

3.3.5. Hodíme dvěma kostkami.

a) Jsou jevy A: *padl součet* 4 a B: *padl součin* 4 disjunktní? [ne]

b) Jsou jevy A: *padl součet* 6 a B: *padl součin* 6 disjunktní? [ano]

3.3.6. Mějme tři jevy A, B, C. Víme, že jevy A a B jsou nezávislé, jevy B a C jsou nezávislé a jevy A a C jsou nezávislé.

a) Jsou jevy A, B, C nezávislé jako trojice? [ne]

b) Mohou být ve speciálním případě nezávislé? Kdy? [ano, je-li alespoň jeden z jevů prázdný]

3.3.7. Máme zamíchaný balíček 32 karet.

a) Rozdáme dvěma hráčům po třech kartách. Jsou výběry karet nezávislé? [ne]

b) Dáme prvnímu hráči tři karty a zbylé karty zamícháme. Potom druhý hráč dostane také tři karty. Jsou výběry karet nezávislé? [ne]

c) Dáme prvnímu hráči tři karty. On si je zapamatuje a vrátí do balíčku. Potom karty zamícháme a druhý hráč dostane tři karty. Jsou výběry karet nezávislé? [ano]

d) Hráč dostane pět karet, potom karty vrátí a po zamíchání dostane znovu pět karet. Jaká je pravděpodobnost, že měl pokaždé fullhouse (3+2 stejné hodnoty)? $[\frac{36}{808201}]$

e) Hráč dostane pět karet, schová si je dostane dalších pět karet. Jaká je pravděpodobnost, že měl královský poker (4 esa a další karta stejné hodnoty) dvakrát za sebou? [0]

3.3.8. Hodíme dvěma kostkami, jednou zelenou a jednou červenou. Jsou jevy A: „na obou padne stejné číslo“ a B: „na zelené kostce padne šestka“ nezávislé? [ano]

3.3.9. Mějme pravděpodobnostní prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ s uniformní pravděpodobností (házíme osmistěnnou kostkou). Jsou jevy $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a $B = \{5, 6, 7, 8\}$ nezávislé? [jevy A a B nejsou nezávislé]

3.3.10. Mějme pravděpodobnostní prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ s uniformní pravděpodobností (házíme osmistěnnou kostkou). Jsou jevy $A = \{1, 2, 3, 4\}$ (padlo malé číslo) a $B = \{1, 3, 5, 7\}$ (padlo liché číslo) nezávislé? [jevy A a B jsou nezávislé]

3.3.11. Mějme pravděpodobnostní prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ s uniformní pravděpodobností (házíme šestistěnnou kostkou). Jsou jevy $A = \{1, 2, 3\}$ (padlo malé číslo) a $B = \{1, 3, 5\}$ (padlo liché číslo) nezávislé? [jevy A a B nejsou nezávislé]

3.3.12. Házíme n-stěnnou kostkou. Nadefinujeme jev A, že padne malé číslo $1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ a jev B, že padne liché číslo. Pro jaká n jsou jevy A a B nezávislé? [jevy jsou nezávislé jen pro $n \equiv 0 \pmod 4$]

3.4 Podmíněná pravděpodobnost

3.4.1. Jaká je pravděpodobnost při hodu klasickou kostkou, že padne číslo větší než 3 víme-li, že padlo liché číslo. $\left[\frac{1}{3}\right]$

3.4.2. V krabici je 5 koulí, 3 jsou bílé a 2 černé. Vytáhneme postupně dvě koule. Počítejme: Všechny možnosti, jak mohou dopadnout losování jsou: bílá-bílá, bílá-černá, černá-černá a černá-bílá. Pouze jedna z nich je příznivá: bílá-černá. Dostaneme pravděpodobnost $P = \frac{1}{4}$. Srovnejte s řešením Příkladu 3. Co je špatně? Vysvětlete! [nelze užít vztah platný pro uniformní pravděpodobnostní prostor]

3.4.3. V krabici je 5 koulí, 3 jsou bílé a 2 černé. Vytáhneme postupně dvě koule. Počítejme: Všech možností, jak může dopadnout losování je $\binom{5}{2} = 10$. Příznivé jsou ty, kdy vybereme nejprve bílou a potom černou: Dostaneme pravděpodobnost $P = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}}{|\Omega|} = \frac{3\cdot 2}{10} = \frac{3}{5}$. Srovnejte s řešením Příkladu 3. Co je špatně? Vysvětlete! [rozlišit neuspořádaný a uspořádaný výběr]

3.4.4. Z celkové produkce závodu jsou 4% zmetků. Z dobrých výrobků je 75% standardních. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je standardní. $\left[\frac{18}{28}\right]$

3.5 Střední hodnota

3.5.1. Házíme kostkou, která není spravedlivá, různá čísla padají s různou pravděpodobností. Čísla 1, 2 padnou s pravděpodobností $\frac{1}{5}$, čísla 4, 5 a 6 padnou s pravděpodobností $\frac{1}{7}$. Pravděpodobnost čísla 3 není udána. Jaký je střední počet počtu ok, která na kostce padnou? $\left[E(X) = \frac{114}{35}\right]$

3.5.2. Jaká je střední hodnota počtu šestek, které padnou při hodu pěti kostkami? $\left[\frac{5}{6}\right]$

3.5.3. Máme šestistěnnou kostku.

a) Jaký je průměrný součet čísel na horní a spodní stěně kostky vyrobené tak, že 1 je naproti 6, 2 naproti 5 a 3 naproti 4? [7]

b) Jaký je průměrný součet čísel na horní a spodní stěně kostky vyrobené tak, že 1 je naproti 2, 3 naproti 5 a 4 naproti 6? [7]

3.5.4. Uměli byste rozmístit čísla 1 až 6 na spravedlivou kostku tak, aby střední hodnota součtu horní a spodní stěny byla jiná než 7? [pro spravedlivou kostku takové rozdělení není možné]

3.5.5. Najděte vhodná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_6$ a rozmístěte je na spravedlivou kostku tak, aby střední hodnota součtu horní a spodní stěny byla jiná než průměr hodnot a_1 až a_6 vynásobený dvěma. [pro spravedlivou kostku takové rozdělení není možné]

3.5.6. Najděte vhodná celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_6$ a rozmístěte je na spravedlivou kostku tak, aby střední hodnota součinu horní a spodní stěny byla jiná než průměr hodnot a_1 až a_6 umocněný na druhou. [například klasická kostka]

3.5.7.* Najděte vhodná různá celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_6$ a rozmístěte je na spravedlivou kostku tak, aby střední hodnota součinu horní a spodní stěny byla stejná jako průměr hodnot a_1 až a_6 umocněný na druhou. [například kostka s dvojicemi protilehlých stěn 1 a 6, -1 a -6, 0 a 12]

3.5.8. Kolik je třeba průměrně hodů mincí, aby vyšly dva stejné výsledky? $\left[\frac{5}{2}\right]$

3.5.9.* Kolik je třeba průměrně hodů mincí, kde hlava má pravděpodobnost p (p nemusí být $\frac{1}{2}$), aby vyšly dva stejné výsledky? $\left[2(1 + p - p^2)\right]$

3.5.10.* Kolik je třeba průměrně hodů spravedlivou mincí, aby padla první hlava? [2]

3.5.11.* Kolik je třeba průměrně hodů mincí, kde hlava má pravděpodobnost p (p nemusí být $\frac{1}{2}$), aby padla první hlava? $\left[\frac{1}{p}\right]$

3.5.12. Jaká je střední hodnota počtu políček, o které se vaše figurka přesune v jednom kole hry „Člověče, nezlob se!“, pokud se

a) po třetí šestce za sebou již znovu nehází? $\left[\frac{301}{72}\right]$

b) opakovaně hází dokud padají šestky? $\left[\frac{21}{5}\right]$

3.5.13. Při objednávání obědů u terminálu vedle jídelny nevíte, která jídla jsou k dispozici a která ne. Jestliže tři z pěti jídel již není možné objednat. Jaký je střední počet pokusů než si objednáme jídlo, které se ještě vaří? [2]

3.5.14. Při objednávání obědů u terminálu vedle jídelny nevíte, která jídla jsou k dispozici a která ne. Je-li v menu výběr z n jídel a jestliže $k \leq n$ je počet jídel z pěti, která je možno objednat, jaký je střední počet pokusů než si objednáme jídlo, které se ještě vaří? $\left[E(X) = \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{i=1}^{n-k} \frac{(n-i)!}{(n-i-k+1)!} \cdot i\right]$

3.6 Náhodné výběry

3.6.1. Máme sedmiprvkovou množinu A.

a) S jakou pravděpodobností vybereme náhodně jednu konkrétní pětiprvkovou podmnožinu mezi všemi pětiprvkovými podmnožinami? $\left[\frac{1}{21}\right]$

b) S jakou pravděpodobností vybereme náhodně jednu konkrétní pětiprvkovou podmnožinu mezi všemi podmnožinami? $\left[\frac{1}{128}\right]$

c) S jakou pravděpodobností vybereme náhodně některou pětiprvkovou podmnožinu mezi všemi podmnožinami? $\left[\frac{21}{128}\right]$

3.6.2. S jakou pravděpodobností vybereme náhodně jednu k-prvkovou podmnožinu n-prvkové množiny? $\left[\frac{1}{\binom{n}{k}}\right]$

3.6.3. S jakou pravděpodobností vybereme náhodně k-prvkovou podmnožinu mezi všemi podmnožinami n-prvkové množiny? $\left[\frac{\binom{n}{k}}{2^n}\right]$

3.6.4. Jaká je pravděpodobnost, že náhodná podmnožina n-prvkové množiny obsahuje jeden pevně zvolený prvek? $\left[\frac{1}{2}\right]$

3.6.5. Máme náhodnou posloupnost čtyř bitů.

a) S jakou pravděpodobností se jedná o „0011“? $\left[\frac{1}{16}\right]$

b) S jakou pravděpodobností obsahuje dvě jedničky a dvě nuly? $\left[\frac{3}{8}\right]$

3.6.6. S jakou pravděpodobností obsahuje více jedniček než nul? $\left[\frac{5}{16}\right]$

3.6.7. Máme náhodnou permutaci pětiprvkové množiny.

a) Jakou pravděpodobnost má jedna náhodná permutace? $\left[\frac{1}{120}\right]$

b) Jakou pravděpodobnost má permutace, kde číslo 1 následuje bezprostředně za číslem 2? $\left[\frac{1}{5}\right]$

c) Jakou pravděpodobnost má permutace, kde číslo 1 následuje za číslem 2? $\left[\frac{1}{2}\right]$

d) Jakou pravděpodobnost má permutace, kde čísla 1, 2 jsou vedle sebe? $\left[\frac{2}{5}\right]$

3.7 Příklady k procvičení

3.7.1. Házíme opakovaně spravedlivou mincí.

a) Jaká je pravděpodobnost, že při šesti hodech mincí padne hlava i orel stejněkrát? $\left[\frac{5}{16}\right]$

b) Jaká je pravděpodobnost, že při n hodech mincí padne hlava i orel stejněkrát? $\left[\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}}}{2^n}\right]$

3.7.2. Máme zamíchaný balíček 32 karet. Vytáhneme postupně dvě karty. Jaká je pravděpodobnost, že

a) obě karty budou esa? $\left[\frac{3}{248}\right]$

b) obě karty budou devítka a desítka (v tomto pořadí)? $\left[\frac{1}{62}\right]$

c) obě karty budou devítka a desítka (v libovolném pořadí)? $\left[\frac{1}{31}\right]$

d) ani jedna karta nebude král? $\left[\frac{189}{248}\right]$

e) obě karty budou stejné barvy? $\left[\frac{7}{31}\right]$

3.7.3. Kuchař upustil omylem do polévky dva různé prsteny. Všechna polévka byla rozdělena mezi 25 hostů, z toho 8 žen. Jaká je pravděpodobnost, že

a) oba prsteny dostane jedna osoba? $\left[\frac{1}{25}\right]$

b) prsteny budou mít v polévce dva muži? $\left[\frac{272}{625}\right]$

c) prsteny nebude mít v polévce žádný muž? $\left[\frac{64}{625}\right]$

d) prsteny budou mít v polévce jeden muž a jedna žena? $\left[\frac{272}{625}\right]$

e) prsteny budou mít v polévce dvě ženy? $\left[\frac{56}{625}\right]$

f) Jak se pravděpodobnosti změní, jestliže prsteny budou stejné? [pravděpodobnosti se nezmění]

3.7.4. Hodíme dvěma šestistěnnými kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že větší číslo bude m? $\left[\frac{2m-1}{36}\right]$

3.7.5. V šuplíku máme rozházených po 6 ponožkách od každé z barev černá, šedá a bílá. Kolik ponožek musíme průměrně vytáhnout (postupně a poslepu), abychom dostali jednobarevný pár? Nerozlišujeme levou a pravou ponožku. $\left[\frac{101}{34}\right]$

3.7.6. V šuplíku máme rozházených po p ponožkách od každé z b barev. Kolik ponožek musíme průměrně vytáhnout (postupně a poslepu), abychom dostali jednobarevný pár? Nerozlišujeme levou a pravou ponožku.

3.7.7.* Magnet má dva póly, které se přitahují. Barevné dětské magnetky mají na sobě umělohmotnou čepičku. Čepička zakrývá celý jeden pól magnetu, proto přitahovat se mohou pouze jedním pólem. Magnetky jsou balené po 40 kusech, 10 od každé ze čtyř barev. Předpokládejme, že zakryté póly těchto magnetků jsou zvoleny náhodně s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Jaká je pravděpodobnost, že těchto 40 magnetků lze pospojovat do 5×4 stejnobarevných dvojic tak, že každá dvojice se navzájem přitahuje opačnými nezakrytými póly? $\left[\left(\frac{\binom{10}{5}}{2^{10}}\right)^4\right]$

3.7.8. Hra *Tic-tac-toe* je hra s tužkou a papírem pro dva hráče X a O, kteří střídavě zapisují křížky a kolečka do čtvercové sítě políček 3×3, viz Cvičení 2.3.25. Při řešení využijte výsledku Cvičení 2.3.25.

a) Jaká je střední hodnota počtu tahů do vítězství, jestliže remízy nebudeme uvažovat (předpokládáme, že remíza nemůže nastat). Předpokládejme, že každá hra má stejnou pravděpodobnost (což nemusí být pravda). $\left[\frac{11747}{1452}\right]$

b)* Jaká je střední hodnota počtu tahů do prvního vítězství, jestliže remízy započítáme jako 9 tahů a další hra pokračuje dalším (desátým) tahem. Předpokládejme, že každá hra má stejnou pravděpodobnost (což nemusí být pravda). $\left[\frac{14627}{1452}\right]$

3.7.9. Krabice dřevěných dětských vláčků obsahuje jednu lokomotivu a tři vagónky. Vagónky a lokomotiva se spojují pomocí magnetů. Lokomotiva má jeden magnet a každý vagónek má magnety dva – na každém konci jeden. Póly magnetů jsou otočeny tak, aby bylo možno zapojit do vláčku všechny vagónky a to v libovolném pořadí.

a) S jakou pravděpodobností by se dal sestavit vláček s vagónky v libovolném pořadí, pokud by v továrně orientaci magnetů přiřazovali náhodně? $\left[\frac{3}{16}\right]$

b)* Uměli byste předchozí úlohu zobecnit pro n vagónků? $\left[\frac{3}{2^{n+1}}\right]$

c) S jakou pravděpodobností by se dal sestavit vláček s vagónky v alespoň jednom pořadí, pokud by v továrně orientaci magnetů přiřazovali náhodně? $\left[\frac{35}{64}\right]$

d)* Uměli byste předchozí úlohu zobecnit pro n vagónků? $\left[\frac{\binom{2n+1}{n}}{2^{2n}}\right]$

3.7.10. V balíčku je 8 karet, dvě od každé barvy. Balíček pečlivě rozmícháme. S jakou pravděpodobností dostaneme takové rozmíchání, ve kterém nejsou žádné dvě karty stejné barvy vedle sebe? $\left[\frac{13824}{40320} = \frac{12}{35}\right]$

3.7.11. Jaký je střední počet hodů šestistennou kostkou než padne každá stěna alespoň jednou?

3.7.12. Čtyřicet sportovců bude rozděleno na čtyři stejně početné skupiny. Jaká je pravděpodobnost, že dva konkrétní sportovci A a B budou ve stejné skupině? $\left[\frac{3}{13}\right]$

3.7.13. S jakou pravděpodobností bude přijato binární slovo délky 8 znaků, které obsahuje čtyři nuly, jestliže zdroj signálu generuje 7krát více nul než jedniček? $\left[\frac{84035}{8388608}\right]$

4 Důkazy v diskrétní matematice

Podrobněji si o důkazech můžete přečíst ve skriptech [ZDM].

Řešené příklady

4.0.1. Kolik různých binárních operátorů existuje (může existovat)? Sestavte jejich pravdivostní tabulky.
Podívejme se na binární operátor $A \oplus B$. Jsou čtyři různé kombinace pravdivostních hodnot proměnných A a B. Pro každou existují dvě možnosti, jaká bude výsledná logická hodnota operátoru $\oplus$. Dostáváme tak celkem $V(2,4) = 2^4 = 16$ různých logických binárních operátorů.

Označíme si je $\oplus_1, \oplus_2, \dots, \oplus_{16}$. Jejich tabulky pravdivostních hodnot jsou

A	B	$A \oplus_1 B$	$A \oplus_2 B$	$A \oplus_3 B$	$A \oplus_4 B$	$A \oplus_5 B$	$A \oplus_6 B$	$A \oplus_7 B$	$A \oplus_8 B$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Tabulka 4.1: *Tabulky pravdivostních hodnot operátorů $\oplus_1$ až $\oplus_8$.*

A	B	$A \oplus_9 B$	$A \oplus_{10} B$	$A \oplus_{11} B$	$A \oplus_{12} B$	$A \oplus_{13} B$	$A \oplus_{14} B$	$A \oplus_{15} B$	$A \oplus_{16} B$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Tabulka 4.2: *Tabulky pravdivostních hodnot operátorů $\oplus_9$ až $\oplus_{16}$.*

Poznámka:
Například operátor $\oplus_2$ je dobře známým operátorem konjunkce $\wedge$, operátor $\oplus_8$ je operátorem disjunkce $\vee$, operátor $\oplus_{15}$ je operátorem NAND.

4.0.2. Dokažte že pro $\forall a \in \mathbb{Z}$, je-li a^2 liché, potom a je liché.
Tvrzení dokážeme nepřímo. Místo původního výroku dokážeme jeho obměnu: $\forall a \in \mathbb{Z}$, je-li a sudé, potom a^2 je sudé.

Víme, že existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $a = 2k$. Potom $a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Vidíme, že a^2 je opět sudé, neboť existuje $k' = 2k^2$ tak, že $a^2 = 2k'$.

4.0.3. Ukažte, že každé poštovné větší nebo rovno 12 Kč může být zaplaceno užitím známek v hodnotě 4 Kč a 5 Kč.
Ukážeme matematickou indukcí vzhledem k ceně c.
Základ indukce: Nejprve ukážeme, že je možno vyplatit částky

- 12 Kč jako $4 + 4 + 4 = 12$
- 13 Kč jako $5 + 4 + 4 = 13$
- 14 Kč jako $5 + 5 + 4 = 14$
- 15 Kč jako $5 + 5 + 5 = 15$

Indukční krok: Ukážeme, že když jde zaplatit poštovné v ceně c, tak jde zaplatit také poštovné o hodnotě $c + 4$. Stačí nalepit o jednu čtyřkorunovou známku navíc.

To podle principu matematické indukce znamená, že pomocí známek v hodnotě 4 a 5 Kč můžeme zaplatit jakékoliv poštovné v hodnotě alespoň 12 Kč.

4.0.4. Dva zloději ukradli náhrdelník. Náhrdelník je sestaven z drahokamů (rubínů a diamantů) po řadě spojených řetízkem do kruhu. Svůj lup by si chtěli rozdělit tak, aby každý dostal stejný počet diamantů i rubínů. Ukažte, že pokud náhrdelník obsahuje sudý počet diamantů ($2d$) a sudý počet rubínů $2r$, je vždy možné rozdělit náhrdelník na *dvě* části tak, aby každá část obsahovala polovinu rubínů i polovinu diamantů.

