

Přečtěte si pozorně zadání. U každého příkladu uveďte také postup výpočtu.

1. Mějme pologrupu  $(G, \cdot)$ , kde nosná množina je  $G = \{A, B, C, D, H, V, E, F\}$  a operace „ $\cdot$ “ je dána následující tabulkou:

$\cdot$	A	B	C	D	H	V	E	F
A	A	B	C	D	H	V	E	F
B	B	C	D	A	F	E	H	V
C	C	D	A	B	V	H	F	E
D	D	A	B	C	E	F	V	H
H	H	E	V	F	A	C	B	D
V	V	F	H	E	C	A	D	B
E	E	V	F	H	D	B	A	C
F	F	H	E	V	B	D	C	A

- (a) Je  $(G, \cdot)$  komutativní pologrupa?  
 (b) Existují inverzní prvky k prvkům  $B$  a  $F$ ? Pokud ano, najděte je.  
 (c) Určete řád prvku  $C$ .  
 (d) Je  $(\{A, B, C, D\}, \cdot)$  podgrupou grupy  $(G, \cdot)$ ? Vysvětlete.  
 (e) Je  $(\{A, E, F\}, \cdot)$  normální podgrupou grupy  $(G, \cdot)$ ? Vysvětlete.
2. Mějme grupu  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$  a její podgrupu  $(\{1, -1\}, \cdot)$ .
- (a) Jak vypadá rozklad grupy  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$  podle podgrupy  $(\{1, -1\}, \cdot)$ ?  
 (b) Jaký je index podgrupy  $(\{1, -1\}, \cdot)$  v grupě  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ?  
 (c) Jak vypadá třída rozkladu obsahující prvek 7?
3. (a) Mějme symetrickou grupu  $(S_5, \circ)$  a permutaci  $\alpha = (2\ 4\ 3) \circ (2\ 4\ 1) \circ (4\ 1\ 5) \in S_5$ .  
 (b) Rozložte permutaci  $\alpha$  na součin disjunktních cyklů.  
 (c) Určete řád permutace  $\alpha$ .  
 (d) Určete paritu permutace  $\beta^2$ , kde  $\beta = (1\ 2\ 4\ 3\ 5) \circ (1\ 2\ 5\ 4) \circ (1\ 5\ 4) \circ (2\ 3)$ .
4. Mějme okruh  $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$  s operacemi sčítání a násobení modulo 12 (definovanými jako na přednášce).
- (a) Je okruh  $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$  podokruhem okruhu  $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ ? Stručně zdůvodněte.  
 (b) Je okruh  $(4\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$  podokruhem okruhu  $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ ? Stručně vysvětlete.  
 (c) Je okruh  $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$  oborem integrity? Stručně zdůvodněte.
5. Mějme okruh polynomů  $(\mathbb{Z}_5[x], +, \cdot)$ , kde „+“ a „ $\cdot$ “ jsou sčítání a násobení polynomů definované na přednášce.
- (a) Napište polynom  $p(x) = (x+4)^3$  ve tvaru  $a_n x^n + a_{n+1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , přičemž koeficienty polynomu  $p(x)$  mají být pouze prvky z množiny  $\mathbb{Z}_5$ .  
 (b) Kolik existuje různých zbytků, které dostaneme po dělení polynomů z okruhu  $(\mathbb{Z}_5[x], +, \cdot)$  polynomem  $x^2 + x + 1$ . Použijte zkrácený zápis. Například  $2x + 1$  místo  $(2x + 1) + \langle x^2 + x + 1 \rangle$ .  
 (c) Rozložte polynom  $x^2 + 1$  na součin dvou nekonstantních polynomů z okruhu  $(\mathbb{Z}_5[x], +, \cdot)$ .