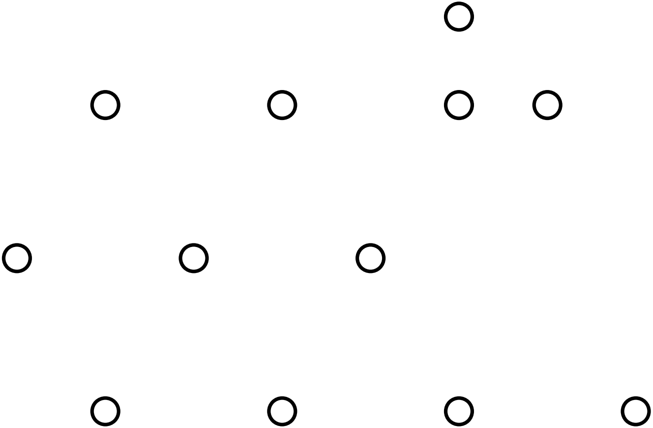
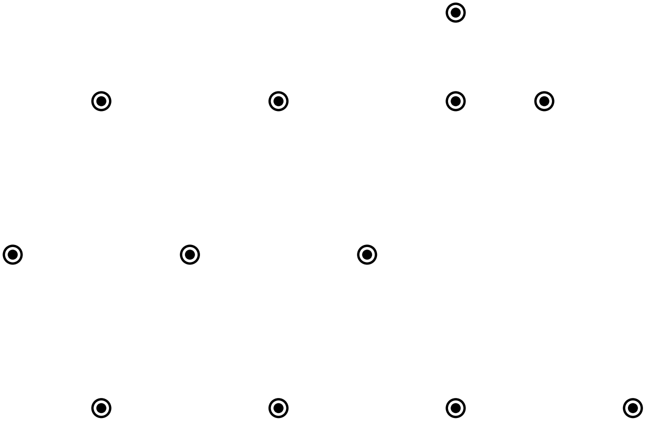
Důkaz Cayleyho věty



Důkaz Cayleyho věty



Nápověda

Animace slouží jako ilustrace látky kapitoly **3.2. Kostry** modulu Teorie grafů.

Věta 3.7. Cayleyho vzorec
Pro každé $n \geq 2$ je počet různých stromů na n vrcholech roven n^{n-2}.

Důkaz.
Důkaz provedeme metodou dvojího počítání. Dvěma způsoby spočítáme tzv. povykosy (postup výroby kořenových stromů) na n vrcholech.

První způsob: Nejprve vyrobíme kořenový strom tak, že mezi vrcholy postupně nakreslíme hrany a jeden vrchol zvolíme za kořen. Vezměme libovolný strom T_n na n vrcholech. Strom T_n má $n-1$ hran, které můžeme postupně přidat v libovolném pořadí. Počet takových pořadí je $(n-1)!$. Za kořen r můžeme vybrat libovolný z n vrcholů. Označíme-li $k(n)$ počet různých stromů na n vrcholech, tak počet různých povykosů je $n(n-1)!k(n)$ (nezávislé volby: $k(n)$ různých koster; n možností, jak zvolit kořen; $(n-1)!$ pořadí, jak přidat hrany).

Druhý způsob: V kořenovém stromu (T_n, r) zorientujeme hrany od listů ke kořenu. Přitom z žádného vrcholu jistě nemůže vést více než jedna hrana, příchozích hran může být libovolný počet. Povykosy můžeme sestavovat druhým způsobem, kdy přidáváme orientované hrany mezi n izolovaných vrcholů. Současně dbáme ta to, aby v každé komponentě takto sestavovaného lesa byl právě jeden vrchol (kořen komponenty), ze kterého žádná orientovaná hrana nevychází. Přidáme-li v nějakém kroku novou orientovanou hranu mezi dvě komponenty, koncový vrchol hrany můžeme zvolit libovolně, ale výchozí vrchol můžeme volit pouze mezi kořeny zbývajících $i-1$ komponent. Při konstrukci povykosu přidáme celkem $n-1$ hran (poslední hranu přidáváme mezi dvě komponenty) a existuje proto $\prod_{i=2}^{n} n(i-1) = n^{n-1}(n-1)!$ různých způsobů sestavení povykosů.

Dvěma různými způsoby jsme spočítali počet stejných objektů. Porovnáme oba vztahy a dostaneme

$$n(n-1)!k(n) = n^{n-1}(n-1)! \Rightarrow k(n) = n^{n-2}. \qquad \square$$

O projektu

Matematika pro inženýry 21. století – inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se vyvíjející informační a technické společnosti

Doba realizace: 1.9.2009 – 30.8.2012
Příjemce: VŠB - TU Ostrava
Partner projektu: ZČU v Plzni

Cílem projektu je inovace matematických a některých odborných kurzů na technických VŠ s cílem získat zájem studentů, zvýšit efektivnost výuky, zpřístupnit prakticky aplikovatelné výsledky moderní matematiky a vytvořit předpoklady pro efektivní výuku inženýrských předmětů.

Zkvalitnění výuky matematiky budoucích inženýrů chceme dosáhnout po stránce formální využitím nových informačních technologií přípravy elektronických studijních materiálů a po stránce věcné pečlivým výběrem vyučované látky s důsledným využíváním zavedených pojmů v celém kurzu matematiky s promyšlenou integrací moderního matematického aparátu do vybraných inženýrských předmětů.

Metodiku výuky matematiky a její atraktivnost pro studenty chceme zlepšit důrazem na motivaci a důsledným používáním postupu „od problému k řešení“.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