Tvrzení ukážeme přímo. Navíc důkaz bude konstruktivní a poskytne návod, jak místo pro dělení najít.

Náhrdelník rozložíme na stůl tak, abychom mohli určovat směr po a proti směru hodinových ručiček. Najdeme takové dva články c_1 a c_2 na náhrdelníku řetízku (vždy vedle diamantu, měřeno proti směru hodinových ručiček), že při rozdělení by v jednom i druhém dílu byl stejný počet diamantů $d_1 = d_2$. Takové rozdělení jistě existuje, neboť náhrdelník obsahuje sudý počet diamantů. Podíváme se, jaký je počet rubínů r_1 a r_2 v obou částech. Je-li $r_1 = r_2$, tak je tvrzení dokázáno. Jinak můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že rubínů je více po směru od c_1 a že platí $r_1 > r_2$ (obě jsou sudá nebo obě lichá čísla).

Nyní rozlišíme následující případy:

1. *drahokam po směru od c_1 (resp. proti směru od c_2) je rubín*

   posuneme místo dělení c_1 o jeden drahokam (rubín) po směru (resp. c_2 proti směru) na místo c_1' (resp. c_2'); nyní je $r_1' = r_1 - 1$ a $r_2' = r_2 + 1$

2. *drahokam po směru od c_1 i proti směru od c_2 diamant*

   posuneme místo dělení c_1 o jeden drahokam (diamant) po směru (resp. c_2 **po směru**) na místo c_1' (resp. c_2'); jistě zůstane $d_1' = d_1 = d_2 = d_2'$

Všimneme si, že při opakování postupu se v případě prvním rozdíl $r_1 - r_2$ vždy sníží o nejmenší možnou hodnotu 2, zatímco v druhém případě se zůstane rozdíl $r_1 - r_2$ stejný nebo se zvýší (o nějakou sudou hodnotu).

Postup je jistě konečný, neboť náhrdelník obsahuje konečný počet drahokamů a navíc se určitě podaří rozdělit náhrdelník na dvě stejně hodnotné části dříve, než se místo dělení c_1' dostane na původní místo c_2, neboť potom by muselo být $r_1' - r_2' = -(r_1 - r_2)$ záporné. Při dělení snižujeme rozdíl pouze v případě prvním a to vždy o nejmenší možnou hodnotu, proto získáme všechna možná dělení s rozdílem mezi hodnotou $r_1 - r_2$ a hodnotou $-(r_1 - r_2)$.

Jiné řešení:

Náhrdelník, který obsahuje $2d$ diamantů a $2r$ rubínů rozložíme na stůl tak, abychom mohli určovat směr po a proti směru hodinových ručiček. Najdeme na náhrdelníku takové dva protilehlé články řetízku A a B, že při rozdělení by v jedné i druhé části byl stejný počet drahokamů: $(2d + 2r)/2 = d + r$.

Pokud obsahuje jedna část více diamantů $d + x$ (a méně rubínů $d - x$) než druhá tak budeme posouvat místa dělení o jeden drahokam ve směru hodinových ručiček. V každém kroku se vymění jedna dvojice drahokamů. Jsou-li vyměněné drahokamy stejné, nezmění se počty diamantů ani rubínů v každé části. Jsou-li vyměněné drahokamy různé, tak se počet diamantů v jedné části o 1 zvýší (na $d + x + 1$) nebo o 1 sníží (na $d + x - 1$).

Postup je jistě konečný, neboť náhrdelník obsahuje konečný počet drahokamů a navíc se určitě podaří rozdělit náhrdelník na dvě stejně hodnotné části dříve, než se místa dělení posunou o polovinu obvodu $(d + r)$, neboť potom by měla jedna část tolik diamantů, jako původně měla druhá část: $d - x$. V každém kroku se celočíselná hodnota $d + x$ mění o 1, proto dříve něž otočíme o $d + r$ drahokamů musí nastat $x = 0$. Jakmile mají části v některém kroku stejný počet diamantů, musí mít i stejný počet rubínů, neboť obě mají stejný počet drahokamů.

4.1 Motivační příklady

4.1.1. Tabulka čokolády se skládá z $m \times n$ čtverečků. Chceme ji nalámat na jednotlivé čtverečky. Najděte a dokažte jaký je *nejmenší* počet zlomů, abychom čokoládu $m \times n$ rozdělili na jednotlivé čtverečky? [přímo nebo silnou indukcí]

4.1.2. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že n přímek rozdělí rovinu na nejvýše $\frac{1}{2}n(n + 1) + 1$ oblastí. [indukcí vzhledem k n]

4.1.3. Máme sloupeček n krabic. Budeme hrát následující hru (pro jednoho/libovolný počet hráčů):

Z jednom kroku vždy rozdělíme nějaký sloupec z krabic ($z \geq 2$) na dva menší sloupce s x a y krabicemi. Za tento krok získáme počet bodů, který je dán součinem $x \cdot y$.

Hra končí, jakmile máme n sloupců každý s jedinou krabicí. Začínáme s nulovým počtem bodů a chtěli bychom dosáhnout co největšího počtu bodů. Hráč s největším počtem bodů vyhrál. a) Jakou strategii zvolit, abychom získali co největší skóre? b) Dokažte, že žádná jiná strategie nevede k vyššímu skóre.

4.2 Základní logické symboly

4.2.1. Sestavte negaci výroku „Všechna auta jsou červená.“ [alespoň jedno auto není červené]

4.2.2. Sestavte negaci výroku „Každý student u zkoušky uspěje.“ [alespoň jeden student u zkoušky neuspěje]

4.2.3. Sestavte negaci výroku „Jednou jsem vyhrál ve sportce.“ [ve sportce jsem vyhrál alespoň dvakrát nebo nikdy]

4.2.4. Sestavte negaci výroku „Kdo neskáče, není Čech.“ [kdo neskáče, může být i Čech]

4.2.5. Sestavte negaci výroku $\forall n : 2^n > n^2$. $\left[\exists n : 2^n \le n^2\right]$

4.2.6. Sestavte negaci výroku $\forall x > 1 : x^2 > x$. $\left[\exists x > 1 : x^2 \le x\right]$

4.2.7. Sestavte negaci výroku $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ln|x| < 0$. $[\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ln|x| \ge 0]$

4.2.8. Pokud je to možné, zapište všechny možné různé binární operátory užitím negace, konjunkce a disjunkce.

4.2.9. Pokud je to možné, zapište všechny možné různé binární operátory užitím negace, konjunkce a XOR.

4.2.10. Pokud je to možné, zapište všechny možné různé binární operátory užitím NAND a XOR.

4.2.11. Víme, že výrok A a jeho negace $nonA$ nemohou být současně pravdivé nebo současně nepravdivé. Označíme A výrok „Tato věta neobsahuje zápor,“ který je nepravdivý. Avšak jeho negace „Tato věta obsahuje zápor“ je také nepravdivá. Vysvětlete! [A ani $nonA$ nejsou výroky, proč?]

4.2.12.* Najděte podobné věty jako v předchozím příkladu tak, aby obě tvrzení A a $nonA$ byly pravdivé. [řešení existují, najdete je?]

4.3 Pojem matematického důkazu

Celé číslo a se nazývá sudé, existuje-li $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby $a = 2k$. V opačném případě se číslo a nazývá liché.

4.3.1. Dokažte že pro $\forall a \in \mathbb{Z}$, je-li a liché, potom a^2 je liché. [přímo]

4.3.2. Najděte chybu v následujícím důkazu. Ukážeme, že 13 je prvočíslo. Předpokládejme, že všechna lichá čísla jsou prvočísla. Protože $13 = 2 \cdot 6 + 1$ je liché číslo, tak 13 je prvočíslo. [implikace z nepravdivého výroku není důkaz!]

4.3.3. Najděte chybu v následujícím důkazu. Mějme výrok V, který říká $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > x$. Protože jistě $0 > -1$, tak přičtením x dostaneme $x > x - 1$. Nyní z nerovností $x^2 > x > x - 1$ dostaneme $x^2 > x - 1$. Nerovnice $x^2 - x + 1 > 0$ má řešení pro všechna reálná čísla (vyřešte si podrobně sami), proto náš předpoklad je pravdivý pro všechna reálná čísla. [implikace z nepravdivého výroku není důkaz!]

4.3.4. Najděte chybu v následujícím důkazu. Mějme celé číslo a. Jistě platí $a = a$. Umocněním předpokladu $a = a$ dostaneme $a^2 = a^2$, neboli $0 = a^2 - a^2 = (a + a)(a - a)$. Nyní $0 \cdot (a - a) = 0 = (a + a)(a - a)$ a zkrácením výrazem $a - a$ dostaneme $a + a = 0$, tj. $a = -a$. [neekvivalentní úprava]

4.3.5. Najděte chybu v následujícím důkazu. Mějme celá čísla a, b. Pokud platí $a = b$, tak umocněním dostaneme $a^2 = b^2$, neboli $0 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Nyní zkrácením výrazem $a - b$ dostaneme $0 = a + b$, tj. $a = -b$. [neekvivalentní úprava]

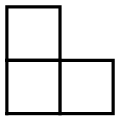
4.4 Princip matematické indukce

4.4.1. Dokažte matematickou indukcí, že součet prvních n lichých čísel je n^2. [indukcí vzhledem k n]

4.4.2. Dokažte kombinatoricky (jinak než přímo nebo indukcí), že součet prvních n lichých čísel je n^2. [rozkrájením šachovnice]

4.4.3. Dokažte přímo (jinak než indukcí nebo kombinatoricky), že součet prvních n lichých čísel je n^2. [součtem posloupnosti]

4.4.4. Máme šachovnici o rozměrech $2^n \times 2^n$ políček ($n \geq 1$), na které chybí jedno (libovolné) políčko. K dispozici máme neomezený počet dílků, z nich každý sestává ze tří políček šachovnice ve tvaru L. Ukažte, že šachovnici je možno pokrýt dílky tak, aby se žádné dílky nepřekrývaly a přitom byla celá šachovnice (až na chybějící políčko) pokrytá.



Obrázek 4.1: *Dílek se třemi políčky šachovnice ve tvaru L.*

[indukcí vzhledem k n]

4.4.5. Dokažte, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
Základ indukce: Pro $i = 1$ je tvrzení snadné:

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{1}{6}1(1+1)(2+1).$$

Indukční krok: Dále předpokládáme platnost pro $1, 2, \ldots, n$, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Pro $n+1$ chceme ukázat, že platí

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).$$

Pro $n+1$ dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2 + 7n + 6\right) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).$$

[indukcí vzhledem k n]

4.4.6. Dokažte $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \binom{n+1}{2}^2$. [graficky nebo indukcí]

4.4.7. Najděte chybu v následujícím důkazu. Indukcí podle n dokážeme, že každých n čísel je sobě rovných: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Pro $n = 1$ jistě platí $x_1 = x_1$. Nechť tvrzení platí pro obecné n. Ukážeme, že platí i pro $n+1$ čísel: $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Dle indukčního předpokladu je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, a současně $x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1}$. Nyní z tranzitivity rovnosti vyplývá $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1}$. [chybně zvolený základ indukce $n = 1$]

4.4.8. Najděte chybu v následujícím důkazu. Indukcí podle n dokážeme, že každých $n \geq 2$ různoběžných přímek má právě jeden společný bod. Pro $n = 2$ tvrzení jistě platí: dvě různoběžky p_1 a p_2 mají společný právě jeden bod. Nechť tvrzení platí pro n přímek. Ukážeme, že platí i pro $n+1$ přímek: $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$. Dle indukčního předpokladu mají přímky $p_1, p_2, \ldots, p_n$ jediný společný bod, a současně přímky $p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ mají jediný společný bod. Označíme P společný bod přímek p_2 a p_3. Podle indukčního předpokladu je tento bod společný pro prvních n přímek i pro posledních n přímek a je proto společný pro všech $n+1$ přímek. [chybně zvolený základ indukce $n = 2$]

4.4.9. Ukažte, že každé poštovné nebo rovno $(h_1 - 1)(h_2 - 1)$ Kč může být získáno užitím známek v hodnotě h_1 Kč a h_2 Kč.

4.4.10. Dokažte Bernoulliho nerovnost: Pro každé přirozené n a reálné $x > -1$ platí nerovnost $(1+x)^n \geq 1 + nx$. [indukcí vzhledem k n]

4.4.11. Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$ [indukcí vzhledem k n]

4.4.12. Ukažte matematickou indukcí, že pro každé přirozené číslo n platí rovnost $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

4.4.13. Ukažte matematickou indukcí, že pro všechna přirozená čísla platí nerovnost $a_n \leq 2^{n-1}$, kde a_n je n-tý člen posloupnosti určené rekurentně: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ a pro $n \geq 4$ je $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$.

4.5 Vztahy s kombinačními čísly

4.5.1. Upravte výraz $\binom{2n}{n-2} + \binom{2n}{n+3}$ na jediné kombinační číslo. $\left[\binom{2n+1}{n-2}\right]$

4.5.2. Upravte výraz $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{4}$ na jediné kombinační číslo. $\left[\binom{n+5}{4}\right]$

4.5.3.* Upravte výraz $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i}$ na jediné kombinační číslo. $\left[\binom{n+k+1}{k}\right]$

4.5.4. Pro jaká n platí $C(n-1,3) + C(n+2,3) + 10 = P(n,3)$? $[n = 3, 8]$

4.5.5. Ukažte, že platí

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

[kombinatoricky (čísla $1, 2, \ldots, 2n$) nebo přímo]

4.5.6. Ukažte, že platí

$$\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} = n^3$$

[přímo]

4.5.7. Zdůvodněte (kombinatoricky, bez výpočtu kombinačních čísel), že platí

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

[kombinatoricky (čísla $1, 2, \ldots, 2n$)]

4.5.8.* Sečtěte $1 + 2\binom{n}{1} + \cdots + (k+1)\binom{n}{k} + \cdots + (n+1)\binom{n}{n}$. $\left[(n+2)2^{n-1}\right]$

4.5.9.* Ukažte, že platí

$$\binom{n}{1} + 3\binom{n}{3} + 5\binom{n}{5} + \cdots = 2\binom{n}{2} + 4\binom{n}{4} + 6\binom{n}{6} + \cdots$$

4.5.10. Vypočítejte

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

$\left[3!\binom{n+1}{4}\right]$

4.5.11. Vypočítejte $\sum_{k=1}^{n} (k^2+1)k!$ $[(n+1)!n]$

4.5.12. Vypočítejte $\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} k(k+1)!$ $\left[(n+2)! - 2^{n+1}\right]$

4.5.13. Vypočítejte $\sum_{i=0}^{k} \binom{2n-k}{n-i}\binom{k}{i}$ kde $k \leq n$ $\left[\binom{2n}{n}\right]$

4.6 Důkazy počítáním

4.6.1. Existují na VŠB–TUO dva studenti se stejným posledním čtyřčíslím rodného čísla? [Dirichletův princip]

4.6.2. Ukažte, že na Zemi žijí dva lidé se stejným počtem vlasů. [Dirichletův princip]

4.6.3. V místnosti je n lidí. Každý z nich má v místnosti několik známých (třeba i žádného). Předpokládáme, že relace „mít známého“ je symetrická. Ukažte, že někteří dva lidé mají v místnosti stejný počet známých. [Dirichletův princip, a když někdo $n-1$ známých, nemůže být 0.]

4.6.4. Máte 4 různá čísla od 1 do n ($n \geq 4$). Ukažte, že některá dvě dávají sudý součet. Kolik nejméně čísel zaručí sudý součet? [Dirichletův princip, min=3]

4.6.5. Máte k různých čísel od 1 do n ($n \geq k \geq 2$). Pro jaké nejmenší k máme zaručeno, že některá dvě dávají lichý součet. $\left[k_{min} = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1\right]$

4.6.6. Na čtrnáctidenní dovolenou jelo 20 lidí. Každé odpoledne hrají stolní tenis. U každého ze dvou stolů se hraje postupně šest zápasů, Ukažte, že někteří dva lidé spolu během celé dovolené nehráli. [počet dvojic, Dirichletův princip]

4.6.7. V Plzni se v městský dopravních prostředcích štípají lístky. Po Plzni jezdí 150 tramvají, 90 trolejbusů a 120 autobusů. Ukažte, že pokud se štípe vždy 3, 4 nebo 5 políček z devíti, tak musí být v některých vozech stejné kombinace. [$336 < 360$]

4.6.8.* Ukažte, že vyřízneme-li z šachovnice dva protilehlé rohy, potom není možné šachovnici pokrýt dominovými kostkami.

4.6.9.* Ze šachovnice odebereme dvě políčka různé barvy. Ukažte, že je možno pokrýt dominem.

4.6.10. Ukažte, že neexistuje univerzální bezztrátový kompresní algoritmus, tj. taková kompresní funkce, která libovolnou posloupnost n bajtů zkompresuje na posloupnost délky menší než n. [Neexistuje injektivní zobrazení $VSTUP \to VYSTUP$.]

4.7 Příklady k procvičení

4.7.1. Dokažte, že pro každé přirozené n je číslo $n^3 - n$ dělitelné šesti. [přímo nebo indukcí]

4.7.2. Dokažte, že platí

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{n-1}{r} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

[indukcí podle n]

4.7.3. Dokažte, že pro všechna přirozená $n \geq 1$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) \cdot 3^i = (n-1) \cdot 3^{n+1} + 3.$$

[indukcí vzhledem k n]

4.7.4. Najděte všechna řešení nerovnice $\binom{n}{2} > \binom{n}{3}$. [$n = 3, 4$]

4.7.5.* Dokažte, že platí

$$n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

[přímo]

4.7.6. Ukažte, že aritmetický průměr dvou nezáporných reálných čísel je nejvýše roven geometrickému průměru, tj. $\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}$. [přímo]

4.7.7. Ukažte, že při hodu $n \geq 1$ kostkami je stejná pravděpodobnost, že součet bude sudý nebo lichý. [sestavením uniformního pravděpodobnostního prostoru se dvěma komplementárními jevy stejné velikosti]

4.7.8. Ukažte, že počet všech zobrazení m prvkové množiny do n prvkové je n^m. [indukcí vzhledem k m]

4.7.9. Ukažte, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo. [sporem]

4.7.10. Hra *Tic-tac-toe* je hra s tužkou a papírem pro dva hráče X a O, kteří střídavě zapisují křížky a kolečka do čtvercové sítě políček 3×3, viz Cvičení 2.3.25.

a) Existuje vítězná strategie pro prvního hráče? Pokud ano, najděte ji, pokud ne, dokažte to. [vítězná strategie neexistuje]

b) Existuje vítězná strategie pro druhého hráče, jestliže první tah prvního hráče nesmí být na prostřední pole? Pokud ano, najděte ji, pokud ne, dokažte to. [vítězná strategie neexistuje]

4.7.11. Ukažte indukcí, že k kružnic dělí povrch koule na nejvýše $k^2 - k + 2$ částí.

4.7.12. Ukažte přímo, že k kružnic dělí povrch koule na nejvýše $k^2 - k + 2$ částí. [s využitím Eulerova vzorce]

4.7.13. Máme řetěz s n očky v řadě. Najděte a dokažte jaký je nejmenší počet oček řetízku, které je třeba cviknout, aby potom bylo možno bez dalšího cviknutí odpočítat (ne nutně spojit) libovolný počet oček od 1 do n. $\big[$nejmenší k takové, že $n \geq (k+1)2^{k+1} - 1\big]$

4.7.14. Ukažte, že pro libovolných $n+1$ přirozených čísel z množiny $[1, 2n]$ existují taková dvě čísla, že jedno je násobek druhého.

4.7.15. Matematickou indukcí ukažte, že pro každé celé číslo $n \geq 3$ existuje n takových *různých* přirozených čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ že rovnice $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1$. [pro každé další n vezmeme dvojnásobné hodnoty]

4.7.16. Ukažte, že $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$. [s využitím matematické indukce]

4.7.17. Z aritmetické posloupnosti $1, 4, 7, 10, \ldots, 100$ vybereme libovolně 19 členů. Dokažte, že mezi nimi existují dvě čísla, jejichž součet je 104. [počítáním dvojic čísel, která dávají součet 104]

4.7.18. Ukažte, že v množině libovolných $k+1$ celých čísel existuje alespoň jedna dvojice čísel, jejichž rozdíl je dělitelný číslem k. [s využitím Dirichletova principu]

5 Relace a zobrazení

Řekneme, že (binární) relace na množině A je

- *reflexivní* pokud $\forall x \in A : (x,x) \in R$,
- *ireflexivní* pokud $\forall x \in A : (x,x) \notin R$,
- *symetrická* pokud $\forall x,y \in A : (x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R$,
- *antisymetrická* pokud $\forall x,y \in A : (x,y),(y,x) \in R \Rightarrow x = y$,
- *asymetrická* pokud $\forall x,y \in A : (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$,
- *tranzitivní* pokud $\forall x,y,z \in A : (x,y),(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$,
- *lineární* (*úplná*) pokud $\forall x,y \in A : (x,y) \in R \vee (y,x) \in R$.

Podrobněji si o relacích a permutacích můžete přečíst ve skriptech [ZDM].

Řešené příklady

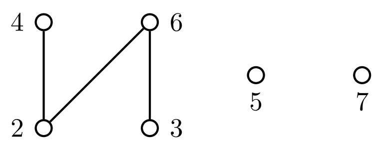
5.0.1. Jaké vlastnosti má relace $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,1)\}$ definovaná na množině $A = \{1,2,3\}$?

Relace R je reflexivní a není ireflexivní, protože pro všechny prvky množiny A platí, že $(1,1)$, $(2,2)$ a $(3,3)$ patří do R. Relace R je antisymetrická, protože ani jedna dvojice různých prvků (x,y) není současně v relaci R v obou pořadích (x,y) a (y,x). Relace R není asymetrická, protože například $(1,1) \in R$. Relace R není symetrická, protože například $(1,2) \in R$ ale $(2,1) \notin R$. Relace R není ani tranzitivní, protože $(1,2),(2,3) \in R \not\Rightarrow (1,3) \in R$. Relace R je úplná, protože pro každou dvojici prvků (i dvakrát stejný prvek), najdeme alespoň jednu uspořádanou dvojici, která do relace patří.

5.0.2. Máme dánu množinu $A = \{2,3,4,5,6,7\}$ s relací dělitelnosti $|$.

a) Nakreslete hasseovský diagram relace $|$ na množině A. Najděte všechny minimální, maximální, největší a nejmenší prvky.

hasseovský diagram je na Obrázku 5.1. Minimální prvky jsou 2, 3, 5, 7, protože žádné z těchto čísel není dělitelné nějakým jiným prvkem množiny A. Maximální prvky jsou 4, 5, 6, 7, protože žádné z těchto čísel nedělí nějaký jiný prvek množiny A. Největší ani nejmenší prvek relace dělitelnosti na množině A nemá, protože žádný prvek v A není dělitelem všech prvků množiny A, ani žádný prvek v A není dělitelný každým prvkem množiny A.



Obrázek 5.1: *Hasseovský diagram relace dělitelnosti na množině* $\{2,3,4,5,6,7\}$.

b) Jaký prvek $a \in \mathbb{N}$ je třeba přidat do A, aby relace dělitelnosti měla nejmenší prvek?

Musíme přidat dělitele všech čísel v množině A. Takovým číslem v množině $\mathbb{N}$ je pouze číslo 1.

Pokud bychom vybírali mezi celými čísly, tak můžeme vybrat také číslo -1.

c) Jaký prvek $a \in \mathbb{N}$ stačí přidat do A, aby relace dělitelnosti měla největší prvek?

Musíme přidat dělitele číslo, které je dělitelné všemi čísly v množině A. Takovým číslem v množině $\mathbb{N}$ je každý společný násobek čísel z množiny A. Nejmenším je číslo 420, další jsou například 840 nebo 4200.

Poznámka:

Každé z čísel ve tvaru $420k$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je přípustné, dokonce například i číslo 0 (proč?).

d) Jaký *nejmenší* prvek $a \in \mathbb{N}$ je třeba přidat do A, aby relace dělitelnosti měla největší prvek?

Protože každé přirozené číslo dělí nulu, tak stačí přidat nulu. Jistě to je nejmenší takové číslo.

e) Jaké *nejmenší* číslo $a \in \mathbb{Z}$ stačí přidat do A, aby relace dělitelnosti měla největší prvek?

Takovým číslem je každý společný násobek čísel z množiny A. Avšak v množině $\mathbb{Z}$ jsou i záporná čísla a každé z čísel $420k$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je přípustné. Ke každému takovému číslu $420k$ najdeme menší číslo $-420(|k|+1)$, které splňuje podmínky zadání. Proto neexistuje nejmenší celé číslo a, které je největším prvkem $A \cup \{a\}$ vzhledem k relaci dělitelnosti.

5.0.3. Pro permutaci R na množině A definujeme symbol R^n takto: $R^1 = R$, $R^{n+1} = R \circ R^n$.

a) Ukažte, že je-li A konečná množina, tak musí existovat taková $r, s \in \mathbb{N}$, $r < s$, že platí $R^r = R^s$.

Uvědomme si, že R^n je zase permutace na A. Protože A je konečná množina, tak na A existuje konečně mnoho permutací $(n!)$. Proto mezi všemi relacemi R^n se musí některé permutace opakovat, tj. $\exists r, s \in \mathbb{N}$, $r < s$ tak, že $R^r = R^s$.

b) Najděte takovou permutaci R na konečné množině A, že $R^{r+1} \neq R^r$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Množina A musí být alespoň dvouprvková, například $A = \{x, y\}$ (a případně další prvky). Potom vezmeme $R = \{(x, y), (y, x)\}$. Pro n liché je $R^n = R$, pro n sudé je $R^n = \{(x, x), (y, y)\}$.

5.0.4. Nápověda při hledání geokeší (geocaching.cz) bývá často zašifrována následující jednoduchou šifrou:

```
A|B|C|D|E|F|G|H|I|J|K|L|M
-------------------------
N|O|P|Q|R|S|T|U|V|W|X|Y|Z
(písmena nad čarou odpovídají písmenům pod čarou a naopak)
```

Popište tuto šifru pomocí relace g. Jaký je řád relace g? Jak se liší permutace pro zašifrování a dešifrování nápovědy?

Tuto záměnnou šifru g popíšeme maticí

$$g = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H & I & J & K & L & M & N & O & P & Q & R & S & T & U & V & W & X & Y & Z \\ N & O & P & Q & R & S & T & U & V & W & X & Y & Z & A & B & C & D & E & F & G & H & I & J & K & L & M \end{pmatrix}.$$

Zapíšeme-li permutaci g pomocí cyklů, dostaneme

$$g = (NA)(BO)(CP)(DQ)(ER)(FS)(GT)(HU)(IV)(JW)(KX)(LY)(MZ),$$

což je permutace řádu 2, neboť nejmenší společný násobek délek cyklů je právě 2.

Permutace g řádu 2 složena sama se sebou dává identitu: $g \circ g = id$, což znamená, že g je inverzní sama k sobě. Pro šifrování i dešifrování lze použít stejnou permutaci.

5.1 Motivační příklady

Na první pohled se může pojem relace, který je zaveden jako podmnožina kartézské mocniny (kartézského součinu), zdát nezajímavý. Zkuste si však spočítat, kolik různých relací na konečné množině je možno definovat. Uvidíme, že formalizace pojmu relace je nezbytná i pro velmi malé množiny (na čtyřech, na deseti prvcích), neboť relací je příliš mnoho na to, abychom mohli všechny vypsat.

5.1.1.$^\heartsuit$ Kolik existuje relací na konečné n prvkové množině X? $\left[2^{n^2}\right]$

5.1.2. Máme stroječek na míchání karet. Když do stroječku vložíme seřazený balíček karet v pořadí $1, 2, \ldots, 32$, balíček zamíchá tak (udělá takovou permutaci karet), že vloží sudé karty mezi liché. Dostaneme pořadí $1, 17, 2, 18, 3, 19, \ldots, 16, 32$. Jaký je řád permutace, neboli po kolika nejméně opakovaných mícháních dostaneme opět seřazený balíček? [5]

5.1.3. Patnácka, známá také jako Loydova patnáctka[1], je hlavolam, který obsahuje patnáct kamenů s čísly 1 až 15. Kameny máme za úkol seřadit posouváním kamenů.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Obrázek 5.2: *Loydova patnáctka.*

a) Ukažte, že není možné u klasické *patnáctky* posouváním sestavit čísla tak, aby byla prohozena dvě sousední čísla. [počítáním inverzí]

b) Kolik existuje různých rozmíchání hlavolamu *patnáctka* (užitím legálních tahů) s prázdným políčkem v pravém dolním rohu? [653837184000]

5.2 Pojem relace

5.2.1. Kolik existuje relací na konečné n prvkové množině, které jsou

a) symetrické? $\left[2^{\frac{n(n+1)}{2}}\right]$

b) antisymetrické? $\left[2^n 3^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]$

c) asymetrické? $\left[3^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]$

5.2.2. Kolik existuje relací na konečné n prvkové množině X takových, které jsou symetrické i antisymetrické současně? $[2^n]$

5.2.3. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

a) Relace, která není symetrická, je antisymetrická. [nepravdivé tvrzení]

b) Relace, která není antisymetrická, je symetrická. [nepravdivé tvrzení]

c) Relace, která není symetrická, je asymetrická. [nepravdivé tvrzení]

d) Relace, která je asymetrická, je antisymetrická. [pravdivé tvrzení]

e) Relace, která je antisymetrická, je asymetrická. [nepravdivé tvrzení]

f) Relace je asymetrická, právě když je antisymetrická a ireflexivní. [pravdivé tvrzení]

g) Relace, pro kterou platí $\forall x, y \in A : ((x, y) \in R \wedge (y, x) \notin R) \vee ((x, y) \notin R \wedge (y, x) \in R)$, je antisymetrická. [pravdivé tvrzení]

h) Relace, která je symetrická i antisymetrická, je také reflexivní. [nepravdivé tvrzení]

i) Relace, která je lineární, je také reflexivní. [pravdivé tvrzení]

[1] Loydova patnáctka se nazývá podle jejího popularizátora Sama Loyda. Loyd vypsal odměnu $1000 tomu, kdo jako první úkol vyřeší. Loyd věděl, že úloha nemá řešení a na prodeji hlavolamu vydělal nemalé peníze.

5.2.4.♡ Sestavte na množině $\{1, 2, 3, 4\}$ relace

a) rovnosti R, $[R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}]$

b) menší $<$, $[<= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}]$

c) menší nebo rovno $\leq$. $[\leq = R\cup <]$

5.2.5. Jaké vlastnosti má relace $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 1)\}$ definovaná na množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$? [antisymetrická]

5.2.6. Jaké vlastnosti má relace $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ na množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$? [antisymetrická, reflexivní i tranzitivní]

5.2.7. Jaké vlastnosti má relace soudělnosti R na N (dva prvky jsou v relaci, jestliže jejich největší společný dělitel je větší než 1)? [symetrická]

5.2.8. Může na konečné množině existovat relace, která

a)♡ je symetrická i antisymetrická? [ano]

b)♡ není symetrická ani antisymetrická? [ano]

c) není symetrická ani asymetrická? [ano]

d) je symetrická i asymetrická? [ano]

e) není symetrická, antisymetrická ani asymetrická? [ano]

5.2.9. Je relace dělitelnosti na $\mathbb{Z}$ antisymetrická? [není]

5.3 Uspořádání a ekvivalence

5.3.1. Nakreslete hasseovský diagram relace podmnožin množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Najděte všechny minimální, maximální, největší a nejmenší prvky. [nejmenší i minimální $\emptyset$; největší i maximální A]

5.3.2. Sestavte relaci $R_\equiv$ kongruence podle modulu 4 na množině $\{1, 2, \ldots, 10\}$. Je $R_\equiv$ relací ekvivalence? Pokud ano, sestavte třídy rozkladu. $[R_\equiv = \{(1, 5), (5, 1), (1, 9), (9, 1), (5, 9), (9, 5), (2, 6), (6, 2), (2, 10), (10, 2), (6, 10), (10, 6), (3, 7), (7, 3), (4, 8), (8, 4)\}$, ano, $A_1 = \{1, 5, 9\}, A_2 = \{2, 6, 10\}, A_3 = \{3, 7\}, A_4 = A_0 = \{4, 8\}]$

5.3.3. Vezmeme systém všech tříprvkových podmnožin množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Definujeme relaci $X\rho Y$, jestliže mají stejný největší prvek. Ověřte, zda se jedná o ekvivalenci. Pokud ano, kolik má tříd rozkladu a která třída má nejvíce prvků? [reflexivní, symetrická, tranzitivní; 5 tříd rozkladu, největší přísluší hodnotě 7]

5.3.4. Popište všechny relace na množině A, které jsou současně relacemi ekvivalence i uspořádáním. [právě relace rovnosti]

5.3.5. Mějme R a S libovolné relace ekvivalence na množině A. Které následující relace jsou také nutně ekvivalence?

a) $R \cap S$ [ano]

b) $R \cup S$ [ne]

c) $R \setminus S$ [ne]

5.3.6. Mějme R a S libovolné relace částečného uspořádání na množině A. Které následující relace jsou také nutně částečného uspořádání?

a) $R \cap S$ [ano]

b) $R \cup S$ [ne]

c) $R \setminus S$ [ne]

5.3.7. Kolik uspořádaných dvojic na množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ patří do relace

a)$^{\heartsuit}$rovnosti? [5]

b) menší? [10]

5.3.8. Kolik uspořádaných dvojic na množině $A = [1, n]$, kde $1 \leq n \in \mathbb{N}$, patří do relace

a) rovnosti? [n]

b) menší? [$\frac{1}{2}n(n-1)$]

5.3.9. Je relace dělitelnosti relací částečného uspořádání

a) na $\mathbb{N}$? [ano]

b) na $\mathbb{Z}$? [ne]

c) na $[a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{N} \wedge a < b$? [ano]

5.3.10. Má smysl kreslit hasseovský diagram relace R, kde pro dva různé prvky platí $(x, y) \in R$ a $(y, x) \in R$?
[relace není antisymetrická – není jasné, který prvek zakreslit výš]

5.4 Funkce a zobrazení

5.4.1. Rozhodněte, zda následující funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou injekce, surjekce, bijekce nebo žádná z nich.

a) $f : y = x^4$ [žádná]

b) $g : y = \ln x$ [není funkce]

c) $h : y = e^x$ [injekce]

d) $k : y = \operatorname{tg} x$ [není funkce]

e) $k : y = \operatorname{arctg} x$ [injekce]

f) $l : y = x^3 - x$ [surjekce]

g) $m : y = (x-1)^3$ [bijekce]

5.4.2. Najděte příklad funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je

a) injekce, ale není surjekcí [$f : y = \operatorname{arctg} x$]

b) surjekce, ale není injekcí [$f : y = x^3 - x$]

c) (netriviální) bijekce [$f : y = (x-1)^3$]

5.4.3. Najděte příklad funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která je

a) injekce, ale není surjekcí [$f : y = 2x$]

b) surjekce, ale není injekcí [$f : \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$]

c) (netriviální) bijekce $\left[f : y = \begin{cases} x+1 & \text{pro } x \text{ sudé} \\ x-1 & \text{pro } x \text{ liché} \end{cases}\right]$

5.4.4. Je-li $g \circ f$ surjekce,

a) musí být g surjekce? [ano]

b) musí být f surjekce? [ne]

5.4.5. Je-li $g \circ f$ prostá,

a) musí být g prostá? [ne]

b) musí být f prostá? [ano]

5.4.6. Je-li $g \circ f$ prostá, musí být g prostá? Musí být f prostá? [a) ne $g : y = \ln|x|$, $f : y = e^x$, b) ano]

5.4.7. Ukažte, že přirozených čísel i celých čísel je stejně, tj. že platí $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$. [Najdeme bijekci a ukážeme, že se jedná o bijekci.]

5.5 Skládání zobrazení a permutace

5.5.1. Ukažte, že zobrazení ρ přiřazující číslu x z množiny $\{0, 1, \ldots, 6\}$ číslo $3 \cdot x \bmod 7$ je permutace (zbytek čísla $3x$ po dělení 7). Zapište permutaci ρ pomocí a) matice, b) pomocí cyklů. Jaký je řád této permutace?
$\left[\text{a) } \rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \rho = (0)(132645). \text{ Řád } \rho \text{ je } 6.\right]$

5.5.2. Určete řád permutace σ, je-li

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ [12]

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 1 & 3 & 5 & 9 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ [6]

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ [8]

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 4 & 2 & 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ [6]

5.5.3. Najděte inverzní permutaci π^{-1}, je-li

a) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ $\left[\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 9 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}\right]$

b) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ $\left[\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 6 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}\right]$

c) $\pi = (147)(2685)(3)$ $[\pi^{-1} = (174)(2586)(3)]$

d) $\pi = (13742685)$ $[\pi^{-1} = (15862473)]$

5.5.4. Kolik existuje permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ s jediným cyklem? $[(n-1)!]$

5.5.5. Najděte složenou permutaci $\sigma \circ \pi$, je-li

a) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ $\left[\sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\right]$

b) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ $\left[\sigma \circ \pi = \iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\right]$

c) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ [neexistuje]

d) $\pi = (134)(2675)$, $\sigma = (136)(47)(25)$ $[\sigma \circ \pi = (164372)(5)]$

e) $\pi = (1243)(675)$, $\sigma = (1342)(576)$ $[\sigma \circ \pi = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)]$

5.5.6. Jakého nejvyššího řádu najdete permutaci na množině A, je-li

a) $A = [1, 9]$ [20]

b) $A = [1, 10]$ [30]

c) $A = [1, 13]$ [60]

5.5.7. Máme dánu permutaci $\pi = (17485)(263)$. Určete $\underbrace{\pi \circ \pi \circ \ldots \circ \pi}_{542 \text{ krát}}$ $\left[\underbrace{\pi \circ \pi \circ \ldots \circ \pi}_{542 \text{ krát}} = (14578)(362)\right]$

5.5.8.* Máme stroječek na míchání karet. Navrhněte takovou permutaci karet, aby počet různých rozmíchání, která dostaneme opakováným použitím stroječku byl co největší.

5.5.9.** Máme stroječek na míchání karet. Když do stroječku vložíme seřazený balíček karet v pořadí $1, 2, \ldots, n = 2t$, balíček zamíchá tak (udělá takovou permutaci karet), že na sudé pozice po řadě vmíchá karty z druhé poloviny. Dostaneme pořadí $1, t+1, 2, t+2, 3, 19, \ldots, t, 2t$. Jaký je řád permutace, neboli po kolika nejméně opakovaných mícháních dostaneme opět seřazený balíček?

5.5.10.** Máme stroječek na míchání karet. Když do stroječku vložíme seřazený balíček karet v pořadí $1, 2, \ldots, n$, balíček zamíchá tak (udělá takovou permutaci karet), že vloží sudé karty mezi liché. Dostaneme pořadí $1, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, 2, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2, 3, 19, \ldots, n, \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Jaký je řád permutace, neboli po kolika nejméně opakovaných mícháních dostaneme opět seřazený balíček?

5.5.11. Označme $r(n)$ funkci, která každému číslu n přiřadí největší řád permutace na n-prvkové množině. Ukažte, že $r(n)$ je neklesající funkce. [ke každé permutaci n prvkové množiny najdeme permutaci $n+1$ prvkové množiny přidáním cyklu $(n+1)$]

5.5.12. Je dána permutace ρ a známe složenou permutaci $\sigma \circ \rho$. Můžete určit, jak vypadá permutace σ? [ano]

5.5.13. Jsou dány dvě permutace ρ a σ. Můžete určit, jak vypadá každá permutace ρ a σ, jetliže víte, jak vypadá $\rho \circ \sigma$ a $\sigma \circ \rho$? [ne]

5.6 Příklady k procvičení

5.6.1. Najděte příklad dvojice takových tranzitivních relací R_1 a R_2, že a) $R_1 \cup R_2$, b) $R_1 \setminus R_2$ ani c) $R_1 \Delta R_2$ tranzitivní nejsou.

5.6.2. Máme množinu $X = \{(x, y) \colon a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. Ukažte, že relace R definovaná tak, že $(a, b)R(c, d)$ právě tehdy, když $ad = bc$ je relací ekvivalence na množině X. Jakou známou množinu tvoří třídy ekvivalence? [třídy ekvivalence jsou ekvivalentní zlomky]

5.6.3. Máme dva stroječky na míchání karet: jeden dělá vždy permutaci $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 7 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, druhý vždy permutaci $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 7 & 1 & 3 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Budeme střídavě míchat α, β, α, …Kolik různých rozmíchání dostaneme?

6 Princip inkluze a exkluze

Podrobněji si o principu inkluze a exkluze můžete přečíst ve skriptech [ZDM].

Řešené příklady

6.0.1. Kolika způsoby je možno vybrat pět karet z balíčku 52 karet tak, aby mezi nimi byla od každé barvy alespoň jedna karta?

Úlohu vyřešíme užitím principu inkluze a exkluze. Označme si A_i počet všech možných výběrů 5 karet z balíčku 52 karet, ve kterých chybí barva i. Pochopitelně $|A_i| = |A_j|$, pro všechny dvojice barev i, j. Všimněte si, že $|A_i \cap A_j|$ odpovídá těm výběrům pěti karet, kde chybí obě barvy i, j.

Od celkového počtu všech výběrů $C(52, 5) = \binom{52}{5}$ odečteme všechny výběry obsažené v $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$. Dle principu inkluze a exkluze určíme

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \binom{4}{1}|A_1| - \binom{4}{2}|A_1 \cap A_2| + \binom{4}{3}|A_1 \cap A_2 \cap A_3| - \binom{4}{4}|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| =$$

$$= \binom{4}{1}\binom{39}{5} - \binom{4}{2}\binom{26}{5} + \binom{4}{3}\binom{13}{5} - 0.$$

Slovy můžeme říci: od celkového počtu výběrů pěti karet $\binom{52}{5}$

- odečteme možnosti, kdy chybí alespoň jedna barva: $\binom{4}{1}\binom{39}{5}$,
- přičteme možnosti, kdy chybí alespoň dvě barvy: $\binom{4}{2}\binom{26}{5}$,
- odečteme možnosti, kdy chybí alespoň tři barvy: $\binom{4}{3}\binom{13}{5}$.

Čtyři barvy chybět nemohou. Dostaneme

$$\binom{52}{5} - 4\binom{39}{5} + 6\binom{26}{5} - 4\binom{13}{5} + 0 = 685\,464.$$

Jiné řešení:
Od celkového počtu výběrů pěti karet $\binom{52}{5}$ odečteme možnosti, kdy

- máme právě tři karty nějaké barvy $\binom{4}{1} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{39}{2}$
- máme právě čtyři karty nějaké barvy $\binom{4}{1} \cdot \binom{13}{4} \cdot \binom{39}{1}$
- máme právě pět karet nějaké barvy $\binom{4}{1} \cdot \binom{13}{5} \cdot \binom{13}{0}$
- máme právě dvě karty jedné barvy a dvě karty jiné barvy $\binom{4}{2} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{26}{1}$

Celkem máme

$$\binom{52}{5} - \binom{4}{1} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{39}{2} - \binom{4}{1} \cdot \binom{13}{4} \cdot \binom{39}{1} - \binom{4}{1} \cdot \binom{13}{5} \cdot \binom{13}{0} - \binom{4}{2} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{26}{1} = 685\,464.$$

Jiné řešení:
Všimneme si, že musí být 2 karty jedné barvy a zbylé karty musí být různých barev. Vybereme jednu barvu $\binom{4}{1}$ způsoby a v této barvě dvě karty $\binom{13}{2}$ Celkem máme

$$4\binom{13}{2} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} = 685\,464.$$

6.1 Užití principu inkluze a exkluze

6.1.1. Kolik čísel zůstane v množině čísel $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ po vyškrtání všech násobků $2, 3, 5$? [266]

6.1.2. Kolik čísel zůstane v množině čísel $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ po vyškrtání všech násobků $2, 3, 5, 7$? [228]

6.1.3. Na večírku se sešly 3 manželské páry. Kolika různými způsoby lze posadit těchto 6 lidí kolem kulatého stolu tak, aby manželé neseděli vedle sebe? [32]

6.1.4. Na večírku se sešly 4 manželské páry. Kolika různými způsoby lze posadit těchto 8 lidí kolem kulatého stolu tak, aby manželé neseděli vedle sebe? [1488]

6.1.5.* Na večírku se sešlo n manželských párů. Kolika různými způsoby lze posadit těchto $2n$ lidí kolem kulatého stolu tak, aby manželé *neseděli* vedle sebe? Ve dvou rozdílných rozesazeních má některý člověk jiného souseda po levé nebo po pravé ruce.

6.1.6.* Na plese se sešlo n manželských párů. Kolika různými způsoby může spolu tančit vždy všech $2n$ lidí tak, aby žádný manželský pár netančil spolu?

6.1.7.* (Problém šatnářky) Na shromáždění přišlo n hostů, všichni v kloboucích, a odloží si své klobouky do šatny. Při odchodu dostávají své klobouky náhodně. Jaká pravděpodobnost, že žádný pán nedostane svůj klobouk zpět? $\left[\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{i!} \approx \frac{1}{e}\right]$

6.1.8. Na shromáždění přišlo 5 hostů, všichni v kloboucích, a odloží si své klobouky do šatny. Při odchodu dostávají své klobouky náhodně. Jaká pravděpodobnost, že žádný pán nedostane svůj klobouk zpět? $\left[\frac{11}{30}\right]$

6.1.9. Máme dva zamíchané balíčky 32 karet. Z každého obrátíme shora vždy jednu kartu. Jaká je pravděpodobnost, že nikdy nebudou vytaženy dvě stejné karty? $[\approx 0.36788]$

6.1.10. Kolika způsoby rozmístíme r objektů do pěti schránek tak, aby alespoň jedna byla prázdná? $\left[\binom{5}{1}4^r - \binom{5}{2}3^r + \binom{5}{3}2^r - \binom{5}{4}1^r + 0\right]$

6.1.11. Kolik existuje n prvkových posloupností čísel $0, 1, \ldots, 9$ takových, které obsahují vždy čísla $1, 2$ a 3? Čísla se mohou opakovat. $[10^n - 3 \cdot 9^n + 3 \cdot 8^n - 7^n]$

6.2 Příklady k procvičení

6.2.1. Kolik nul na konci má

a) číslo 50!? [12]

b) číslo 1234!? [305]

6.2.2. Pomocí vhodné kombinatorické interpretace a použitím principu inkluze a exkluze spočítejte následující sumu pro n, m, j přirozená taková, že $n \geq j \geq (m+n)$, t.j. vyjádřete tuto sumu jako nějaký výraz, který už bude bez sumy:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{m+n-i}{j-i}$$

7 Algoritmizace diskrétních struktur

Následující příklady jsou zaměřeny na implementaci struktur a postupů probíraných v diskrétní matematice[2].

7.1 Permutace

7.1.1. Máme dánu nějakou permutaci n-prvkové množiny. Určete paritu (sudost/lichost počtu inverzí) permutace. Algorimus by měl pracovat s rychlostí řádově lepší než $O(n^2)$.

7.1.2. Máme dánu nějakou permutaci n-prvkové množiny. Určete počet inverzí v permutaci. Algorimus by měl pracovat s rychlostí řádově lepší než $O(n^2)$.

[2]Tato kapitola se na cvičeních neprobírá.

Část II

Úvod do teorie grafů

1 Pojem grafu

Základní grafové pojmy jsou podrobně zavedeny ve skriptech [UTG].

Řešené příklady

1.0.1. Pro jaké n je K_n cyklem?
Známe definice kompletního grafu K_n i cyklu C_n. Z definice známe počet hran grafů K_n i C_n. Musí se rovnat počty hran, tj.

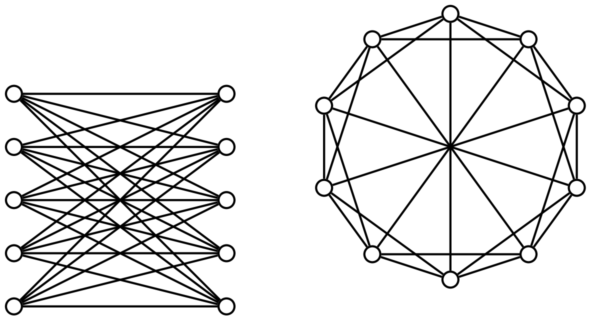
$$\begin{aligned} |E(K_n)| &= |E(C_n)| \\ \binom{n}{2} &= n \\ \frac{n(n-1)}{2} &= n \\ n-1 &= 2 \\ n &= 3. \end{aligned}$$

Pouze pro $n = 3$ je K_n cyklem.
Jiné řešení:
Stupeň každého vrcholu v kompletním grafu musí být 2, stejně jako v cyklu.

$$\begin{aligned} \deg(x) &= 2 \\ n-1 &= 2 \\ n &= 3. \end{aligned}$$

Pouze pro $n = 3$ je K_n cyklem.

1.0.2. Jsou isomorfní $K_{5,5}$ a cirkulant $C_{10}(1, 2, 5)$ na Obrázku 1.1?



Obrázek 1.1: *Kompletní bipartitní graf* $K_{5,5}$ *a cirkulant* $C_{10}(1, 2, 5)$.

Ne, protože graf $K_{5,5}$ je bipartitní, ale cirkulant není. Bipartitní graf obsahuje jako podgrafy pouze sudé cykly, ale cirkulant $C_{10}(1, 2, 5)$ obsahuje jako podgraf například i cyklus C_3.

1.1 Motivační příklady

1.1.1. Devět kamarádů si na Vánoce dalo dárky. Každý dal dárky třem svým kamarádům. Ukažte, že není možné, aby každý dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal. [dle Principu sudosti]

1.1.2. Máme 6 házenkářských týmů, které mají odehrát 15 zápasů, každý s každým. Je možné odehrát celý turnaj během pěti hracích dnů, kdy probíhají současně vždy 3 zápasy? [užitím výsledku o hranovém barvení grafu]

1.1.3. Máme 7 házenkářských týmů, které mají odehrát 21 zápasů, každý s každým. Ukažte, že není možné odehrát celý turnaj během šesti hracích dnů, kdy probíhají současně vždy 3 zápasy. [Dirichletův princip nebo užitím výsledku o hranovém barvení grafu]

1.2 Základní třídy grafů

1.2.1.$^\heartsuit$ Nakreslete graf $G = (V, E)$, je-li dáno

a) $V = \{a, b, c, d\}$ a $E = \{ab, ac, ad\}$. [$K_{1,3}$]

b) $V = \{k, l, m, n, o\}$ a $E = \{kl, mn, mo, ln, ko\}$. [$C_5$]

c) $V = \{k, l, m, n, o, p\}$ a $E = \{kl, mn, mp, lo, ok, np\}$. [$2C_3$]

d) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ a $E = \{12, 13, 14, 25, 26, 57, 68\}$ [langusta $L(2, 1, 1)$]

1.2.2.$^\heartsuit$ Kolik hran a kolik vrcholů má P_n (dle značení ve skriptech [UTG])? [$|V(P_n)| = n$, $|E(P_n)| = n - 1$]

1.2.3.$^\heartsuit$ Kolik hran a kolik vrcholů má K_n? $\left[|V(K_n)| = n,\ |E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}\right]$

1.2.4.$^\heartsuit$ Kolik hran a kolik vrcholů má $K_{m,n}$? [$|V(K_{m,n})| = m + n$, $|E(K_{m,n})| = mn$]

1.2.5.$^\heartsuit$ Srovnejme grafy $K_{6,7}$ a K_{10}.

a) Který má více vrcholů? [$K_{6,7}$]

b) Který má více hran? [K_{10}]

1.2.6.$^\heartsuit$ Srovnejme grafy $K_{5,12}$ a K_{12}.

a) Který má více vrcholů? [$K_{5,12}$]

b) Který má více hran? [K_{12}]

1.3 Stupně vrcholů v grafu

1.3.1. Jaký je největší a nejmenší stupeň vrcholu v grafu

a) P_n [$\delta(P_n) = 1,\ \Delta(P_n) \in \{1, 2\}$]

b) C_n? [$\delta(C_n) = \Delta(C_n) = 2$]

c) K_n? [$\delta(K_n) = \Delta(K_n) = n - 1$]

d) $K_{m,n}$? [$\delta(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$ a $\Delta(K_{m,n}) = \max\{m, n\}$]

1.3.2.$^\heartsuit$ Napište stupňovou posloupnost grafu

a) P_5, [$(1, 1, 2, 2, 2, 2)$]

b) C_4, [$(2, 2, 2, 2)$]

c) K_4, [$(3, 3, 3, 3)$]

d) $K_{3,2}$. [$(2, 2, 2, 3, 3)$]

1.3.3. Kolik existuje různých grafů na n vrcholech. Rozlišujeme pojmenování vrcholů, tj. například pro $V = \{1, 2, 3\}$ rozlišíme grafy s $E_1 = \{12\}$ a s $E_2 = \{23\}$. $\left[2^{\binom{n}{2}}\right]$

1.3.4. Kolik existuje různých bipartitních grafů na $m + n$ vrcholech. Rozlišujeme pojmenování vrcholů! [2^{mn}]

1.3.5. Pro jaké n je K_n cestou? [$n = 0,\ n = 1$]

1.3.6. Pro jaké n je $K_{m,n}$ cyklem? [$n = m = 2$]

1.3.7. Pro jaké m, n je $K_{m,n}$ cestou? [pro $m = n = 1$ nebo pro $m = 2, n = 1$ nebo pro $m = 1, n = 2$]

1.3.8.$^\heartsuit$ Kolik hran má graf

a) s deseti vrcholy stupně 5? [25]

b) s 11 vrcholy stupně 5? [takový graf neexistuje]

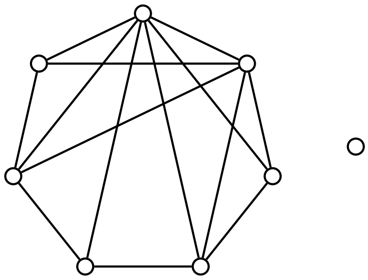
c) se stupňovou posloupností $(1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 7)$ [18]

d) se stupňovou posloupností $(1, 1, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 7)$ [takový graf neexistuje]

e) se stupňovou posloupností $(1, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 7)$ [takový graf neexistuje]

1.3.9. Kolik vrcholů má graf, který má 15 hran, 3 vrcholy stupně 4 a zbývající vrcholy stupně 3? [9 vrcholů]

1.3.10. Určete stupňovou posloupnost grafu G na Obrázku 1.2. Je to jediný graf s touto stupňovou posloupností?



Obrázek 1.2: *Graf G.*

[$(0, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6)$, ne]

1.3.11. Nakreslete graf se stupňovou posloupností

a)♡ $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ [takový graf neexistuje]

b) $(1, 1, 1, 2, 2, 5)$ [existuje]

c) $(0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4)$ [existuje]

d) $(2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5)$ [existuje]

e) $(1, 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7)$ [takový graf neexistuje]

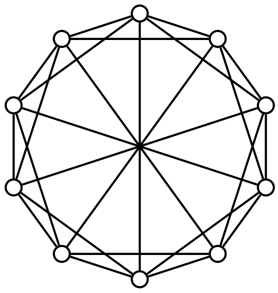
f)♡ $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 5)$ [existuje]

g)♡ $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 5)$ [takový graf neexistuje]

h) $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 5)$ [existuje]

1.3.12. Najděte velikost největší nezávislé množiny vrcholů v grafu $K_{5,5}$. [5]

1.3.13. Najděte velikost největší nezávislé množiny vrcholů v grafu na Obrázku 1.3.



Obrázek 1.3: *Cirkulant* $C_{10}(1, 2, 5)$.

[tři]

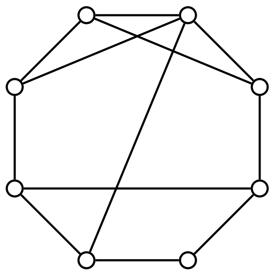
1.4 Podgrafy

Mějme dána kladná celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Cirkulantem $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ rozumíme graf $G = (V, E)$ na n vrcholech $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$, kde hranová množina je

$$E = \{v_i v_{(i+a_j) \bmod n} : 0 \leq i \leq n-1 \wedge 1 \leq j \leq k\}.$$

Příklad cirkulantu $C_{10}(1, 2, 5)$ je na Obrázku 1.1.

1.4.1. Mějme graf G na Obrázku 1.4.



Obrázek 1.4: *Graf G.*

a)$^{\heartsuit}$ Jaká je nejdelší kružnice obsažená jako podgraf v grafu G? [C_8]

b)$^{\heartsuit}$ Jaká je nejkratší kružnice obsažená jako podgraf v grafu G? [C_3]

c)$^{\heartsuit}$ Jaká je nejdelší cesta obsažená jako podgraf v grafu G? [P_7]

d)$^{\heartsuit}$ Jaká je nejkratší indukovaná kružnice v grafu G? [C_3]

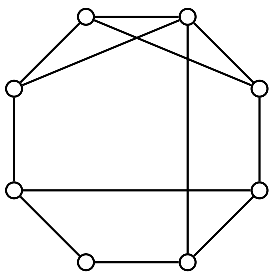
e)* Jaká je nejdelší indukovaná kružnice v grafu G? [C_5]

f)* Jaká je nejdelší indukovaná cesta v grafu G? [P_6]

g) Jaká je velikost největší nezávislé množiny vrcholů grafu G? [3]

h) Existuje nějaký neisomorfní graf se stejnou stupňovou posloupností? [ano]

i) Ukažte, že graf G'' na Obrázku 1.5 je isomorfní s grafem G.



Obrázek 1.5: *Graf G'' se stupňovou posloupností* $(2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4)$.

[najít isomorfismus]

1.4.2. Mějme grafy G a H na Obrázku 1.6.

Obrázek 1.6: *Grafy G a H.*

a) Jaká je nejdelší indukovaná cesta v grafu G? $[P_4]$

b) Jaký je nejdelší indukovaný cyklus v grafu G? $[C_3]$

c) Jaká je nejdelší indukovaná cesta v grafu H? $[P_6]$

d) Jaký je nejdelší indukovaný cyklus v grafu H? $[C_3]$

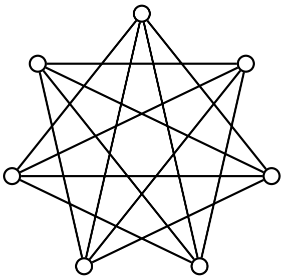
1.5 Isomorfismus grafů

1.5.1. Kolik existuje neisomorfních 2-pravidelných grafů

a) na 5 vrcholech? [1]

b) na 6 vrcholech? [2]

1.5.2. Jsou isomorfní grafy $K_7 - C_7$ a $K_7 - (C_3 \cup C_4)$?



Obrázek 1.7: *Grafy* $K_7 - C_7$ *a* $K_7 - (C_3 \cup C_4)$.

[ne]

1.5.3. Jsou následující dva grafy G a H isomorfní?

Obrázek 1.8: *Grafy* G *a* H.

[ne]

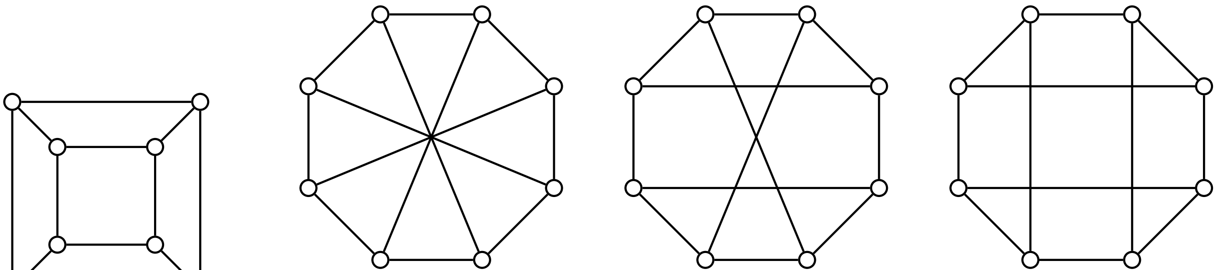
1.5.4. Kolik existuje neisomorfních 5-pravidelných grafů na osmi vrcholech? [tři]

1.5.5. Existují dva neisomorfní grafy se stupňovou posloupností

a) $(3,3,3,3,3,3)$? Najděte je nebo ukažte, že takové grafy neexistují. [ano, $K_6 - C_6$ a $K_6 - 2C_3$]

b) $(2,2,3,3)$? Najděte je nebo ukažte, že takové grafy neexistují. [ne]

1.5.6. Najděte mezi grafy G_1, G_2, G_3 a G_4 na Obrázku 1.9 všechny isomorfní dvojice. Pečlivě zdůvodněte.



Obrázek 1.9: *Grafy označené po řadě* G_1, G_2, G_3 *a* G_4.

$[G_1 \simeq G_4$ a $G_2 \simeq G_3]$

1.5.7. Najděte všechny neisomorfní jednoduché grafy na čtyřech vrcholech. [jedenáct grafů]

1.6 Implementace grafů

1.6.1.* Naprogramujte algoritmus, jak rozmístit 8 královen na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovaly.

1.6.2. Naprogramujte algoritmus, který vygeneruje všechny grafy na n vrcholech, jestliže rozlišujeme pojmenování vrcholů, tj. například pro $V = \{1, 2, 3\}$ rozlišíme grafy s $E_1 = \{12\}$ a s $E_2 = \{23\}$.

1.7 Příklady k procvičení

1.7.1.♡ Srovnejme grafy $K_{6,6}$ a K_9.

a) Který má více vrcholů? $[K_{6,6}]$

b) Který má více hran? [stejně hran]

1.7.2. Srovnejme grafy $K_{20,20}$ a K_{29}.

a) Který má více vrcholů? $[K_{20,20}]$

b) Který má více hran? $[K_{29}]$

1.7.3. Kolik hran a kolik vrcholů má C_n? $[|V(C_n)| = n,\ |E(C_n)| = n]$

1.7.4. Pro jaké m, n neobsahuje $K_{m,n}$ žádnou kružnici? [pouze je-li $m = 1$ nebo $n = 1$]

1.7.5.♡ Kolik hran musíme odebrat z grafu K_6, abychom dostali $K_{3,3}$? [6 hran]

1.7.6. Pro která n je následující stupňová posloupnost grafová?

a) $(1, 2, \ldots, n)$ [pro žádné n]

b) $(0, 1, \ldots, n-1)$ [pouze $n = 1$]

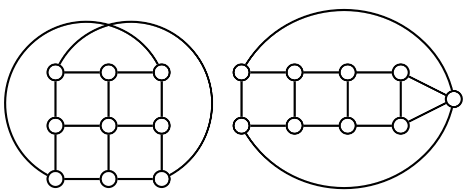
c) $(1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots, n, n)$ [pro každé $n \geq 1$]

1.7.7. Pro které hodnoty n a r existuje grafu na n vrcholech, kde každý vrchol je stupně r? Dokažte. [pro n, r liché graf neexistuje, jinak ano]

1.7.8. Jsou grafy $K_{3,3}$ a cirkulant $C_6(1, 3)$ isomorfní? [ano]

1.7.9. Jsou grafy $K_{4,4}$ a cirkulant $C_8(1, 2)$ isomorfní? [ne]

1.7.10. Jsou následující dva grafy G a H isomorfní?



Obrázek 1.10: *Grafy G a H.*

[ne]

1.7.11.* Na jakém nejmenším počtu vrcholů najdete dva neisomorfní grafy se stejnou stupňovou posloupností? $[n = 5]$

1.7.12.* Strnulý graf má pouze triviální automorfismus. Najděte strnulý graf s co nejmenším počtem vrcholů. [nejmenší strnulý graf má 6 vrcholů]

1.7.13. Kolik existuje grafů se sedmi vrcholy stupně 2? [dva]

1.7.14. Kolik existuje grafů s deseti vrcholy stupně 2? [pět]

1.7.15.* Dva hráči přidávají postupně 1, 2, nebo 3 centy na hromádku. Ten, kdo na hromádku přidá šestnáctý cent, vyhrál. Modelujte hru s užitím orientovaného grafu a ukažte, že druhý hráč může vždy vyhrát.

1.7.16. Najděte všechny neisomorfní orientované grafy na třech vrcholech.

2 Souvislost grafu

Souvislost grafu je zavedena ve skriptech [UTG].

Řešené příklady

2.0.1. Kolik nejvýše hran může mít graf na deseti vrcholech, který má dvě komponenty? Najdete takový graf?

Předpokládejme, že máme graf se dvěma komponentami H_1 a H_2, který má největší počet hran. Nejprve si všimneme, že obě komponenty jsou kompletní grafy, jinak bychom mohli nějaké hrany přidat (G by nebyl a největším počtem hran).

Máme proto $G \simeq K_i \cup K_{10-i}$. Vyjádříme si počet hran v závislosti na proměnné i.

$$|E(G)| = |E(K_i)|+|E(K_{10-i})| = \binom{i}{2}+\binom{10-i}{2} = \frac{1}{2}i(i-1)+\frac{1}{2}(10-i)(9-i) = \frac{1}{2}\left(i^2 - i + 90 - 19i + i^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2i^2 - 20i + 90\right) = i^2 - 10i + 45 = (i-5)^2 + 20.$$

Najdeme (celočíselné) maximum funkce $E(i) = i^2 - 10i + 45$ v závislosti na proměnné i na intervalu $\langle 1, 9\rangle$. K řešení můžeme použít diferenciální počet a nebo pozorování, že grafem kvadratické funkce s *reálnou* proměnnou i by byla parabola otevřená směrem nahoru. Minimum (vrchol) má v bodě $[5, 20]$, maximum nabývá v krajních bodech intervalu $\langle 1, 9\rangle$. Vzhledem k symetrii úlohu je $E_{max}(G) = E(9) = E(1) = 1 - 10 + 45 = 36$. Maximální počet hran s danými parametry má graf $G = K_1 \cup K_9$.

Jiné řešení:

Víme (podle definice hranové k-souvislosti), že graf K_{10} je hranově 9-souvislý. Je proto nutno z celkového počtu $\binom{10}{2} = 45$ hran vynechat alespoň devět, abychom dostali nesouvislý graf. Vynecháme-li všech 9 hran incidentních s některým vrcholem, dostaneme nesouvislý graf s celkem $45 - 9 = 36$ hranami. Protože původní graf K_{10} byl hranově 9-souvislý, dostaneme po vynechání 9 hran nesouvislý graf s největším počtem hran.

2.0.2. Mějme kompletní bipartitní graf $K_{m,n}$.

a) Jaký je hranový stupeň souvislosti $K_{m,n}$?

Pomocí Mengerových vět snadno ukážeme, že hranový stupně souvislosti grafu $K_{m,n}$ je $\min\{m, n\}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $m \geq n$, proto $\min\{m, n\} = n$.

Označme partity grafu $K_{m,n}$ jako U a W a jejich vrcholy $u_1, u_2, \ldots, u_m$ a $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Nyní zkonstruujeme mezi libovolnými dvěma různými vrcholy x, y grafu $K_{m,n}$ n hranově disjunktních cest.

1. Jsou-li $x, y \in U$, můžeme vrcholy v U přečíslovat tak, aby $x = u_1$ a $y = u_2$. Nyní cesty $P^{(1)} = u_1, w_1, u_2$, $P^{(2)} = u_1, w_2, u_2$, až $P^{(n)} = u_1, w_n, u_2$ jsou hranově disjunktní.
2. Jsou-li $x, y \in W$, můžeme vrcholy v W přečíslovat tak, aby $x = w_1$ a $y = w_2$. Nyní cesty $P^{(1)} = w_1, u_1, w_2$, $P^{(2)} = w_1, u_2, w_2$, až $P^{(n)} = w_1, u_n, w_2$ jsou hranově disjunktní.
3. Jsou-li $x \in U$ a $y \in W$ (podobně naopak), můžeme vrcholy v U a W přečíslovat tak, aby $x = u_1$ a $y = w_2$. Nyní cesta (hrana) $P^{(1)} = u_1, w_1$ a cesty, $P^{(2)} = u_1, w_2, u_2, w_1$, $P^{(3)} = u_1, w_3, u_3, w_1$, až $P^{(n)} = u_1, w_n, u_n, w_1$ jsou hranově disjunktní.

Protože mezi libovolnými dvěma vrcholy x, y grafu $K_{m,n}$ existuje n hranově disjunktních cest a protože odstraněním všech n hran z jednoho vrcholu partity U dostaneme nesouvislý graf, je hranový stupeň souvislosti grafu $K_{m,n}$ roven $\min\{m, n\}$.

Na druhou stranu hranový stupeň souvislosti nemůže být větší než n, neboť odebereme-li všech n hran incidentních s vrcholem u_1, zůstane izolovaný vrchol u_1 a výsledný graf není souvislý.

b) Jaký je vrcholový stupeň souvislosti $K_{m,n}$?

Protože cesty zkonstruované v předchozím příkladu jsou nejen hranově, ale i vrcholově disjunktní, je důkaz i řešení analogické.

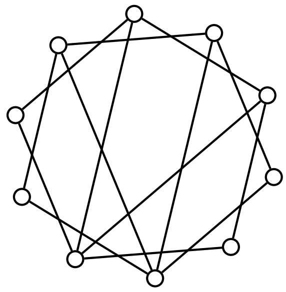
Pro $m = n = 1$ je graf kompletní a jeho vrcholový stupeň souvislosti je $m = n = 1$. Pro $m \geq 2$ můžeme uvažovat následovně: vrcholový stupeň souvislosti nemůže být větší než n, neboť odebereme-li všech n vrcholů z menší partity, dostaneme nesouvislý graf.

2.1 Souvislost a komponenty grafu

2.1.1.♡ Kolik komponent souvislosti má souvislý graf? [jedinou komponentu]

2.1.2.♡ Kolik komponent souvislosti má nesouvislý graf? [alespoň dvě komponenty]

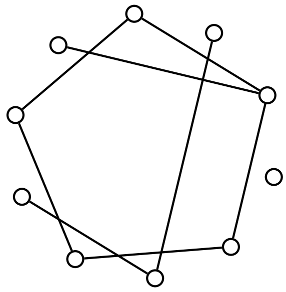
2.1.3.♡ Kolik komponent souvislosti má graf na Obrázku 2.1? Je souvislý?



Obrázek 2.1: *Graf G.*

[dvě komponenty, ne]

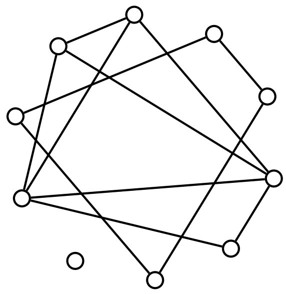
2.1.4. Kolik komponent souvislosti má graf G na Obrázku 2.2? Je souvislý?



Obrázek 2.2: *Graf G.*

[tři komponenty, ne]

2.1.5.♡ Kolik komponent souvislosti má graf na Obrázku 2.3? Je souvislý?



Obrázek 2.3: *Graf G.*

[tři komponenty, ne]

2.1.6. Kolik komponent souvislosti má cirkulant $C_{12}(3,6)$? [tři]

2.1.7. Kolik komponent má graf s deseti vrcholy stupně 5? Dokažte. [jednu komponentu]

2.1.8. Kolik komponent může mít graf s deseti vrcholy a 25 hranami? Dokažte. [jednu, dvě nebo tři komponenty]

2.1.9. Kolik existuje různých grafů s deseti vrcholy, třemi komponentami a 25 hranami? Dokažte. [5]

2.1.10.♡ Kolik komponent má graf s patnácti vrcholy stupně 5? Dokažte. [žádnou, takový graf neexistuje]

2.1.11. Kolik komponent může mít graf s deseti vrcholy stupně 2? Dokažte. [jednu, dvě nebo tři komponenty]

2.1.12. Kolik nejvýše hran může mít graf na deseti vrcholech, který má dvě komponenty a žádný vrchol stupně většího než 3? Najdete takový graf? [graf $K_4 \cup K_6 - C_6$ nebo $K_6 - (C_3 \cup C_3)$ mají 15 hran]

2.1.13. Kolik nejméně hran může mít graf na deseti vrcholech, který má dvě komponenty? [8 hran, $2P_4$]

2.1.14. Kolik nejméně hran může mít graf na n vrcholech, který má k komponent? [$n-k$ hran, $P_{n-k-1} \cup (k-1)K_1$]

2.2 Prohledávání grafu

2.2.1. Jaká je složitost algoritmu (uvedeného na přednášce) pro prohledávání do šířky?

2.2.2. Jaká je složitost algoritmu (uvedeného na přednášce) pro prohledávání do hloubky?

2.3 Vyšší stupně souvislosti

2.3.1. Mějme cyklus C_n.

a) Jaký je hranový stupeň souvislosti C_n? [2]

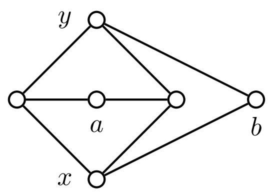
b) Jaký je vrcholový stupeň souvislosti C_n? [2]

2.3.2.♡ Víte, že minimální stupeň grafu G je 5.

a) Co můžete říci o hranové souvislosti grafu G? [hranový stupeň souvislosti je nejvýše 5]

b) Co můžete říci o vrcholové souvislosti grafu G? [vrcholový stupeň souvislosti je nejvýše 5]

2.3.3. Máme dán graf $K_{3,3}$ bez jedné hrany, viz Obrázek 2.4.



Obrázek 2.4: *Graf* $K_{3,3} - e$.

a) Kolik hran musíme z grafu vynechat, aby neexistovala cesta mezi vrcholy a, b? Zdůvodněte! [dvě]

b) Kolik hran musíme z grafu vynechat, aby neexistovala cesta mezi vrcholy x, y? Zdůvodněte! [tři]

2.3.4.♡ Kolik musíme přidat hran do grafu P_5, aby byl 2-souvislý? [jednu]

2.3.5. Kolik musíme přidat hran do grafu P_6, aby byl 3-souvislý? [čtyři]

2.3.6. Najděte příklad grafu, kde každý vrchol je stupně r a hranová i vrcholová souvislost je 1.

2.3.7. Najděte příklad grafu, kde každý vrchol je stupně r a hranová i vrcholová souvislost je 2.

2.3.8. Najděte příklad grafu, kde každý vrchol je stupně r a hranová i vrcholová souvislost je $k \le r$.

2.3.9. Mějme libovolná přirozená čísla $a \leq b \leq c$. Najděte příklad grafu, kde každý vrchol je stupně c a hranová souvislost je b a vrcholová souvislost je a.

2.3.10. Najděte příklad souvislého grafu, jehož vrcholová souvislost je menší než hranová souvislost. [motýlek]

2.3.11. Najděte příklad souvislého grafu, jehož hranová souvislost je menší než vrcholová souvislost. [neexistuje]

2.3.12. Nakreslete 2-souvislý graf na co nejmenším počtu vrcholů tak, aby z něj přidáním jediné hrany vznikl 3-souvislý graf.

2.3.13.* Dokážete nakreslit 2-souvislý graf na co nejmenším počtu vrcholů a nejvýše dvěma vrcholy stupně dva tak, že přidáním jediné hrany nevznikne 3-souvislý graf?

2.4 Příklady k procvičení

2.4.1.$^{\heartsuit}$ Může existovat souvislý graf, který má více vrcholů než hran? Pokud ano, najděte příklad, pokud ne, dokažte. [ano, každý strom]

2.4.2. Najděte všechny souvislé grafy, které mají více vrcholů než hran. [stromy]

2.4.3. Může existovat souvislý graf, který má n vrcholů a méně než $n-1$ hran? Pokud ano, najděte příklad, pokud ne, dokažte. [takový graf nemůže existovat]

2.4.4. Ukažte, že není možné putovat koněm po celé šachovnici 3×3. [graf úlohy není souvislý]

2.4.5. Kolik nejvíce hran může mít graf s $n \geq 2$ vrcholy a 2 komponentami? $\left[\binom{n-1}{2}\right]$

2.4.6.* Kolik nejvíce hran může mít graf s n vrcholy a k komponentami? Předpokládáme, že $k \leq n$. $\left[\binom{n-k+1}{2}\right]$

2.4.7. Kolik nejméně hran musí mít 3-souvislý graf

a) na 6 vrcholech? [9]

b) na 12 vrcholech? [18]

c) na 9 vrcholech? [14]

2.4.8. Definujme graf $Z_2(n)$ jako graf, jehož vrcholy jsou všechny dvouprvkové podmnožiny nějaké n prvkové množiny, $n \geq 2$. Dva vrcholy jsou sousední, jestliže odpovídající vrcholy jsou disjunktní.

a) Pro která n je graf $Z_2(n)$ souvislý? $[n \geq 5]$

b) Je graf $Z_2(n)$ pravidelný? [ano]

c) Jaký je stupeň souvislosti grafu $Z_2(n)$?

2.4.9. Definujme graf $Z_2^*(n)$ jako graf, jehož vrcholy jsou všechny dvouprvkové podmnožiny nějaké n prvkové množiny, $n \geq 2$. Dva vrcholy jsou sousední, jestliže odpovídající vrcholy nejsou disjunktní.

a) Pro která n je graf $Z_2(n)$ souvislý? [všechna $n \geq 2$]

b) Je graf $Z_2(n)$ pravidelný? [ano]

c) Jaký je stupeň souvislosti grafu $Z_2(n)$? $[n-2]$

2.4.10.* Na množině čtyř vrcholů konstruujeme náhodný jednoduchý neorientovaný graf (bez smyček) tak, že každou dvojici vrcholů spojíme hranou s pravděpodobností p. Určete pravděpodobnost, že výsledný graf bude obsahovat a) alespoň jeden izolovaný vrchol, b) alespoň jeden trojúhelník.

2.4.11. Pat a Mat hrají hru: Mají daný souvislý graf G a buď Pat odstraní p vrcholů nebo mat odstraní m hran. Kdo odstraní méně objektů (vrcholů nebo hran), vyhrál. Kdo vyhraje, jestliže

a) $G = P_n$? [remíza pro $n = 1$ a $n \geq 3$, pro $n = 2$ vyhraje Mat]

b) $G = K_n$? [remíza pro $n = 1$, pro $n \geq 22$ vyhraje Mat]

c) $G = C_n$? [remíza pro $n \geq 4$, pro $n = 3$ vyhraje Mat]

d) $G = K_{m,n}$? [pro $m = n = 1$ vyhraje Mat, jinak remíza]

3 Eulerovské a hamiltonovské grafy

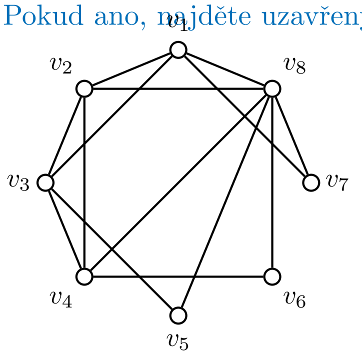
Eulerovské a hamiltonovské grafy jsou zavedeny ve skriptech [UTG].

Řešené příklady

3.0.1. Ukažte, že pro nesouvislé grafy nemusí platit, že graf s $2t$ vrcholy lichého stupně je možno nakreslit t otevřenými eulerovskými tahy.
Stačí vzít nesouvislý graf $K_1 \cup K_2$, případně $K_2 \cup K_3$. Oba mají dva vrcholy stupně lichého a není možné je nakreslit jedním otevřeným tahem.

3.1 Eulerovské grafy

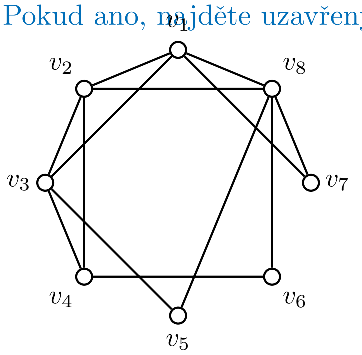
3.1.1. Je graf na Obrázku 3.1 eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.



Obrázek 3.1: *Graf G.*

[ano, například tah $v_1, v_2, v_3, v_4, v_8, v_1, v_3, v_5, v_8, v_2, v_4, v_6, v_8, v_7, v_1$]

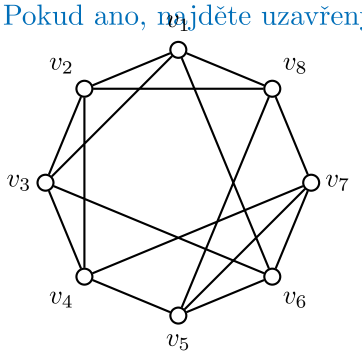
3.1.2. Je graf na Obrázku 3.2 eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.



Obrázek 3.2: *Graf G.*

[ne]

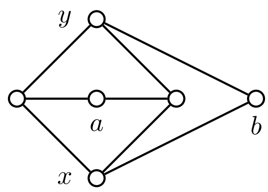
3.1.3. Je graf na Obrázku 3.3 eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.



Obrázek 3.3: *Graf G.*

[ano, například tah $v_1, v_3, v_6, v_1, v_2, v_4, v_7, v_5, v_8, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_1$]

3.1.4. Máme dán graf $K_{3,3}$ bez jedné hrany, viz Obrázek 3.4.



Obrázek 3.4: *Graf* $K_{3,3} - e$.

a) Je možno graf $K_{3,3} - e$ nakreslit jedním uzavřeným tahem? Nakreslete nebo zdůvodněte, proč to není možné. [ne]

b) Je možno graf $K_{3,3} - e$ nakreslit jedním otevřeným tahem? Nakreslete nebo zdůvodněte, proč to není možné. [ne]

c) Je možno graf $K_{3,3} - e$ nakreslit dvěma otevřenými tahy? Nakreslete nebo zdůvodněte, proč to není možné. [ano]

d) Kolik nejméně hran je třeba přidat do grafu $K_{3,3} - e$, aby jej bylo možno nakreslit jedním otevřeným tahem? [1 hranu]

e) Kolik nejméně hran je třeba přidat do grafu $K_{3,3} - e$, aby jej bylo možno nakreslit jedním uzavřeným tahem? [2 hrany]

3.1.5. Je cirkulant $C_6(1, 2)$ s vrcholovou množinou $V = \{v_i : i = 1, 2, \ldots, 6\}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [ano, například $v_1, v_3, v_5, v_1, v_2, v_4, v_6, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1$]

3.1.6. Je cirkulant $C_6(1, 3)$ s vrcholovou množinou $V = \{v_i : i = 1, 2, \ldots, 6\}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [není eulerovský]

3.1.7. Je cirkulant $C_8(1, 2)$ s vrcholovou množinou $V = \{v_i : i = 1, 2, \ldots, 8\}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [ano, například $v_1, v_3, v_5, v_7, v_1, v_2, v_4, v_6, v_8, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_1$]

3.1.8.$^\heartsuit$ Pro která n je možno K_n nakreslit jedním uzavřeným tahem? [pro n liché]

3.1.9. Pro která n je možno K_n nakreslit jedním otevřeným a nikoli uzavřeným tahem? [pouze pro $n = 2$]

3.1.10. Pro která m, n je možno $K_{m,n}$ nakreslit jedním uzavřeným tahem? [pro m, n sudé]

3.1.11. Pro která n je možno $K_{m,n}$ nakreslit jedním otevřeným tahem? [pro $m = 2$, n liché nebo $n = 2$, m liché nebo $m = n = 1$]

3.1.12. Dokažte, že eulerovský graf neobsahuje most.

3.1.13. Klasické domino obsahuje kostky s čísly 0 až 6. Z kostek je možno sestavit uzavřený cyklus, kdy kostky na sebe navazují stejnou hodnotou.

a) Vysvětlete, proč tomu tak je, s v využitím teorie grafů? [existuje uzavřený eulerovský tah ve vhodně sestaveném grafu]

b) Je možno podobně sestavit cyklus pro domino s čísly 0 až 9? [ne]

3.2 Hamiltonovské grafy

3.2.1. Nechť $V(G)$ grafu G je množina všech dvouprvkových podmnožin množiny $[1, 5]$ a nechť hrana $XY \in E(G)$ právě tehdy, když jsou dvouprvkové podmnožiny X, Y disjunktní ($X \cap Y = \emptyset$). Nakreslete graf. [Petersenův graf]

3.2.2. Je Petersenův graf hamiltonovský? Své tvrzení dokažte. [Petersenův graf není hamiltonovský]

3.3 Příklady k procvičení

3.3.1. Je graf $K_{4,4}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [ano]

3.3.2. Je graf $K_{4,6}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [ano]

3.3.3. Pro které n je graf $K_{2,n}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [n sudé]

3.3.4. Najděte příklad souvislého grafu, který má dva vrcholy lichého stupně a všechny ostatní vrcholy sudého stupně a do kterého

a) stačí přidat jedinou hranu tak, aby byl eulerovský. Jaký je nejmenší takový graf? [$K_5 - e$, P_2]

b) není možné přidat jedinou hranu tak, aby byl eulerovský. Jaký je nejmenší takový graf? [$K_4 - e$, K_2]

3.3.5. Pro každé t najděte příklad souvislého grafu, který

a) je souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit t otevřenými tahy. [K_{2t}]

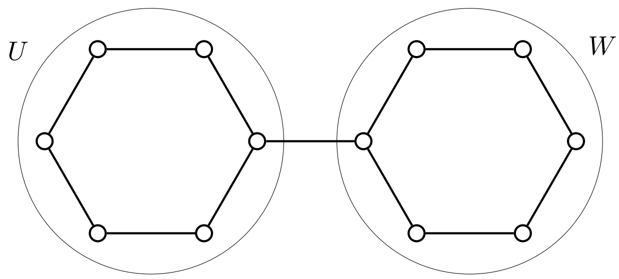
b) není souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit t otevřenými tahy. [tK_2]

c) je souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit t otevřenými tahy, ale není možné přidáním t hran získat eulerovský graf. [K_{2t}]

d)* je souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit t otevřenými tahy, a přidáním t hran je možné získat eulerovský graf.. [$K_{1,2t}$]

3.3.6. Pro libovolné sudé r a libovolné $n > r$ najděte příklad r-pravidelného eulerovského grafu na n vrcholech. [například cirkulant $C_n(1, 2, \ldots, \frac{r}{2})$]

3.3.7. Máme dán graf G na Obrázku 3.5.



Obrázek 3.5: *Graf G.*

a) Je graf G eulerovský? [ne]

b) Jak přidat hrany pouze mezi vrcholy v množině U nebo pouze mezi vrcholy v množině W tak, aby vznikl eulerovský graf? Pokud to není možné, dokažte! [není možné]

c) Jestliže dovolíme, aby alespoň jedna přidaná hrana měla jeden koncový vrchol v množině U a druhý v množině W, může přidáním hran vzniknout eulerovský graf? Jestliže ano, kolik nejméně hran je třeba přidat? Pokud to není možné, dokažte! [stačí přidat dvě hrany]

3.3.8. Ukažte, že souvislý graf s $2t$ vrcholy lichého stupně je možno nakreslit t otevřenými eulerovskými tahy. [přidáním pomocného vrcholu]

4 Vzdálenost a metrika v grafu

Pojem vzdálenosti v grafu je popsán ve skriptech [UTG].

Řešené příklady

4.0.1. Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu W_n?
Ukážeme, že vzdálenost dvou vrcholů nemůže být větší než 2. Vezměme dva libovolné vrcholy $x, y \in V(W_n)$.

1. Je-li $x = y$, je $\mathrm{dist}(x, y) = 0$

2. Je-li $x \neq y$ a je-li jeden z vrcholů centrální vrchol kola v_0, potom je $\mathrm{dist}(x, y) = 1$, protože centrální vrchol je sousední se všemi.

3. Je-li $x \neq y$ a není-li ani jeden z vrcholů centrálním vrcholem, potom v případě, že x a y jsou sousední je $\mathrm{dist}(x, y) = 1$

4. Jinak je $\mathrm{dist}(x, y) \geq 2$. Současně ale víme, že $\mathrm{dist}(x, y) \leq \mathrm{dist}(x, v_0) + \mathrm{dist}(v_0, y) = 1 + 1 = 2$. Proto je $\mathrm{dist}(x, y) = 2$.

Celkem dostáváme, že pro $n = 3$, kdy na vnějším cyklu kola nenajdeme dva nesousední vrcholy ($W_3 = K_4$), je největší možná vzdálenost dvou vrcholů 1. Jinak je největší možná vzdálenost dvou vrcholů 2.

4.0.2. Jaká největší možná vážená vzdálenost může být mezi dvěma vrcholy v cyklu délky 9, který je ohodnocený všemi čísly $1, 2, \ldots, 9$, každým právě na jedné hraně v libovolném pořadí.
Jedno jak budou ohodnocení hranám přiřazena, vždy bude mezi dvěma pevně zvolenými vrcholy jedna cesta kratší a druhá delší, neboť součet $\sum_{i=1}^{9} = 45$ je lichý. Obě možné cesty mezi zvolenými vrcholy dají v součtu 45.

Největší možná vážená vzdálenost je $\lfloor \frac{45}{2} \rfloor = 22$, protože při libovolném rozdělení ohodnocení bude menší z obou možných součtů nejvýše 22. Taková vzdálenost může být realizována. Zvolíme ohodnocení po řadě $9, 6, 5, 2, 8, 7, 4, 3, 1$. Největší možná vzdálenost je $\min\{9+6+5+2, 8+7+4+3+1\} = \min\{22, 23\} = 22$.

4.1 Motivační příklady

4.1.1.* Hlavolam známý jako „Hanojské věže“[3] má tři kolíky a sadu osmi disků různých velikostí. Na začátku je všech osm disků seřazeno podle velikosti na prvním kůlu. Úkolem je přemístit všechny disky na jiný kůl za dodržení následujících podmínek:

1. vždy se přesunuje pouze jeden disk,
2. nikdy nesmí ležet větší disk na menším.

Namodelujte úlohu užitím grafu a pro tři disky najděte nejkratší možné řešení. [existuje řešení na 7 tahů]

4.1.2. Máme osmi litrovou nádobu s vínem a dvě prázdné nádoby – pětilitrovou a třílitrovou. Rozdělte osm litrů na čtyři a čtyři litry jen s užitím těchto nádob, bez použití odměrky. Úloha namodelujte grafem a najděte nejkratší řešení a popište všechna přípustná řešení. [nejkratší řešení má osm přelévání]

4.1.3. Máme osmi litrovou nádobu s vínem a dvě prázdné nádoby – pětilitrovou a třílitrovou. Je možno odměřit libovolné (celočíselné) množství vína? Pokud ne, zjistěte jaké. Pokud ano, dokažte. [ano]

[3] Hanojské věže vymyslel v roce 1883 Francouzský matematik Édouard Lucas.

4.2 Vzdálenost v grafu

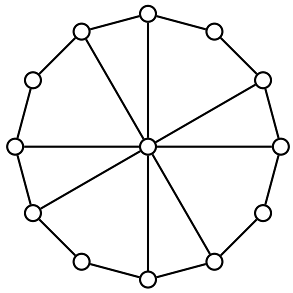
4.2.1.$^\heartsuit$ Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu K_4? [1]

4.2.2.$^\heartsuit$ Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu K_1? [0]

4.2.3.$^\heartsuit$ Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu C_7? [3]

4.2.4.$^\heartsuit$ Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu $K_{7,8}$? [2]

4.2.5. Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu G na Obrázku 4.1?



Obrázek 4.1: *Graf G.*

[4]

4.2.6. Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu K_n? [0 pro $n = 1$, 1 jinak]

4.2.7.$^\heartsuit$ Jaká je největší možná vzdálenost dvou různých vrcholů v grafu P_n? [$n-1$ (oba koncové vrcholy cesty P_n.]

4.2.8. Jaká je největší možná vzdálenost dvou různých vrcholů v grafu $K_{m,n}$? [1 pro $m = n = 1$, jinak 2]

4.2.9. Jaká je největší možná vzdálenost dvou různých vrcholů v grafu C_n? [$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$]

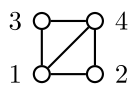
4.2.10. Najděte příklad grafu na osmi vrcholech, ve kterém je minimální i maximální vzdálenost dvou různých nesousedních vrcholů 2. [$K_{4,4}$ nebo $K_8 - e$]

4.2.11. Najděte graf s co nejmenším počtem hran na osmi vrcholech, ve kterém je minimální i maximální vzdálenost dvou různých nesousedních vrcholů 2. [$K_{1,7}$]

4.2.12. Najděte graf s co největším počtem hran na osmi vrcholech, ve kterém je minimální i maximální vzdálenost dvou různých nesousedních vrcholů 2. [K_8 bez jedné hrany]

4.2.13. Najděte graf s co největším počtem vrcholů, ve kterém je maximální vzdálenost dvou různých nesousedních vrcholů 2 a nejvyšší stupeň vrcholu je 3. [10 vrcholů]

4.2.14. Vypočítejte metriku (matici udávající vzdálenosti mezi vrcholy) grafu $K_4 - e$ na Obrázku 4.2.

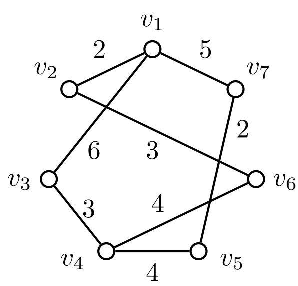


Obrázek 4.2: *Graf K_4 bez jedné hrany.*

[matice 4×4, kde $a_{ii} = 0$, políčka $a_{23} = a_{32} = 2$ a ostatní prvky jsou 1]

4.3 Vzdálenost v ohodnocených grafech

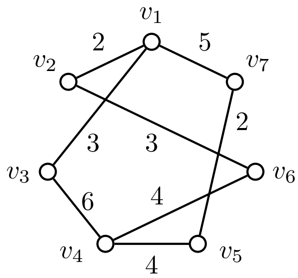
4.3.1. Máme dán graf G na Obrázku 4.3. Jaká je největší možná vážená vzdálenost mezi vrcholy v grafu G?



Obrázek 4.3: *Graf G.*

[10]

4.3.2. Máme dán graf G na Obrázku 4.4. Jaká je největší možná vážená vzdálenost mezi vrcholy v grafu G?

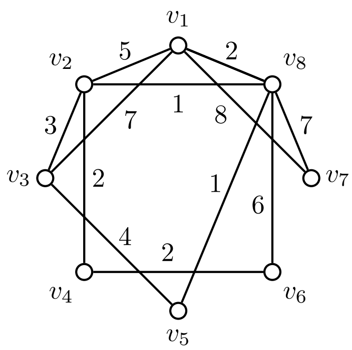


Obrázek 4.4: *Graf G.*

[10]

4.4 Nejkratší cesta v ohodnoceném grafu – Dijkstrův algoritmus

4.4.1. Máme dán graf jako na Obrázku 4.5.



Obrázek 4.5: *Graf G.*

a) Jaké jsou vzdálenosti všech vrcholů od vrcholu v_1? [$\mathrm{dist}(v_1, v_1) = 0$, $\mathrm{dist}(v_1, v_2) = 3$, $\mathrm{dist}(v_1, v_3) = 6$, $\mathrm{dist}(v_1, v_4) = 5$, $\mathrm{dist}(v_1, v_5) = 3$, $\mathrm{dist}(v_1, v_6) = 7$, $\mathrm{dist}(v_1, v_7) = 8$, $\mathrm{dist}(v_1, v_8) = 2$]

b) V jakém pořadí budou zpracovány vrcholy při běhu Dijkstrova algoritmu s výchozím vrcholem v_1? [$v_1, v_8, v_2, v_5, v_4, v_3, v_6, v_7$ nebo $v_1, v_8, v_5, v_2, v_4, v_3, v_6, v_7$]

c) Jaké jsou vzdálenosti všech vrcholů od vrcholu v_3? [$\mathrm{dist}(v_3, v_1) = 6$, $\mathrm{dist}(v_3, v_2) = 3$, $\mathrm{dist}(v_3, v_3) = 0$, $\mathrm{dist}(v_3, v_4) = 5$, $\mathrm{dist}(v_3, v_5) = 4$, $\mathrm{dist}(v_3, v_6) = 7$, $\mathrm{dist}(v_3, v_7) = 11$, $\mathrm{dist}(v_3, v_8) = 4$]

d) V jakém pořadí budou zpracovány vrcholy při běhu Dijkstrova algoritmu s výchozím vrcholem v_3? [$v_3, v_2, v_5, v_8, v_4, v_1, v_6, v_7$ nebo $v_3, v_2, v_8, v_5, v_4, v_1, v_6, v_7$]

e) Jaké jsou vzdálenosti všech vrcholů od vrcholu v_5? [$\mathrm{dist}(v_5, v_1) = 3$, $\mathrm{dist}(v_5, v_2) = 2$, $\mathrm{dist}(v_5, v_3) = 4$, $\mathrm{dist}(v_5, v_4) = 4$, $\mathrm{dist}(v_5, v_5) = 0$, $\mathrm{dist}(v_5, v_6) = 6$, $\mathrm{dist}(v_5, v_7) = 8$, $\mathrm{dist}(v_5, v_8) = 1$]

f) V jakém pořadí budou objeveny vrcholy při běhu Dijkstrova algoritmu s výchozím vrcholem v_5? [$v_5, v_8, v_2, v_1, v_3, v_4, v_6, v_7$ nebo $v_5, v_8, v_2, v_1, v_4, v_3, v_6, v_7$]

g) Které dva vrcholy jsou nejvzdálenější? Jaká je jejich vzdálenost? [v_6 a v_7, $\mathrm{dist}(v_6, v_7) = 12$]

h) Ze kterého vrcholu je maximální vzdálenost do všech ostatních vrcholů nejmenší?

4.4.2. Ve kterém místě selže Dijkstrův algoritmus, jestliže připustíme i záporná ohodnocení hran?

4.5 Příklady k procvičení

Hyperkrychlí řádu n budeme rozumět takový graf $G(V, E)$ na 2^n vrcholech, jehož vrcholovou množinu tvoří všechny binární vektory délky n

$$V = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in \{0,1\}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

a hrana je mezi každými dvěma vrcholy, jejichž vektory se liší v jediné souřadnici

$$E = \{(a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_n) : (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in V \wedge \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| = 1\}.$$

Hyperkrychle řádu n se značí Q_n.

4.5.1. Mějme graf Q_3 (hyperkrychle řádu 3). Kolik nejméně hran musíme přidat, aby největší možná vzdálenost mezi vrcholy grafu byla 2? [2]

4.5.2.$^\heartsuit$ Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu Q_n? Dokažte [n]

4.5.3.* Jak převést úlohu hledání nejkratší cesty i pro grafy s ohodnocenými vrcholy? [nahradit vrchol stupně d grafem K_d]

4.5.4. Kolik nejvíce vrcholů může mít graf, který má největší možnou vzdálenost mezi dvěma vrcholy rovnou 2? [počet vrcholů není omezen]

4.5.5. Kolik nejvíce vrcholů může mít 3-pravidelný graf, který má největší možnou vzdálenost mezi dvěma vrcholy rovnou 2? Nakreslete příklad takového grafu. [10, například Petersenův graf]

4.5.6. V jednom okrese je 15 velkých měst a každé město je spojeno silnicí s alespoň sedmi jinými.

a) Dokažte, že z libovolného města do libovolného jiného se dá dostat buď přímou cestou nebo přes jedno jiné město. [nepřímo nebo sporem]

b) Jak by se úloha změnila, kdyby každé město mělo být spojeno silnicí s právě sedmi jinými? [taková silniční síť neexistuje]

5 Stromy

Stromy a jejich základní vlastnosti jsou popsány ve skriptech [UTG].

Řešené příklady

5.0.1. Kolik existuje neisomorfních lesů na pěti vrcholech?
Systematicky projdeme všechny možné lesy na pěti vrcholech. Jednotlivé možnosti rozdělíme podle počtu hran

- bez hran existuje jediný les: $5K_1$
- s 1 hranou existuje jediný les $K_2 \cup 3K_1$
- se 2 hranami existují dva lesy $K_2 \cup K_2 \cup K_1$, $P_2 \cup 2K_2$
- se 3 hranami existují tři lesy $K_{1,3} \cup K_1$, $P_3 \cup K_1$, $P_2 \cup K_2$
- se 4 hranami existují tři stromy (a současně lesy) cesta P_4, cesta P_3 s jedním vrcholem připojeným k nelistovému vrcholu (dvojhvězda $DS(2,1)$) a hvězda $K_{1,4}$.

Existuje celkem 10 lesů.

5.0.2. Najděte takový graf se dvěma kružnicemi, že vynecháním jediné hrany vznikne strom.
Takový strom neexistuje.

Nejprve ukážeme, že pokud strom obsahuje dvě kružnice, tyto dvě kružnice nesdílí žádnou hranu. Pokud by kružnice C_1 a C_2 sdílely hranu xy, tak vynecháním hrany xy z cyklu C_1 zůstane v grafu cesta mezi vrcholy x a y a podobně z cyklu C_2 zůstane v grafu také (druhá) cesta mezi x a y. Spojením těchto dvou cest dostaneme uzavřený sled, ze kterého je možno vybrat třetí cyklus C_3, což by byl spor, neboť graf obsahuje pouze cykly dva.

Nyní víme, že obě kružnice v grafu nesdílí žádnou hranu. Vynecháním libovolné hrany e_1 z C_1 zůstane graf souvislý (vynechaná hrana e_1 neovlivní souvislost grafu) a bude navíc obsahovat jako podgraf druhý cyklus C_2. Graf nebude acyklický a proto takový graf, který splňuje podmínky zadání, neexistuje.

Podobně vynecháním libovolné hrany e_2 z C_2 zůstane graf souvislý (vynechaná hrana e_2 neovlivní souvislost grafu) a graf bude bez cyklů, tj. strom. □

Jiný důkaz:
Podle Důsledku 5.8. ve skriptech [UTG], vznikne přidáním hrany právě jeden cyklus. Existence grafu se zadání by byla ve sporu s tímto důsledkem. □

5.0.3. Kolik hran je třeba vynechat z kompletního grafu K_n, aby zůstala kostra?
Víme, že kompletní graf K_n má $\binom{n}{2}$ hran a kostra je stromem, který má $n-1$ hran. Z celkového počtu $\binom{n}{2}$ hran má zůstat $n-1$. Proto je třeba vynechat právě

$$\binom{n}{2} - (n-1) = \binom{n}{2} - (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1) - (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = \binom{n-1}{2}$$

hran.

Jiné řešení:
Protože kostra grafu je stromem na n vrcholech, obsahuje každá kostra stejný počet hran. Vybereme jednu konkrétní kostru. V kompletním grafu K_n zvolíme vrchol v a kostra grafu K_n bude tvořena všemi hranami incidentními s v. Všechny ostatní hrany mezi zbývajícími $n-1$ vrcholy odstraníme. Odstraněných hran je proto $\binom{n-1}{2}$.

5.1 Motivační příklady

5.1.1. Můžeme algoritmus hledání centra použít i pro jiné grafy než stromy? Najdete alespoň jeden takový graf? Vysvětlete! [ne]

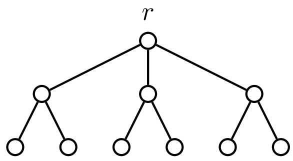
5.2 Základní vlastnosti stromů

5.2.1. Kolik neisomorfních lesů existuje na čtyřech vrcholech? [1+1+2+2=6]

5.2.2. Kolik neisomorfních stromů existuje na pěti vrcholech? [$1+1+1=3$]

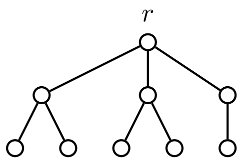
5.2.3.♡ Najděte centra následujících stromů.

a) Strom T na Obrázku 5.1.



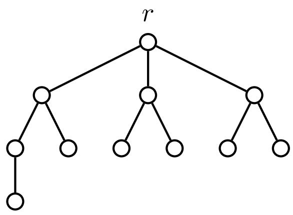
Obrázek 5.1: *Strom* T*.*

b) Strom T na Obrázku 5.2.



Obrázek 5.2: *Strom* T*.*

c) Strom T na Obrázku 5.3.



Obrázek 5.3: *Strom* T*.*

5.2.4. Máme dán strom se 17 vrcholy.

a) Kolik odebereme vrcholů (dle algoritmu z přednášky), než najdeme centrum? [15 nebo 16]

b) Kolik nejméně nastane takových kroků, kdy odstraňujeme listy? [jeden]

c) Kolik nejvíce nastane takových kroků, kdy odstraňujeme listy? [osm]

5.2.5.♡ Máme dán strom se 4 vrcholy. Kolik odebereme vrcholů (dle algoritmu z přednášky), než najdeme centrum? [2 nebo 3]

5.2.6.♡ Strom má 56 hran. Kolik může mít vrcholů? [57]

5.2.7. Acyklický graf má 70 vrcholů a 60 hran. Kolik má komponent? [10]

5.2.8. Acyklický graf má 60 vrcholů a 70 hran. Kolik má komponent? [takový graf neexistuje]

5.2.9.♡ Najděte graf se dvěma kružnicemi, ze kterého vynecháním dvou hran vznikne strom. [lehké]

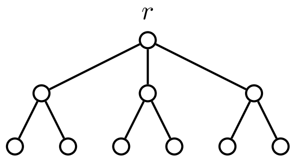
5.2.10. Najděte graf se dvěma kružnicemi, ze kterého vynecháním tří hran vznikne strom. [neexistuje]

5.2.11. Najděte graf se třemi kružnicemi, ze kterého vynecháním tří hran vznikne strom. [existuje]

5.2.12. Najděte graf se třemi kružnicemi, ze kterého vynecháním dvou hran vznikne strom. [existuje]

5.3 Kořenové a pěstované stromy

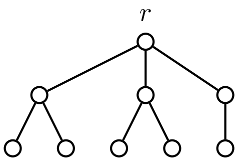
5.3.1. Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, r) na Obrázku 5.4.



Obrázek 5.4: *Kořenový strom* (T, r).

[0001011001011001011l]

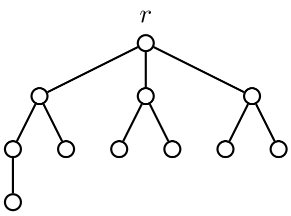
5.3.2. Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, r) na Obrázku 5.5.



Obrázek 5.5: *Kořenový strom* (T, r).

[000101100101100111]

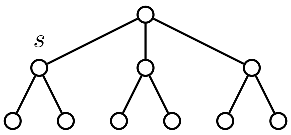
5.3.3. Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, r) na Obrázku 5.6.



Obrázek 5.6: *Kořenový strom* (T, r).

[00001101100101100101111]

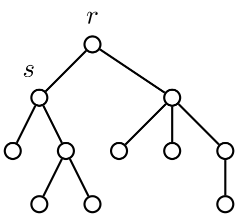
5.3.4. Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, s) na Obrázku 5.7.



Obrázek 5.7: *Kořenový strom* (T, s).

[00101000101100101111]

5.3.5. Máme dán strom T na Obrázku 5.8.



Obrázek 5.8: *Strom* T*, vyznačené vrcholy* r*,* s*.*

a) Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, r). [0001001011100101001111]

b) Najděte a zapište minimální kód kořenového stromu (T, r). [0000101101100011010111]

c) Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, s). [0010010110001010011111]

d) Najděte a zapište minimální kód kořenového stromu (T, s). [0000011010111001011011]

5.3.6. Nakreslete pěstovaný kořenový strom daný následujícím kódem.

a) 0000000001111111111 [strom isomorfní s P_8]

b) 0001011001011001 0111 [viz Obrázek 5.4]

c) 0000101101001110001101 11

d) 000010110100111000110 11 [toto není korektní kód]

e) 0000101101100111000110 11 [toto není korektní kód]

5.3.7. Je kód pěstovaného kořenového stromu daného následujícím kódem minimální?

a) 0000000001111111111. [ano]

b) 00010110010110010111 [ano]

c) 00011001011001001 0111 [ne]

d) 00010110011001010111 [ne]

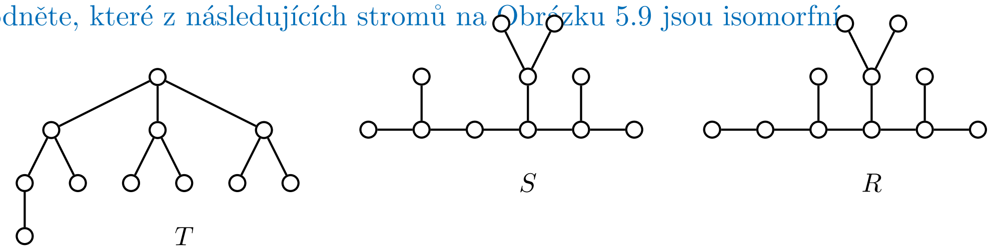
e) 0000110110110001010111 [ne]

f) 0000101101001110001101 11 [ne]

5.4 Isomorfismus stromů

5.4.1. Které kořenové stromy mají jednoznačně určený kód i když nejsou pěstované? [takové, kde všechny vrcholy ve vzdálenosti d od kořene mají stejný stupeň]

5.4.2. Rozhodněte, které z následujících stromů na Obrázku 5.9 jsou isomorfní.

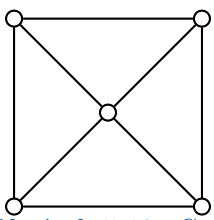


Obrázek 5.9: *Stromy T, S a R.*

[isomorfní jsou T a R]

5.5 Kostry grafů

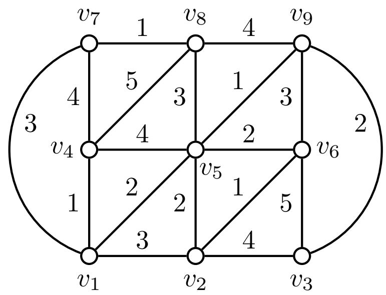
5.5.1. Kolik koster má následující graf W_4? Předpokládejme, že rozlišujeme vrcholy.



Obrázek 5.10: *Graf W_4.*

[45 možností]

5.5.2. Máme dán graf G na Obrázku 5.11.



Obrázek 5.11: *Graf G.*

a) Najděte minimální kostru grafu G pomocí Kruskalova (hladového) algoritmu. Jaká je váha minimální kostry? [minimální váha je 13]

b) Najděte minimální kostru grafu G pomocí Jarníkova (Primova) algoritmu. Výchozí vrchol je v_1. Jaká je váha minimální kostry? [minimální váha je 13]

c) Najděte minimální kostru grafu G pomocí Borůvkova algoritmu. Jaká je váha minimální kostry? [nelze použít]

5.5.3. Jaké vlastnosti musí mít ohodnocení grafu, aby všechny tři algoritmy (Borůvkův, Jarníkův/Primův i Kruskalův (hladový) našly vždy stejnou kostru? [ohodnocení musí být injekcí]

5.5.4. Mějme dán kompletní graf K_n, jehož množina vrcholů je $V = [1, n]$. Každou hranu uv ohodnotíme součtem $u + v$. Jak vypadá minimální kostra takto ohodnoceného kompletního grafu? [hvězda s centrem 1]

5.5.5. Mějme dán kompletní graf K_n, jehož množina vrcholů je $V = [1, n]$. Každou hranu uv ohodnotíme součtem $2u+5v$, kde $u < v$. Jak vypadá minimální kostra takto ohodnoceného kompletního grafu? [hvězda s centrem 1]

5.6 Příklady k procvičení

5.6.1.♡ Kolik různých koster má cyklus C_n? Předpokládejme, že rozlišujeme vrcholy. [n]

5.6.2.♡ Kolik různých neisomorfních koster má cyklus C_n? Předpokládejme, že nerozlišujeme vrcholy. [jedinou]

5.6.3. Máme graf K_4.

a) Kolik různých neisomorfních koster má graf K_4? [2]

b) Kolik různých koster má graf K_4? [16]

5.6.4. Máme graf K_5.

a) Kolik různých koster má graf K_5? [125]

b) Kolik různých neisomorfních koster má graf K_5? [3]

5.6.5. Máme graf K_6.

a) Kolik různých koster má graf K_6? [1296]

b) Kolik různých neisomorfních koster má graf K_6? [6]

5.6.6. Kolik hran je třeba vynechat z kompletního bipartitního grafu $K_{m,n}$, aby zůstala kostra? $[(m-1)(n-1)]$

5.6.7. Kolik nejméně vrcholů musí mít graf, který má dvě hranově disjunktní kostry? Najdete takový graf? [4]

5.6.8. Najděte příklad souvislého grafu, který má 1001 koster. [spojení tří cyklů C_7, C_{11} a C_{13}]

5.6.9. Zavedeme pojem inverzního kódu. Máme strom T a nějaký jeho kód C. Inverzní kód C' dostaneme tak, že zaměníme 0 a 1 a napíšeme kód v opačném pořadí. Najděte takový netriviální strom T, který má

a) stejný kód i inverzní kód, [cesta s kořenem v listu]

b) různý kód a inverzní kód, přičemž strom T' příslušný inverznímu kódu je isomorfní se stromem T,

c) různý kód a inverzní kód, přičemž strom T' příslušný inverznímu kódu není isomorfní se stromem T,

d) inverzní kód stejný jako minimální kód. [cesta s kořenem v listu]

5.6.10. Máme strom T a jeho kód C. Cestou ve strom T budeme rozumímět podgraf, který je isomorfní s cestou. Co můžeme říci o nejdelší cestě ve stromu T, je-li v kódu C pět po sobě jdoucích nul? [nejdelší cesta ve strom T je délky alespoň 4]

5.6.11. Máme strom T a jeho *minimální* kód C. Cestou ve strom T budeme rozumímět podgraf, který je isomorfní s cestou. Co můžeme říci o nejdelší cestě ve stromu T, je-li v kódu C pět po sobě jdoucích nul? [nejdelší cesta ve strom T je délky alespoň 4]

6 Barevnost a kreslení grafů

Pojmy barevnosti grafu a rovinného zakreslení grafu jsou popsány ve skriptech [UTG].

Řešené příklady

6.0.1. Máme dánu hyperkrychli řádu n, značíme ji Q_n (viz strana 64).

a) Jaký je počet vrcholů Q_n?

Vrcholy hyperkrychle jsou všechny binární vektory délky n. Těch je $V^*(2, n) = 2^n$.

Jiné řešení:

Počet vrcholů určíme podle (rekurzivní) konstrukce: $|V(Q_1)| = 2$. Dále platí $|V(Q_{n+1})| = 2 \cdot |V(Q_n)|$, proto $|V(Q_n)| = 2^n$.

b) Jaký je stupeň vrcholů v grafu Q_n?

Každý vrchol je spojen hranou se všemi vrcholy, jejichž odpovídající binární vektory se liší v jediné souřadnici. Binární vektory vrcholů krychle Q_n mají n souřadnic, proto je každý vrchol stupně n.

Jiné řešení:

Q_n je regulární graf. V každém kroku rekurzívní konstrukce přidáme ke každému vrcholu jednu hranu a zvýšíme stupeň vrcholu, proto $\deg_{Q_n} v = n$.

c) Jaký je počet hran Q_n?

V hyperkrychli je podle předchozích příkladů 2^n vrcholů a každý je stupně n. Podle principu sudosti je dvojnásobek počtu hran roven součtu stupňů všech vrcholů

$$2|E(Q_n)| = n \cdot 2^n.$$

Odtud snadno vyjádříme, že $|E(Q_n)| = n \cdot 2^{n-1}$.

d) Jaké je chromatické číslo Q_n?

Ukážeme, že chromatické číslo Q_n je 2, neboli že Q_n bipartitní graf. Stačí obarvit vrcholy, které mají sudý počet jedniček barvou 0 a vrcholy, které mají lichý počet jedniček barvou 1. Toto barvení je dobré, neboť hranou jsou spojeny pouze vrcholy, které se liší v jediné souřadnici a tedy takové, jejichž počet jedniček se liší o jedna.

Jiné řešení:

Matematickou indukcí vzhledem k parametru n ukážeme, že Q_n je bipartitní graf.

Základ indukce: Nejmenší netriviální hyperkrychle je $Q_1 = K_{1,1}$, která je jistě bipartitní.

Indukční krok: Indukční předpoklad: Předpokládejme, že Q_n je bipartitní graf. Nyní ukážeme, že také Q_{n+1} je bipartitní graf. Graf Q_{n+1} se skládá ze dvou kopií bipartitního grafu Q_n. Každou z nich obarvíme dvěma barvami, jednu barvami $1, 2$ druhou opačně barvami $2, 1$. Q_{n+1} vznikne spojením hranami mezi odpovídajícími vrcholy. Tyto dvojice vrcholů mají vždy různou barvu, proto je $\chi(Q_n) = 2$.

e) Pro které hodnoty n je graf Q_n rovinný?

Graf Q_n je bipartitní (viz část d), proto neobsahuje žádný lichý cyklus ani trojúhelník a podle Důsledku 6.16. ve skriptech [UTG] obsahuje každý rovinný graf bez trojúhelníků vrchol stupně nejvýše 3. Protože podle části c) jsou v Q_n všechny vrcholy stupně n, nejsou hyperkrychle Q_n pro $n \geq 4$ rovinné. Rovinná nakreslení grafů Q_1, Q_2 a Q_3 snadno najdete sami.

6.0.2. Najděte chybu v následujícím důkazu: Mějme takový graf G, že na jeho dobré vrcholové barvení je potřeba alespoň 5 barev. V grafu G musí být vrcholy stupně alespoň 5, které jsou sousední s vrcholy čtyř ostatních barev, jinak bychom je mohli přebarvit a použít méně než 5 barev. Jiste najdeme takovou množinu pěti vrcholů různé barvy, které tvoří podgraf K_5.

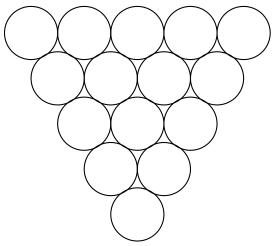
V roviném grafu podle Kuratowského věty neexistuje podgraf isomorfní s K_5 a proto (podle předchozího zdůvodnění) na obarvení roviného grafu budou stačit vždy čtyři barvy.

Chyba je v předpoklady, že graf, na jehož obarvení je potřeba alespoň 5 barev, musí obsahovat podgraf K_5. Například graf W_7, do kterého přidáme druhý centrální vrchol y a spojíme ho hranami se všemi vrcholy cyklu C_7 i s centrálním vrcholem x kola W_7, neobsahuje K_5 jako podgraf (žádné tři vrcholy na obvodu kola nejsou navzájem sousední) a přitom je potřeba na obarvení grafu alespoň 5 barev: dvě na centrální vrcholy x a y a tři na vrcholy cyklu C_7. Na základě tohoto neplatného tvrzení je pak již snadné chybně „dokázat“ větu o čtyřech barvách.

6.1 Motivační příklady

6.1.1. Skladovací problém: Ve skladu potravin máme různé druhy zboží. Podle hygienických norem se nesmí některé druhy potravin skladovat spolu v jedné místnosti. Naším úkolem je zjistit, kolik nejméně místností je potřeba ve skladu pronajmout, aby bylo zboží uloženo podle předpisů. Jak namodelujete skladovací problém pomocí teorie grafů. [převedeme na barvení jednoduchého grafu]

6.1.2. Kolik nejméně barev je potřeba na obarvení 15 biliárových koulí v trojúhelníkovém postavení tak, aby žádné dvě dotýkající se koule nebyly obarveny stejnou barvou?

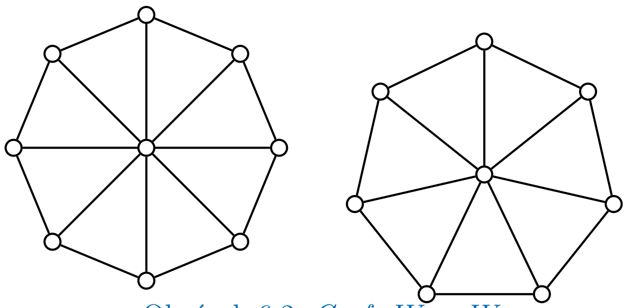


Obrázek 6.1: *Biliárové koule v trojúhelníkovém postavení.*

[3]

6.2 Vrcholové barvení grafů

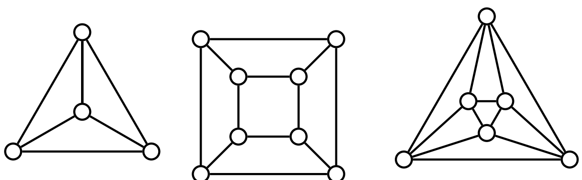
6.2.1. Jaké je chromatické číslo (barevnost) následujících grafů?



Obrázek 6.2: *Grafy W_8 a W_7.*

a) Graf W_8, viz Obrázek 6.2? [3]

b) Graf W_7, viz Obrázek 6.2? [4]



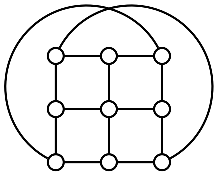
Obrázek 6.3: *Rovinná nakreslení pravidelného čtyřstěnu, šestistěnu a osmistěnu.*

c) Grafu pravidelného čtyřstěnu, viz Obrázek 6.3. [4]

d) Grafu pravidelného šestistěnu, viz Obrázek 6.3. [2]

e) Grafu pravidelného osmistěnu, viz Obrázek 6.3. [3]

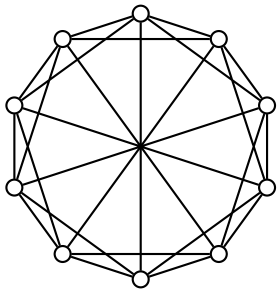
6.2.2. Jaké je chromatické číslo (barevnost) grafu G na Obrázku 6.4?



Obrázek 6.4: *Graf* G.

[3]

6.2.3. Jaké je chromatické číslo (barevnost) cirkulantu $C_{10}(1,2,5)$ na Obrázku 6.5?



Obrázek 6.5: *Cirkulant* $C_{10}(1,2,5)$.

[4]

6.2.4. Kolik nejméně musíme vynechat hran z grafu W_8 (viz Obrázek 6.2), aby jeho chromatické číslo bylo 2? [4]

6.2.5. Kolika nejvýše barvami obarvíme kompletní bipartitní graf s alespoň třemi vrcholy, jestliže mu přidáme jednu hranu? [3]

6.2.6. Kolika nejvýše barvami obarvíme kompletní bipartitní graf, jestliže mu přidáme dvě hrany? [3 nebo 4]

6.2.7.$^{\heartsuit}$ Kolika barvami lze obarvit strom. [1 pro $T = K_1$, 2 jinak]

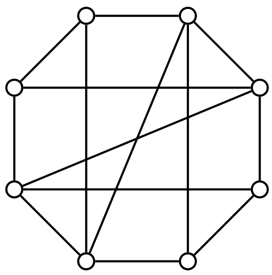
6.2.8. Kolik barev je potřeba na obarvení (jaká je barevnost) $K_n - e$? [$n-1$]

6.2.9. Kolik barev je potřeba na obarvení (jaká je barevnost) C_n s jednou přidanou hranou v_1v_i, $i \in [1,n]$? [2 pro n, i sudé, 3 jinak]

6.2.10. Mám dán graf G. Co můžeme říci o barvenosti grafu G, jestliže známe $\Delta(G)$? [$\chi(G) \le 1 + \Delta(G)$]

6.3 Rovinné kreslení grafu

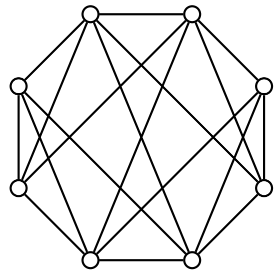
6.3.1. Pokud je to možné, nakreslete graf G na Obrázku 6.6 tak, aby se hrany neprotínaly.



Obrázek 6.6: *Graf G.*

[G je rovinný]

6.3.2. Pokud je to možné, nakreslete graf G na Obrázku 6.7 tak, aby se hrany neprotínaly.



Obrázek 6.7: *Graf G.*

[G je rovinný]

6.3.3. Ukažte, že po přidání libovolné hrany do grafu na Obrázku 6.7 výsledný graf již nebude rovinný. [užitím důsledku Eulerova vzorce]

6.3.4. Pokud je to možné, nakreslete rovinný graf pravidelného čtyřstěnu. [graf pravidelného čtyřstěnu je rovinný]

6.3.5. Pokud je to možné, nakreslete rovinný graf pravidelného šestistěnu (krychle). [graf pravidelného šestistěnu je rovinný]

6.3.6. Pokud je to možné, nakreslete rovinný graf pravidelného osmistěnu. [graf pravidelného osmistěnu je rovinný]

6.3.7. Nakreslete rovinný graf pravidelného dvanáctistěnu. [graf pravidelného dvanáctistěnu je rovinný]

6.3.8. Nakreslete rovinný graf pravidelného dvacetistěnu. [graf pravidelného dvacetistěnu je rovinný]

6.3.9. Nakreslete rovinný graf osmistěnu a najděte odpovídající duální graf. [duální graf pravidelného osmistěnu je graf pravidelného šestistěnu (krychle)]

6.3.10. Nakreslete rovinný graf dvanáctistěny a najděte odpovídající duální graf. [duální graf pravidelného dvanáctistěnu je graf pravidelného dvacetistěnu]

6.3.11. Máme nějaké rovinné nakreslení pravidelného osmistěnu. Stěny pravidelného osmistěnu jsou trojúhelníky.

a) Kolik má oblastí? [8]

b) Kolik má hran? [12]

c) Kolik má vrcholů? [6]

d) Kolik dalších hran můžeme do roviného nakreslení osmistěnu přidat tak, aby graf zůstal rovinný? [žádnou]

6.3.12. Máme nějaké rovinné nakreslení pravidelného šestistěnu (krychle).

a) Kolik má oblastí? [6]

b) Kolik má hran? [12]

c) Kolik má vrcholů? [8]

d) Kolik dalších hran můžeme do roviného nakreslení krychle přidat tak, aby graf zůstal rovinný? [6 hran]

6.3.13. Máme nějaké rovinné nakreslení pravidelného dvanáctistěnu. Stěny pravidelného dvanáctistěnu jsou pětiúhelníky.

a) Kolik má oblastí? [12]

b) Kolik má hran? [30]

c) Kolik má vrcholů? [20]

d) Kolik dalších hran můžeme do roviného nakreslení dvanáctistěnu přidat tak, aby graf zůstal rovinný? [24 hran]

6.3.14. Máme nějaké rovinné nakreslení pravidelného dvacetistěnu. Stěny pravidelného dvacetistěnu jsou trojúhelníky.

a) Kolik má oblastí? [12]

b) Kolik má hran? [30]

c) Kolik má vrcholů? [12]

d) Kolik dalších hran můžeme do roviného nakreslení dvacetistěnu přidat tak, aby graf zůstal rovinný? [žádnou]

6.3.15. Kolik má souvislý rovinný graf stěn, víte-li že má

a) 20 vrcholů a 25 hran? [7]

b) 16 vrcholů a 15 hran? [1]

c) 25 vrcholů a 22 hran? [takový souvislý graf neexistuje]

d) 5 vrcholů a 10 hran? [takový rovinný graf neexistuje]

6.3.16. Nakreslete graf K_4 tak, aby

a) se hrany neprotínaly [graf K_4 je grafem pravidelného čtyřstěnu]

b) a navíc aby byly úsečky. [graf K_4 je grafem pravidelného čtyřstěnu]

6.3.17. Nakreslete graf $K_5 - e$ tak, aby

a) se hrany neprotínaly [$K_5 - e$ je rovinný, nakreslení existuje]

b) a navíc aby byly úsečky. [$K_5 - e$ je rovinný, nakreslení existuje]

6.3.18. Nakreslete graf $K_{3,3} - e$ tak, aby

a) se hrany neprotínaly [$K_{3,3} - e$ je rovinný, nakreslení existuje]

b) a navíc aby byly úsečky. [$K_{3,3} - e$ je rovinný, nakreslení existuje]

6.3.19. Najděte rovinný graf, který má nejmenší stupeň vrcholů 5. [graf pravidelného dvacetistěnu]

6.3.20.* Najděte nekonečně mnoho neisomorfních souvislých rovinných grafů, které mají nejmenší stupeň vrcholů 5. [šikovně spojíme více pravidelných dvacetistěnů]

6.3.21. Do rovinného nakreslení stromu přidáme dvě hrany, které se navzájem nekříží a nekříží ani žádnou původní hranu stromu. Kolik bude mít výsledný graf oblastí (stěn)? [3]

6.4 Rozpoznání rovinných grafů

6.4.1.♡ Pro která n je graf K_n rovinný? Zdůvodněte. [pro $1 \leq n \leq 4$, užitím Kuratowského věty]

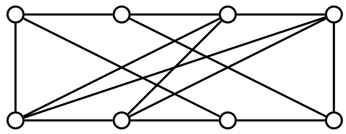
6.4.2.♡ Pro která m, n je graf $K_{m,n}$ rovinný? Zdůvodněte. [pouze pro $m < 3$ nebo $n < 3$]

6.4.3. Existuje rovinné nakreslení pro $K_6 - C_3$? Zdůvodněte. [ne, podle Kuratowského věty]

6.4.4. Nakreslete nějaký rovinný graf s 12 hranami a 8 stěnami. [graf pravidelného osmistěnu]

6.4.5. Nakreslete nějaký rovinný graf s 21 hranami a 16 stěnami. [takový graf neexistuje]

6.4.6.* Je graf G na Obrázku 6.8 rovinný? Zdůvodněte.



Obrázek 6.8: *Graf G.*

[ne, podle Kuratowského věty]

6.5 Barvení map a rovinných grafů

6.5.1. Kolik nejméně barev je třeba na dobré vrcholové barvení rovinného nakreslení grafů?

a) $K_5 - e$ [4]

b) $K_{3,3} - e$ [2]

6.5.2. Najdete rovinný graf, na jehož obarvení je potřeba alespoň 5 barev? Zdůvodněte. [takový graf neexistuje podle Věty o 4 barvách]

6.5.3. Kolik barev je třeba na dobré obarvení hyperkrychle Q_n? [2 (je bipartitní)]

6.5.4. Najdete graf s největším stupněm 2 na jehož dobré vrcholové barvení jsou potřeba alespoň 3 barvy? Zdůvodněte. [ano, takové grafy existují]

6.5.5. Najděte graf s největším stupněm r na jehož dobré vrcholové barvení je potřeba alespoň $r + 1$ barev. [K_{r+1}]

6.5.6. Najdete graf s největším stupněm 3 na jehož dobré vrcholové barvení je potřeba minimálně 5 barev? Zdůvodněte. [takový graf neexistuje]

6.5.7. Je Petersenův graf rovinný? Zdůvodněte. [není rovinný]

6.6 Příklady k procvičení

6.6.1. Podle předpisů se káva nesmí skladovat společně s rýží, rýže s moukou, mouka s jablky a jablka se nesmí skladovat společně s tropickým ovocem. Kolik nejméně místností je potřeba pro uskladnění všech druhů zboží? [stačí 2 místnosti]

6.6.2. Máme za úkol pronajmout skladové prostory, ve kterých se budou skladovat broskve, kukuřice, papriky, pšenice, rajčata, švestky a konzervy. Podle předpisů se obiloviny nesmí skladovat společně s ovocem, rajčata ani papriky se nesmí skladovat s pšenicí nebo kukuřicí a broskve se nesmí skladovat s rajčaty. Kolik nejméně místností je třeba pronajmout pro uskladnění všech druhů zboží? [3 místnosti]

6.6.3. Kolik hran stačí přidat do cyklu C_n, aby výsledný graf nebyl rovinný? [pro $n \geq 6$ 3 hrany, pro $n = 5$ 5 hran a pro $n < 5$ nelze]

6.6.4. Máme dány hyperkrychli Q_4 (viz strana 64). Je Q_4 rovinný graf? [není]

6.6.5. Nakreslete graf K_5 na torus.

6.6.6. Nakreslete graf K_6 na torus.

6.6.7. Nakreslete graf K_7 na torus.

6.6.8. Nakreslete graf $K_{3,3}$ na torus.

6.6.9. Nakreslete graf $K_{4,4}$ na torus.

7 Toky v sítích

Pojem sítě a definice toku v síti jsou jsou popsány ve skriptech [UTG].

7.1 Definice sítě

7.1.1. Pro které vrcholy sítě neplatí zákony kontinuity? [zdroj a stok]

7.1.2. Jak v síti namodelovat neorientovanou hranu? [dvojicí nesouhlasně orientovaných hran]

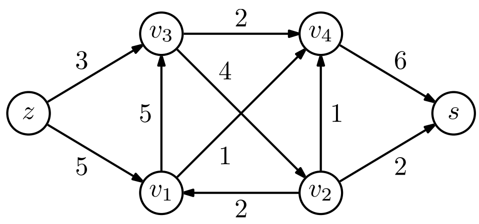
7.1.3. Může pro (jediný) zdroj platit zákon kontinuity? [ano]

7.1.4. Může v síti něco přitékat do zdroje? [ano]

7.1.5. Může být tok na hranách vycházející ze zdroje větší, než tok na hranách přitékajících do stoku? [ano]

7.2 Hledání maximálního toku

7.2.1. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 7.1.



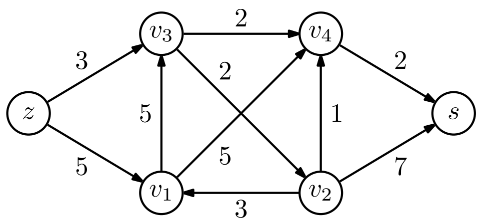
Obrázek 7.1: *Síť* (G, z, s, w).

a) Jaká je hodnota největšího toku v síti S? Najděte jej! [6]

b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti S? Najděte minimální řez. [6, $\{v_3v_4, v_1v_4, v_2v_4, v_2z\}$]

c) Jak vypadá množina U po skončení algoritmu? [$U = \{s, v_1, v_2, v_3\}$]

7.2.2. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 7.2.



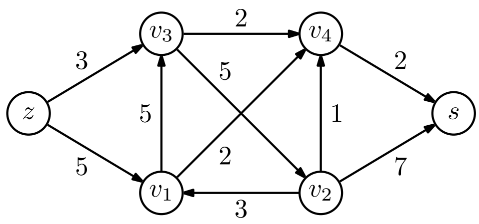
Obrázek 7.2: *Síť* (G, z, s, w).

a) Jaká je hodnota největšího toku v síti S? Najděte jej! [4]

b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti S? Najděte minimální řez. [4, $\{v_3v_2, v_4z\}$]

c) Jak vypadá množina U po skončení algoritmu? [$U = \{s, v_1, v_3, v_4\}$]

7.2.3. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 7.3.



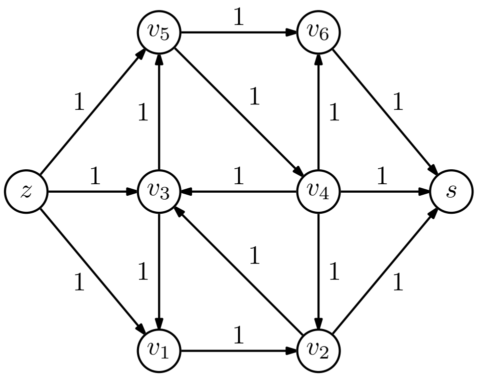
Obrázek 7.3: *Síť* (G, z, s, w).

a) Jaká je hodnota největšího toku v síti S? Najděte jej! [7]

b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti S? Najděte minimální řez. $[7, \{v_3v_2, v_4z\}]$

c) Jak vypadá množina U po skončení algoritmu? $[U = \{s, v_1, v_3, v_4\}]$

7.2.4. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 7.4.



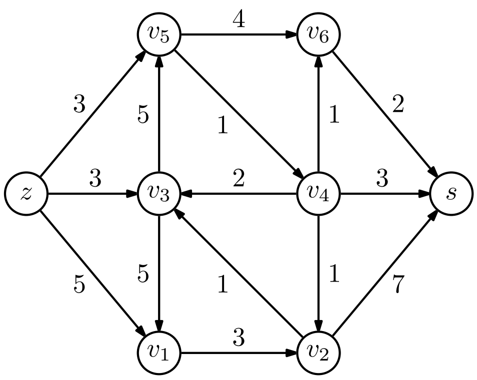
Obrázek 7.4: *Síť* (G, z, s, w).

a) Jaká je hodnota největšího toku v síti S? Najděte jej! [3]

b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti S? Najděte minimální řez. $[3, \{sv_1, sv_3, sv_5\}]$

c) Jak vypadá množina U po skončení algoritmu? $[U = \{s\}]$

7.2.5. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 7.5.



Obrázek 7.5: *Síť* (G, z, s, w).

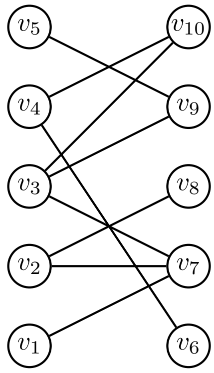
a) Jaká je hodnota největšího toku v síti S? Najděte jej! [6]

b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti S? Najděte minimální řez. $[6, \{v_1v_2, v_5v_4, v_6z\}]$

c) Jak vypadá množina U po skončení algoritmu? $[U = \{s, v_1, v_3, v_5, v_6\}]$

7.3 Zobecnění sítí a další aplikace

7.3.1. Najděte největší párování v následujícím grafu. Zdůvodněte, proč neexistuje větší párování.



Obrázek 7.6: *Bipartitní graf G.*

$[v_2v_8, v_3v_5, v_4v_6, v_5v_9]$

7.3.2. Existuje systém různých reprezentantů pro následující systém množin? Pokud ano, najděte ho, pokud ne, dokažte to.

$$M_1 = \{1,2,4\}, M_2 = \{1,3,7\}, M_3 = \{1,5,6\}, M_4 = \{2,6,7\}, M_5 = \{2,3,5\}, M_6 = \{3,4,6\}, M_7 = \{4,5,7\}$$

[systém reprezentantů $x_1 = 1$, $x_2 = 7$, $x_3 = 5$, $x_4 = 6$, $x_5 = 2$, $x_6 = 3$, $x_7 = 4$]

7.3.3. Existuje systém různých reprezentantů pro následující systém množin? Pokud ano, najděte ho, pokud ne, dokažte to.

$$M_1 = \{1,4,5\}, M_2 = \{1,4,6\}, M_3 = \{1,5,6\}, M_4 = \{2,3,5\}, M_5 = \{4,5,6\}, M_6 = \{4,5,7\}, M_7 = \{4,6,7\}$$

[systém reprezentantů: $|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_5 \cup M_6 \cup M_7| = |\{1,4,5,6,7\}| = 5 \ngeq 6$]

7.4 Příklady k procvičení

7.4.1. Najděte příklad sítě, kde kapacity hran jsou celočíselné a maximální tok není celočíselný. [taková síť neexistuje]

Reference

[ZDM] M. Kubesa, Základy diskrétní matematiky, VŠB–TU Ostrava, skriptum (2012).

[UTG] P. Kovář, Úvod do teorie grafů, VŠB–TU Ostrava, skriptum (2012).

[H] P. Hliněný, Diskrétní matematika, skriptum, VŠB (2005).

[TG] P. Kovář, Teorie grafů, VŠB–TU Ostrava, skriptum (2011).

[MN] J. Matoušek, J. Nešetřil, Kapitoly z diskrétní matematiky, Univerzita Karlova, Praha (2003),

[DMA] K.H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications – 6th ed., McGraw-Hill, New York (2007).

[W] D. B. West, Introduction to graph theory – 2nd ed., *Prentice-Hall*, Upper Saddle River NJ, (2001).